Devoir à la maison n°2

À rendre le vendredi 13 octobre 2023

Le but de l'exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E) : 8x^3 + 24x^2 + 96x + 43 = 0.$$

1. Montrer que, pour tous réels a et b,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2. Soit k un réel.

a. Montrer que, pour tout réel x, $x^3 - k^3 = (x-k)(x^2 + kx + k^2)$.

b. Utiliser la question précédente pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 = k^3$ d'inconnue x.

c. En déduire les ensembles de solutions des équations $x^3 = 8$ et $x^3 = -\frac{27}{8}$.

3. Soit s et t deux réels tels que $s + t = \frac{37}{8}$, $st = -27$ et $s < t$.

a. Montrer que, pour tout réel x, $(x-s)(x-t) = x^2 - \frac{37}{8}x - 27$.

b. En déduire que s et t sont les solutions de l'équation $x^2 - \frac{37}{8}x - 27 = 0$.

c. Déterminer les valeurs de s et de t.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 8x^3 + 24x^2 + 96x + 43$.
Calculer, pour tout réel x, $f(x-1)$ (sous forme développée, réduite et ordonnée).

5. On considère l'équation

$$(F) : 8x^3 + 72x - 37 = 0.$$

On suppose que r est une solution de (F) et on considère deux réels u et v tels que $r = u + v$ et $u < v$.

a. Montrer que $u^3 + v^3 + (3uv + 9)(u+v) - \frac{37}{8} = 0$.

b. On suppose de plus que $uv = -3$. En déduire la valeur de $u^3 + v^3$.

c. En déduire, en utilisant également les résultats des questions **2.** et **3.**, les valeurs de u et v puis celle de r.

6. En utilisant les questions précédentes, déterminer une solution α de (E).

7. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x-\alpha)(8x^2 + 20x + 86)$.

8. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$.