Devoir à la maison n°2

À rendre le vendredi 13 octobre 2023

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E) : 8x^3 + 24x^2 + 96x + 43 = 0.$$

1. Montrer que, pour tous réels a et b,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2. Soit k un réel.

- **a.** Montrer que, pour tout réel x, $x^3 - k^3 = (x-k)(x^2 + kx + k^2)$.
- **b.** Utiliser la question précédente pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 = k^3$ d'inconnue x.
- **c.** En déduire les ensembles de solutions des équations $x^3 = 8$ et $x^3 = -\frac{27}{8}$.

3. Soit s et t deux réels tels que $s + t = \frac{37}{8}$, $st = -27$ et $s < t$.

- **a.** Montrer que, pour tout réel x, $(x-s)(x-t) = x^2 - \frac{37}{8}x - 27$.
- **b.** En déduire que s et t sont les solutions de l'équation $x^2 - \frac{37}{8}x - 27 = 0$.
- **c.** Déterminer les valeurs de s et de t.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8x^3 + 24x^2 + 96x + 43$.
Calculer, pour tout réel x, $f(x-1)$ (sous forme développée, réduite et ordonnée).

5. On considère l'équation

$$(F) : 8x^3 + 72x - 37 = 0.$$

On suppose que r est une solution de (F) et on considère deux réels u et v tels que $r = u + v$ et $u < v$.

- **a.** Montrer que $u^3 + v^3 + (3uv + 9)(u+v) - \frac{37}{8} = 0$.
- **b.** On suppose de plus que $uv = -3$. En déduire la valeur de $u^3 + v^3$.
- **c.** En déduire, en utilisant également les résultats des questions **2.** et **3.**, les valeurs de u et v puis celle de r.

6. En utilisant les questions précédentes, déterminer une solution α de (E).

7. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x - \alpha)(8x^2 + 20x + 86)$.

8. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Soit a et b deux réels. Alors,

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3$$

et donc $\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$.

2. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$(x-k)(x^2+kx+k^2) = x^3+kx^2+k^2x-kx^2-k^2x-k^3 = x^3-k^3.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ x^3-k^3 = (x-k)(x^2+kx+k^2)}$.

b. Grâce à la question précédente, pour tout réel x,

$$x^3 = k^3 \iff x^3-k^3 = 0 \iff (x-k)(x^2+kx+k^2) = 0 \iff x-k = 0 \text{ ou } x^2+kx+k^2.$$

Or, d'une part, $x-k=0$ si et seulement si $x=k$ et, d'autre part, le discriminant de x^2+kx+k^2 est $\Delta = k^2-4\times 1\times k^2 = -3k^2$. Si $k>0$ alors $\Delta<0$ donc l'équation $x^2+kx+k^2=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et si $k=0$ alors l'unique solution de $x^2=0$ est $x=0=k$. Ainsi, dans tous les cas, $x^3=k^3$ si et seulement si $x=k$.

On conclut donc que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions des } x^3=k^3 \text{ est } \{k\}}$.

c. Comme $8=2^3$, l'ensemble des solutions de $x^3=8$ est $\{2\}$ et, comme $-\frac{27}{8} = (-\frac{3}{2})^3$, l'ensemble des solutions de $x^3 = -\frac{27}{8}$ est $\{-\frac{3}{2}\}$.

3. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$(x-s)(x-t) = x^2-tx-sx+st = x^2-(s+t)x+st$$

donc, comme $s+t = \frac{37}{8}$ et $st=-27$, $\boxed{(x-s)(x-t) = x^2-\frac{37}{8}x-27}$.

b. On en déduit que

$$x^2-\frac{37}{8}x-27 = 0 \iff (x-s)(x-t) = 0 \iff x-s=0 \text{ ou } x-t=0 \iff x=s \text{ ou } x=t$$

donc $\boxed{s \text{ et } t \text{ sont les solutions de } x^2-\frac{37}{8}x-27=0.}$

c. Le discriminant de $x^2-\frac{37}{8}x-27=0$ est

$$\Delta = \left(-\frac{37}{8}\right)^2 - 4\times 1\times(-27) = \frac{8281}{64} > 0$$

donc (F) possède deux solutions réelles qui sont :

$$x_1 = \frac{-(-\frac{37}{8})-\sqrt{\frac{8281}{64}}}{2} = \frac{\frac{37}{8}-\frac{91}{8}}{2} = -\frac{27}{8}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-\frac{37}{8})+\sqrt{\frac{8281}{64}}}{2} = \frac{\frac{37}{8}+\frac{91}{8}}{2} = 8.$$

Comme $s<t$, on conclut que $\boxed{s=-\frac{27}{8} \text{ et } t=8}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}
f(x-1) &= 8(x-1)^3 + 24(x-1)^2 + 96(x-1) + 43 \\
&= 8(x+(-1))^3 + 24(x^2 - 2x + 1) + 96x - 96 + 43 \\
&= 8(x^3 + 3x^2(-1) + 3x(-1)^2 + (-1)^3) + 24x^2 - 48x + 24 + 96x - 53 \\
&= 8x^3 - 24x^2 + 24x - 8 + 24x^2 + 48x - 29
\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{f(x-1) = 8x^3 + 72x - 37}$.

5. a. Par hypothèse, $8r^3 + 72r - 37 = 0$ donc $8(u+v)^3 + 72(u+v) - 37 = 0$. Or,

$$\begin{aligned}
8(u+v)^3 + 72(u+v) - 37 &= 8(u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3) + 72(u+v) - 37 \\
&= 8(u^3 + v^3) + 24uv(u+v) + 72(u+v) - 37 \\
&= 8(u^3 + v^3) + (24uv + 72)(u+v) - 37
\end{aligned}$$

donc $8(u^3 + v^3) + (24uv + 72)(u+v) - 37 = 0$ et, en divisant par 8, il vient $\boxed{u^3 + v^3 + (3uv + 9)(u+v) - \frac{37}{8} = 0}$.

b. Comme $uv = -3$, $3uv + 9 = 0$ donc $\boxed{u^3 + v^3 = \frac{37}{8}}$.

c. D'après les questions précédentes, $u^3 + v^3 = \frac{37}{8}$ et $uv = -3$ donc $u^3v^3 = (uv)^3 = (-3)^3 = -27$. Ainsi, u^3 et v^3 sont deux réels dont la somme vaut $\frac{37}{8}$ et le produit vaut -27. On déduit donc de la question **3.c.**, comme $u^3 < v^3$ (par croissante de la fonction cube sur $\mathbb{R}$), que $u^3 = -\frac{27}{8}$ et $v^3 = 8$. Il s'ensuit, d'après la question **2.c.** que $\boxed{u = -\frac{3}{2} \text{ et } v = 2}$. Dès lors, comme $r = u + v$, $\boxed{r = \frac{1}{2}}$.

6. D'après la question précédente, $\frac{1}{2}$ peut être une solution de $8x^3 + 72x - 37 = 0$ et on vérifie qu'effectivement $8(\frac{1}{2})^3 + 72(\frac{1}{2}) - 37 = 1 + 36 - 37 = 0$. Autrement dit, d'après la question **2.**, $\frac{1}{2}$ est solution de $f(x-1) = 0$. Ainsi, $f(\frac{1}{2} - 1) = 0$ i.e. $f(-\frac{1}{2}) = 0$. On conclut donc que $\boxed{-\frac{1}{2} \text{ est solution de } (E)}$.

7. Pour tout réel x,

$$(x + \frac{1}{2})(8x^2 + 20x + 86) = 8x^3 + 20x^2 + 86x + 4x^2 + 10x + 43 = 8x^3 + 24x^2 + 96x + 43$$

donc $\boxed{f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(8x^2 + 20x + 86)}$.

8. Dès lors,

$$(E) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } 8x^2 + 20x + 86 = 0.$$

Or, le discriminant de $8x^2 + 20x + 86$ est $\Delta = 20^2 - 4 \times 8 \times 86 = -2352 < 0$ donc ce trinôme n'a pas de racine réelle.

Ainsi, on conclut que $\boxed{-\frac{1}{2} \text{ est l'unique racine réelle de } (E)}$.