

Devoir à la maison n°13

À rendre le mercredi 2 septembre 2026

Exercice 1 (Algèbre)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a. Déterminer un réel a tel que $A^2 - 8A = aI$.
b. En déduire que A est inversible et donner l'expression explicite de A^{-1} .

2. a. Résoudre $AX = 6X$, où X est de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- b. Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Que constate-t-on ?

3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- a. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .

- b. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

- c. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

- d. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{6^n+3 \times 2^n}{2} & \frac{6^n-2^n}{2} & \frac{6^n-2^n}{2} \\ \frac{6^n-4^n}{2} & \frac{6^n+3 \times 2^n}{2} & \frac{6^n-2^n}{2} \\ \frac{6^n-2^n}{2} & \frac{6^n-2^n}{2} & \frac{6^n+2^n}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Analyse)

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto (1-x)^n e^{-2x}$.

Partie 1. Étude de la fonction f_1

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement à la fonction $f_1 : x \mapsto (1-x)e^{-2x}$.

1. Justifier que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer, pour tout réel x , $f_1'(x)$.
2. Étudier le signe de $f_1'(x)$ en fonction du réel x puis donner les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer les limites de f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de f_1 sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f_1(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α .
6. Justifier que $0 \leq \alpha \leq 1$.

Partie 2. Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie et donner son signe.
2. Calculer I_0 .
3. Étudier les variations de la suite (I_n) .
4. Que peut-on en déduire ?
5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
6. Déterminer la limite de la suite (I_n) .
7. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n.$$

8. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$.
9. Donner un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (Probabilités)

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U ;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule **blanche** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans l'**autre** urne et, si l'on pioche une boule **noire** lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans la **même** urne.

Partie I – Étude de l'urne du n -ième tirage

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on note U_n l'évènement « le n -ième tirage s'effectue dans l'urne U ». Puisque le premier tirage a lieu dans l'urne U , l'évènement U_1 est certain : $\mathbf{P}(U_1) = 1$.

1. Calculer $\mathbf{P}(U_2)$.
2. Donner, sans justification, la valeur de $\mathbf{P}_{U_2}(U_3)$ et celle de $\mathbf{P}_{\overline{U_2}}(U_3)$. En déduire $\mathbf{P}(U_3)$.
3.
 - a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner, sans justification, la valeur de $\mathbf{P}_{U_n}(U_{n+1})$ et celle $\mathbf{P}_{\overline{U_n}}(U_{n+1})$.
 - b. En déduire que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(U_{n+1}) = \frac{1}{12}\mathbf{P}(U_n) + \frac{1}{4}$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \mathbf{P}(U_n) - \frac{3}{11}$.
 - a. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
 - b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de a_n en fonction de n puis la valeur de $\mathbf{P}(U_n)$ en fonction de n .
 - c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(U_n)$.

Partie II – Étude du nombre de boules blanches

Pour tout entier naturel non nul n , on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1 . On reconnaîtra une loi usuelle.
2. a. Donner, sans justifications, les valeurs de :

$$\mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0), \quad \mathbf{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 1), \quad \mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 1) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 2).$$

- b. En déduire la loi de X_2 .
- c. Vérifier que $\mathbf{E}(X_2) = \frac{19}{18}$.
3. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, donner, sans justification, $X_n(\Omega)$.
4. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(X_n = 0)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer pourquoi après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre pair de boules blanches, le tirage de la $(n + 1)$ -ième boule s'effectuera dans U .

On admettra de même qu'après avoir obtenu au cours des n premiers tirages un nombre impair de boules blanches, le tirage de la $(n + 1)$ -ième boule s'effectuera dans V .

6. À l'aide de la formule des probabilités totales, démontrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4}\mathbf{P}(X_n = 1) + \frac{2}{3}\mathbf{P}(X_n = 0).$$

7. Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \mathbf{P}(X_n = 1)$.

Déduire de la question précédente que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9} \left(\frac{4}{9}\right)^n.$$

8. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{8}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

- b. En déduire, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbf{P}(X_n = 1)$ en fonction de n .

FIN DE L'ÉNONCÉ