

Devoir à la maison n°13

À rendre le mercredi 2 septembre 2026

Exercice 1 (Algèbre)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a. Déterminer un réel a tel que $A^2 - 8A = aI$.
b. En déduire que A est inversible et donner l'expression explicite de A^{-1} .

2. a. Résoudre $AX = 6X$, où X est de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- b. Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Que constate-t-on ?

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- a. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
- b. Montrer que $A = PDP^{-1}$.
- c. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
- d. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{6^{n+3} \times 2^n}{2} & \frac{6^n - 2^n}{2} & \frac{6^n - 2^n}{2} \\ \frac{6^n - 2^n}{2} & \frac{6^{n+3} \times 2^n}{2} & \frac{6^n - 2^n}{2} \\ \frac{6^n - 2^n}{2} & \frac{6^n - 2^n}{2} & \frac{6^n + 2^n}{2} \end{pmatrix}$.

Solution.

1. a. Comme

$$A^2 - 8A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 & 8 & 8 \\ 8 & 24 & 8 \\ 16 & 16 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix},$$

$$A^2 - 8A = -12I \text{ i.e. } \boxed{a = -12}.$$

- b. Ainsi, $A(A - 8I) = -12I$ donc $-\frac{1}{12}A(A - 8I) = I$ et ainsi $A \times \left(-\frac{1}{12}(A - 8I)\right) = I$
donc, par propriété, A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{12}(A - 8I)$ i.e.

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}.$$

2. a. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} AX = 6X &\iff \begin{cases} 3x + y + 2 = 6x \\ x + 3y + 2 = 6y \\ 2x + 2y + 8 = 12 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x + y = -2 \\ x - 3y = -2 \\ x + y = -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 3x - 2 \\ x - 3(3x - 2) = -2 \\ x + (3x - 2) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x - 2 \\ -8x + 6 = -2 \\ 4x - 2 = -2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution de $AX = 6X$ de la forme $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ainsi, si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors $AX = 2X$.

3. a. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ x - y = b & L_2 \\ 2x - z = c & L_3 \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ -2y - z = b - a & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -2y - 3z = c - 2a & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ -2y - z = b - a & L_2 \\ -2z = c - b - a & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système échelonné est de rang maximal donc P est inversible. De plus,

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} x + y + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c = a \\ -2y - (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c) = b - a \\ z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}c = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ y = \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}c \\ z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c \\ y = \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}c \\ z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \end{cases} \end{aligned}$$

donc
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b. On vérifie que

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc
$$PDP^{-1} = A.$$

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{H}(n) : \ll A^n = PD^nP^{-1} \gg$.

Initialisation. D'une part, $A^0 = I$ et, d'autre part, $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$ donc $A^0 = PD^0P^{-1}$ et ainsi $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Alors, grâce à la question b.,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(PD^{-1}P^{-1}) \\ &= PD^nIDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.}$$

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme D est diagonale,

$$D^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}} & \frac{6^n}{3 \times 2^{\frac{4}{n}}} & \frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}} \\ \frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}} & -\frac{3 \times 6^n}{2^{\frac{4}{n}}} & \frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}} \\ \frac{6^n}{2} & \frac{2^n}{2} & -\frac{2^n}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6^{n+2^n+2^{n+1}}}{\frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}}} & \frac{6^n - 3 \times 2^{n+1}}{\frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}}} & \frac{6^{n+2^n-2^{n+1}}}{\frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}}} \\ \frac{6^n - 4^n}{\frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}}} & \frac{6^n + 3 \times 2^n}{\frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}}} & \frac{6^n - 2^n}{\frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}}} \\ \frac{6^n - 4 \times 2^n}{2} & \frac{6^n - 4 \times 2^n}{2} & \frac{6^n + 2^n}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc, en remarquant que $2^{n+1} = 2 \times 2^n$, on conclut que

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{6^{n+3 \times 2^n}}{\frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}}} & \frac{6^n - 2^n}{\frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}}} & \frac{6^n - 2^n}{\frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}}} \\ \frac{6^n - 4 \times 2^n}{\frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}}} & \frac{6^n + 3 \times 2^n}{\frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}}} & \frac{6^n - 2^n}{\frac{6^n}{2^{\frac{4}{n}}}} \\ \frac{6^n - 4 \times 2^n}{2} & \frac{6^n - 4 \times 2^n}{2} & \frac{6^n + 2^n}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Analyse)

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto (1-x)^n e^{-2x}$.

Partie 1. Étude de la fonction f_1

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement à la fonction $f_1 : x \mapsto (1-x)e^{-2x}$.

1. Justifier que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer, pour tout réel x , $f_1'(x)$.
2. Étudier le signe de $f_1'(x)$ en fonction du réel x puis donner les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer les limites de f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de f_1 sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f_1(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α .
6. Justifier que $0 \leq \alpha \leq 1$.

Partie 2. Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie et donner son signe.
2. Calculer I_0 .
3. Étudier les variations de la suite (I_n) .
4. Que peut-on en déduire ?
5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
6. Déterminer la limite de la suite (I_n) .
7. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n.$$

8. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.
9. Donner un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution.

Partie 1. Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel x ,

$$f_1'(x) = (-1)e^{-2x} + (1-x) \times (-2e^{-2x}) = (-1 + (1-x) \times (-2))e^{-2x}$$

i.e. $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = (2x-3)e^{-2x}}.$

2. Pour tout réel x , $e^{-2x} > 0$ donc le signe de $f_1'(x)$ est le signe de $2x-3$. On en déduit que $\boxed{f_1'(x) \leq 0 \text{ si } x \leq \frac{3}{2} \text{ et } f_1'(x) \geq 0 \text{ si } x \geq \frac{3}{2}}$. De plus, f_1' ne s'annule qu'en $\frac{3}{2}$. Dès lors, $\boxed{f_1 \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty; \frac{3}{2}] \text{ et strictement croissante sur } [\frac{3}{2}; +\infty[}.$

3. Étude au voisinage de $-\infty$

D'une part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - x = +\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty}$.

Étude au voisinage de $+\infty$

Pour tout réel x ,

$$f_1(x) = e^{-2x} - xe^{-2x}.$$

D'une part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$. D'autre part, par croissances comparées, $\lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^{2X} = 0$ (car $2 > 0$) donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-2x} = 0$. Par somme, on conclut que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0}$.

4. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
signe de $f_1'(x)$	$-$	0	$+$
Variation de f_1	$+\infty$	$-\frac{1}{2}e^{-3}$	0

5. Sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$, f_1 est négative donc l'équation $f_1(x) = \frac{1}{2}$ n'a pas de solution.

Sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$, f_1 est continue (car dérivable) et strictement décroissante donc, par le théorème de la bijection continue, f_1 réalise une bijection de $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$ sur $\left[f_1\left(\frac{3}{2}\right); \lim_{-\infty} f_1\right[= \left[-\frac{1}{2}e^{-3}; +\infty\right[$. Comme $\frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}e^{-3}; +\infty\right[$, on en déduit que $\frac{1}{2}$ possède une unique antécédent α dans $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

On conclut donc que $\boxed{\alpha \text{ est l'unique solution dans } \mathbb{R} \text{ de l'équation } f_1(x) = \frac{1}{2}}$.

6. Comme $f_1(0) = 1$ et $f_1(1) = 0$, $f_1(1) \leq \frac{1}{2} \leq f_1(0)$ i.e. $f_1(1) \leq f_1(\alpha) \leq f_1(0)$. Par décroissance de f_1 sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$, on en déduit que $\boxed{0 \leq \alpha \leq 1}$.

Partie 2. Étude d'une suite d'intégrales

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue sur $[0; 1]$ comme produit et composée de fonctions continues donc $\boxed{I_n \text{ est bien définie}}$. De plus, pour tout $x \in [0; 1]$, $1 - x \geq 0$ donc, par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$, $(1 - x)^n \geq 0$ et $e^{-2x} > 0$ donc, par produit, $f_n(x) \geq 0$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit (puisque $0 < 1$) que $\boxed{I_n \geq 0}$.

2. Par définition,

$$I_0 = \int_0^1 (1 - x)^0 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} [e^{-2x}]_0^1 = -\frac{1}{2} (e^{-2} - e^0)$$

donc $\boxed{I_0 = \frac{1 - e^{-2}}{2}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0; 1]$. Comme $x \geq 0$, $1 - x \leq 1$ donc, en multipliant par $(1 - x)^n$ qui est positif (comme on l'a vu dans la question précédente), $(1 - x)^{n+1} \leq (1 - x)^n$. De plus, $e^{-2x} \geq 0$ donc $(1 - x)^{n+1}e^{-2x} \leq (1 - x)^ne^{-2x}$ i.e. $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$ i.e. $I_{n+1} \leq I_n$. Ainsi, on conclut que (I_n) est décroissante.
4. La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, (I_n) converge.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0; 1]$. Alors, $x \geq 0$ donc $-2x \leq 0$ et, par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, $e^{-2x} \leq e^0$ i.e. $e^{-2x} \leq 1$. En multipliant par $(1 - x)^n \geq 0$, on en déduit que $(1 - x)^ne^{-2x} \leq (1 - x)^n$ i.e. $f_n(x) \leq (1 - x)^n$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 (1 - x)^n dx.$$

Or,

$$\int_0^1 (1 - x)^n dx = \left[-\frac{(1 - x)^{n+1}}{n + 1} \right]_0^1 = -\frac{0^{n+1}}{n + 1} - \left(-\frac{1}{n + 1} \right) = \frac{1}{n + 1}.$$

On en déduit, en utilisant aussi le résultat de la question 1. que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n + 1}$.

6. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + 1} = 0$, on en déduit de la question précédente et du théorème d'encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons

$$2I_{n+1} = 2 \int_0^1 (1 - x)^{n+1} e^{-2x} dx = \int_0^1 (1 - x)^{n+1} \times 2e^{-2x} dx.$$

Considérons également les fonctions

$$u : x \mapsto (1 - x)^{n+1} \quad \text{et} \quad v : x \mapsto -e^{-2x}$$

qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et dont les dérivées sont

$$u' : x \mapsto -(n + 1)(1 - x)^n \quad \text{et} \quad v' : x \mapsto 2e^{-2x}.$$

En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned} 2I_{n+1} &= \left[(1 - x)^{n+1} \times (-e^{-2x}) \right]_0^1 - \int_0^1 (n + 1)(1 - x)^n e^{-2x} dx \\ &= 0 - (-e^0) - (n + 1) \int_0^1 (1 - x)^n e^{-2x} dx \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } 2I_{n+1} = 1 - (n + 1)I_n.$$

8. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1 - nI_n - I_n$ et donc $nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$. Or, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $I_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et ainsi, par somme, $nI_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
9. Il suit de la question précédente que $\frac{I_n}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc, par définition, $I_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 3 (Probabilités)

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U ;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule **blanche** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans l'**autre** urne et, si l'on pioche une boule **noire** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans la **même** urne.

Partie I – Étude de l'urne du n -ième tirage

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note U_n l'évènement « le n -ième tirage s'effectue dans l'urne U ». Puisque le premier tirage a lieu dans l'urne U , l'évènement U_1 est certain : $\mathbf{P}(U_1) = 1$.

1. Calculer $\mathbf{P}(U_2)$.
2. Donner, sans justification, la valeur de $\mathbf{P}_{U_2}(U_3)$ et celle de $\mathbf{P}_{\overline{U_2}}(U_3)$. En déduire $\mathbf{P}(U_3)$.
3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner, sans justification, la valeur de $\mathbf{P}_{U_n}(U_{n+1})$ et celle $\mathbf{P}_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$.
b. En déduire que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(U_{n+1}) = \frac{1}{12}\mathbf{P}(U_n) + \frac{1}{4}$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \mathbf{P}(U_n) - \frac{3}{11}$.
a. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de a_n en fonction de n puis la valeur de $\mathbf{P}(U_n)$ en fonction de n .
c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(U_n)$.

Partie II – Étude du nombre de boules blanches

Pour tout entier naturel non nul n , on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1 . On reconnaîtra une loi usuelle.
2. a. Donner, sans justifications, les valeurs de :

$$\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2=0), \quad \mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2=1), \quad \mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2=1) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2=2).$$

- b. En déduire la loi de X_2 .
- c. Vérifier que $\mathbf{E}(X_2) = \frac{19}{18}$.
3. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, donner, sans justification, $X_n(\Omega)$.
4. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(X_n = 0)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$ -ième boule s'effectuera dans U .

On admettra de même qu'après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre impair de boules blanches, le tirage de la $(n+1)$ -ième boule s'effectuera dans V .

6. À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4}\mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{2}{3}\mathbf{P}(X_n = 0).$$

7. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \mathbf{P}(X_n = 1)$.

Déduire de la question précédente que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

8. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{8}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

- b. En déduire, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbf{P}(X_n = 1)$ en fonction de n .

Solution.

Partie I – Étude de l'urne du n -ième tirage

1. Comme U_1 est un évènement certain, $\mathbf{P}(U_2) = \mathbf{P}(U_2 \mid U_1)$ donc $\mathbf{P}(U_2)$ est la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U . Par équiprobabilité des tirages, $\boxed{\mathbf{P}(U_2) = \frac{1}{3}}$.

2. De même, $\boxed{\mathbf{P}_{U_2}(U_3) = \frac{1}{3}}$ et $\boxed{\mathbf{P}_{\overline{U_2}}(U_3) = \frac{1}{4}}$.

Les évènements U_3 et $\overline{U_3}$ forment un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(U_3) = \mathbf{P}(U_2)\mathbf{P}_{U_2}(U_3) + \mathbf{P}(\overline{U_2})\mathbf{P}_{\overline{U_2}}(U_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{9} + \frac{1}{6}$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(U_3) = \frac{5}{18}}$.

3. a. Comme précédemment, pour tout entier $n \geq 2$, $\boxed{\mathbf{P}_{U_n}(U_{n+1}) = \frac{1}{3}}$ et $\boxed{\mathbf{P}_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = \frac{1}{4}}$.

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les évènements U_n et $\overline{U_n}$ forment un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(U_{n+1}) &= \mathbf{P}(U_n)\mathbf{P}_{U_n}(U_{n+1}) + \mathbf{P}(\overline{U_n})\mathbf{P}_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) \\ &= \mathbf{P}(U_n) \times \frac{1}{3} + (1 - \mathbf{P}(U_n)) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3}\mathbf{P}(U_n) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathbf{P}(U_n) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(U_{n+1}) = \frac{1}{12}\mathbf{P}(U_n) + \frac{1}{4}}$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$a_{n+1} = \mathbf{P}(U_{n+1}) - \frac{3}{11} = \frac{1}{12}\mathbf{P}(U_n) + \frac{1}{4} - \frac{3}{11} = \frac{1}{12}\mathbf{P}(U_n) - \frac{1}{44} = \frac{1}{12} \left(\mathbf{P}(U_n) - \frac{3}{11} \right) = \frac{1}{12}a_n$$

donc $\boxed{(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{3}{11}}$. De plus, son premier terme

est $a_1 = \mathbf{P}(U_1) - \frac{3}{11} = 1 - \frac{3}{11}$ soit $\boxed{a_1 = \frac{8}{11}}$.

- b. On en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{8}{11} \left(\frac{1}{12}\right)^n}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \mathbf{P}(U_n) - \frac{3}{11}$ donc $\mathbf{P}(U_n) = a_n + \frac{3}{11}$.
Dès lors, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(U_n) = \frac{8}{11} \left(\frac{1}{12}\right)^n + \frac{3}{11}}$.
- c. Comme $-1 < \frac{1}{12} < 1$, $\left(\frac{1}{12}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, par produit et somme, $\boxed{\mathbf{P}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{11}}$.

Partie II – Étude du nombre de boules blanches

- En un seul tirage, on peut tirer 0 ou 1 boule blanche donc X_1 suit une loi de Bernoulli. De plus, comme le premier tirage se fait dans l'urne 1, la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{1}{3}$. Ainsi, $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)}$.
- Si $(X_1 = 0)$ est réalisé alors la première boule tirée est noire donc le second tirage a lieu dans l'urne U . Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0) = \frac{1}{3}}$ et $\boxed{\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 1) = \frac{2}{3}}$.
Si $(X_1 = 1)$ est réalisé alors la première boule tirée est blanche donc le second tirage a lieu dans l'urne V . Ainsi, $\boxed{\mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{3}{4}}$ et $\boxed{\mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 2) = \frac{1}{4}}$.
 - Commençons par noter que $X_2(\omega) = \{0, 1, 2\}$.
Les événements $(X_1 = 0)$ et $(X_1 = 1)$ forment un système complet d'événements. D'après le formule des probabilités totales, on a donc

$$\mathbf{P}(X_2 = 0) = \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 0).$$

Or, si $(X_1 = 1)$ est réalisé, on a tiré une boule blanche au premier tirage donc $X_2 \geq 1$. Ainsi, $\mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 0) = 0$. Dès lors,

$$\mathbf{P}(X_2 = 0) = \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

De même,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_2 = 1) &= \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 1) + \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 1) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{13}{18}. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\mathbf{P}(X_2 = 2) = \mathbf{P}(X_1 = 0)\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 2) + \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 2).$$

Or, si $(X_1 = 0)$ est réalisé, on a tiré une boule noire au premier tirage donc $X_2 \leq 1$. Ainsi, $\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 2) = 0$. Dès lors,

$$\mathbf{P}(X_2 = 2) = \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

On peut donc résumer la loi de X_2 par le tableau suivant :

k	0	1	2
$\mathbf{P}(X = k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{1}{6}$

c. Ainsi, $\mathbf{E}(X_2) = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{13}{18} + 2 \times \frac{1}{6}$ i.e. $\mathbf{E}(X_2) = \frac{19}{18}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $(X_n = 0)$ est réalisé si et seulement si on tire une boule noire lors des n premiers tirages. Or, lorsqu'on tire une boule noire, on ne change pas d'urne. Ainsi, $\mathbf{P}(X_n = 0)$ est la probabilité de tirer n boules noires en effectuant n tirages avec remise dans l'urne U . Par indépendance des tirages, on a donc $\mathbf{P}(X_n = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
5. Si on a obtenu un nombre pair de boules blanches, on a changé un nombre pair de fois d'urne donc on se retrouve avec l'urne initiale i.e. l'urne U pour le tirage suivant.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $((X_n = k))_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X_n = k) \mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 1).$$

Or, si $X_n > 1$ alors $X_{n+1} > 1$ donc, pour tout $k > 1$, $\mathbf{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} = 1) = 0$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbf{P}(X_n = 0) \mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + \mathbf{P}(X_n = 1) \mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1).$$

De plus, si $X_n = 0$ alors le $(n+1)$ -ième tirage a lieu dans l'urne dans l'urne U donc $\mathbf{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$ et, si $X_n = 1$ alors le $(n+1)$ -ième tirage a lieu dans l'urne dans l'urne V donc $\mathbf{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4}$. Ainsi, on conclut que

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3} \mathbf{P}(X_n = 0) + \frac{3}{4} \mathbf{P}(X_n = 1).$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \left[\frac{2}{3} \mathbf{P}(X_n = 0) + \frac{3}{4} \mathbf{P}(X_n = 1) \right] \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \times \frac{2}{3} \mathbf{P}(X_n = 0) + \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \times \frac{3}{4} \mathbf{P}(X_n = 1) \end{aligned}$$

Or, d'une part, on a vu que $\mathbf{P}(X_n = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \times \frac{2}{3} \mathbf{P}(X_n = 0) &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \times \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4^{n+1} \times 2}{3^{n+1} \times 3 \times 3^{n+1}} \\ &= \frac{4^n \times 4 \times 2}{3^n \times 3 \times 3 \times 3^n} = \frac{8 \times 4^n}{9 \times (3 \times 3)^n} \\ &= \frac{8}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^n. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \times \frac{3}{4} \mathbf{P}(X_n = 1) = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \mathbf{P}(X_n = 1) = \left(\frac{4}{3}\right)^n \mathbf{P}(X_n = 1) = u_n.$$

Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \left(\frac{4}{9} \right)^n.}$$

8. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{H}(n) : \ll u_n = \frac{8}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right) \gg$.

Initialisation. D'une part, $u_1 = \left(\frac{4}{3} \right)^1 \mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ et, d'autre part, $\frac{8}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^1 \right) = \frac{8}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{8}{9}$ donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Alors, grâce à la question précédente,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{8}{9} \left(\frac{4}{9} \right)^n = \frac{8}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right) + \frac{8}{9} \left(\frac{4}{9} \right)^n \\ &= \frac{8}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n + \frac{5}{9} \left(\frac{4}{9} \right)^n \right) \\ &= \frac{8}{5} \left(1 + \left(-1 + \frac{5}{9} \right) \left(\frac{4}{9} \right)^n \right) \\ &= \frac{8}{5} \left(1 - \frac{4}{9} \left(\frac{4}{9} \right)^n \right) \\ &= \frac{8}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{8}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right).}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\frac{4}{3} \right)^n \mathbf{P}(X_n = 1)$ donc $\mathbf{P}(X_n = 1) = \left(\frac{3}{4} \right)^n u_n$. On déduit donc de la question précédente que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{8}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^n \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right).}$$