

## Devoir à la maison n°12

À rendre le mercredi 10 juin 2026

Pour tout entier naturel non nul, on considère, sur  $[0; +\infty[$ , l'équation

$$(E_n) : e^x = x^n$$

Pour ce faire, on introduit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

### Partie A. — Étude des cas $n = 1$ et $n = 2$

1. Dans cette question, on étudie le cas  $n = 1$ .
  - a. Étudier les variations de  $f_1$  sur  $[0; +\infty[$ .  
On dressera son tableau de variation en précisant la valeur en 0 et la limite en  $\infty$ .
  - b. Étudier l'existence de solutions positives pour l'équation  $(E_1)$ .
2. Reprendre les questions précédentes dans le cas  $n = 2$ .

### Partie B. — Étude du cas $n \geq 3$

#### 1. Existence de solutions

Dans cette question, on suppose que  $n$  est un entier au moins égal à 3.

- a. Montrer que  $f_n(n) = 1 - \left(\frac{n}{e}\right)^n$  et en déduire que  $f_n(n) < 0$ .
  - b. Étudier la fonction  $f_n$  sur  $[0; +\infty[$ .  
On dressera son tableau de variation en précisant la valeur en 0 et la limite en  $+\infty$ .
  - c. Montrer que l'équation  $(E_n)$  admet deux solutions positives  $u_n$  et  $v_n$  telles que  $1 \leq u_n < n < v_n$ .
- #### 2. Étude de la suite $(u_n)$
- a. Déterminer, pour tout entier  $n \geq 3$ , le signe de  $f_{n+1}(u_n)$  et en déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
  - b. Montrer que  $(u_n)$  converge.
  - c. Montrer que, pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $u_n = \exp\left(\frac{u_n}{n}\right)$  et en déduire la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)$ .
  - d. En utilisant un équivalent usuel, montrer que  $u_n - \ell \sim \frac{1}{n}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- #### 3. Étude de la suite $(v_n)$
- a. Déterminer, pour tout entier  $n \geq 3$ , le signe de  $f_n(v_{n+1})$  et en déduire le sens de variation de la suite  $(v_n)$ .
  - b. Déterminer la limite de  $(v_n)$ .
  - c. On considère la fonction  $g : x \mapsto x - \ln(x)$  définie sur  $[1; +\infty[$ .  
Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  dans  $[1; +\infty[$ .
  - d. Établir que, pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $g\left(\frac{v_n}{n}\right) = \ln(n)$ .
  - e. Montrer à l'aide de la bijection réciproque  $g^{-1}$  de  $g$  que  $\frac{v_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .
  - f. Conclure que  $v_n \sim n \ln(n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Solution.**

**Partie A. — Étude des cas  $n = 1$  et  $n = 2$**

1. a. On considère  $f_1 : x \mapsto 1 - xe^{-x}$  définie sur  $[0; +\infty[$ .

La fonction  $f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  comme composée, produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$f_1'(x) = -\left(1 \times e^{-x} + x(-e^{-x})\right) = (x - 1)e^{-x}.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $e^{-x} > 0$  donc le signe de  $f_1'(x)$  est le signe de  $x - 1$  i.e.  $f_1'(x) \leq 0$  si  $x \in [0; 1]$  et  $f_1'(x) \geq 0$  si  $x \in [1; +\infty[$ . Ainsi,  $f_1$  est décroissante sur  $[0; 1]$  et croissante sur  $[1; +\infty[$ .

De plus,  $f_1(0) = 1$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f_1(x) = 1 - \frac{x}{e^x}$  donc, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 1$ .

On aboutit donc au tableau de variation suivant :

$x$	0	1	$+\infty$
Variation de $f_1$	1	$1 - e^{-1}$	1

b. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$(E_1) \iff e^x = x \iff 1 = xe^{-x} \iff 1 - xe^{-x} = 0 \iff f_1(x) = 0.$$

Or, d'après le tableau de variation, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f_1(x) \geq 1 - e^{-1} > 0$  donc  $f_1(x) \neq 0$ . Ainsi, l'équation  $(E_1)$  n'a pas de solution sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. On considère  $f_2 : x \mapsto 1 - x^2e^{-x}$  définie sur  $[0; +\infty[$ .

La fonction  $f_2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  comme composée, produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$f_2'(x) = -\left(2x \times e^{-x} + x^2(-e^{-x})\right) = x(x - 2)e^{-x}.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $e^{-x} \geq 0$  donc le signe de  $f_2'(x)$  est le signe de  $x - 2$  i.e.  $f_2'(x) \leq 0$  si  $x \in [0; 2]$  et  $f_2'(x) \geq 0$  si  $x \in [2; +\infty[$ . Ainsi,  $f_2$  est décroissante sur  $[0; 2]$  et croissante sur  $[2; +\infty[$ .

De plus,  $f_2(0) = 1$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f_2(x) = 1 - \frac{x^2}{e^x}$  donc, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 1$ .

On aboutit donc au tableau de variation suivant :

$x$	0	2	$+\infty$
Variation de $f_1$	1	$1 - 4e^{-2}$	1

3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$(E_2) \iff e^x = x^2 \iff 1 = x^2 e^{-x} \iff 1 - x^2 e^{-x} = 0 \iff f_2(x) = 0.$$

Or, d'après le tableau de variation, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f_2(x) \geq 1 - 4e^{-2} > 0$  donc  $f_2(x) \neq 0$ . Ainsi, l'équation  $(E_2)$  n'a pas de solution sur  $\mathbb{R}_+$ .

### Partie B. — Étude du cas $n \geq 3$

1. a. Par définition,

$$f_n(n) = 1 - n^n e^{-n} = 1 - n^n \times \frac{1}{e^n} = 1 - n^n \times \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

donc  $f_n(n) = 1 - \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

Or,  $e < 3 \leq n$  donc  $\frac{n}{e} > 1$ . Par stricte croissance de la fonction  $x \mapsto x^n$  sur  $\mathbb{R}_+$ , on en déduit que  $\left(\frac{n}{e}\right)^n > 1^n = 1$  donc  $f_n(n) < 0$ .

b. On considère  $f_n : x \mapsto 1 - x e^{-x}$  définie sur  $[0; +\infty[$ .

La fonction  $f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  comme composée, produit et somme de fonctions dérivables et, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$f'_1(x) = -\left(nx^{n-1} \times e^{-x} + x^n(-e^{-x})\right) = x^{n-1}(x - n)e^{-x}.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $x^{n-1}e^{-x} \geq 0$  donc le signe de  $f'_n(x)$  est le signe de  $x - n$  i.e.  $f'_n(x) \leq 0$  si  $x \in [0; n]$  et  $f'_n(x) \geq 0$  si  $x \in [n; +\infty[$ . De plus,  $f'_n(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$  ou  $x = n$ . Ainsi,  $f_n$  est strictement décroissante sur  $[0; n]$  et strictement croissante sur  $[n; +\infty[$ .

De plus,  $f_n(0) = 1$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $f_n(x) = 1 - \frac{x^n}{e^{-x}}$  donc, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$ .

On aboutit donc au tableau de variation suivant :

$x$	0	$n$	$+\infty$
Variation de $f_n$	1	$1 - \left(\frac{n}{e}\right)^n$	1

c. Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ ,

$$(E_n) \iff e^x = x^n \iff 1 = x^n e^{-x} \iff 1 - x^n e^{-x} = 0 \iff f_n(x) = 0.$$

Comme  $f_n$  est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur  $[0; n]$ , par le théorème de la bijection continue,  $f_n$  réalise une bijection de  $[0; n]$  dans  $[f_n(n); 1]$ . Comme  $f_n(n) < 0$ ,  $0 \in [f_n(n); 1]$  donc il existe un unique réel  $u_n \in [0; n]$  tel que  $f_n(u_n) = 0$ .

De même,  $f_n$  est continue (car dérivable) et strictement croissante sur  $[n; +\infty[$  donc, par le théorème de la bijection continue,  $f_n$  réalise une bijection de  $[n; +\infty[$  dans  $[f_n(n); 1]$  et donc il existe un unique réel  $v_n \in [n; +\infty[$  tel que  $f_n(v_n) = 0$ . De plus,  $f_n(1) = 1 - e^{-1} > 0$  et  $f_n(n) < 0$  donc  $1 < u_n < n < v_n$ . Ainsi, l'équation  $(E_n)$  possède deux solutions sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. a. Soit un entier  $n \geq 3$ . Alors, par définition,  $e^{u_n} = u_n^n$  donc

$$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n^{n+1}e^{-u_n} = 1 - u_n \times u_n^n e^{-u_n} = 1 - u_n \times e^{u_n} e^{-u_n} = 1 - u_n \leq 0$$

car  $u_n \geq 1$ . Ainsi,  $f_{n+1}(u_n) \leq 0$ .

Autrement dit,  $f_{n+1}(u_n) \leq f_{n+1}(u_{n+1})$  donc, comme  $f_n$  est décroissante sur  $[0; n]$ ,  $u_n \geq u_{n+1}$ . On conclut donc que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

b. La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 1 donc, par le théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  converge.

c. Soit un entier  $n \geq 3$ . Par définition,  $e^{u_n} = u_n^n$  donc  $u_n = \ln(u_n^n) = n \ln(u_n)$  donc  $\frac{u_n}{n} = \ln(u_n)$ . On en déduit que  $u_n = \exp\left(\frac{u_n}{n}\right)$ . Notons  $\ell$  la limite de  $(u_n)$ . Alors,  $\frac{\ell}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc, par continuité de  $\exp$  en 0,  $\exp\left(\frac{u_n}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(0)$  i.e., par le calcul précédent,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ . Ainsi,  $\ell = 1$ .

d. Par ce qui précède, pour tout  $n \geq 3$ ,  $u_n - 1 = \exp\left(\frac{u_n}{n}\right) - 1$ . Or, comme  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ ,  $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc, par les équivalents usuels,  $\exp\left(\frac{u_n}{n}\right) - 1 \sim \frac{u_n}{n}$  i.e.  $u_n - 1 \sim \frac{u_n}{n}$ . De plus, comme  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ ,  $u_n \sim 1$  donc  $\frac{u_n}{n} \sim \frac{1}{n}$ . Finalement, on conclut que

$$u_n - 1 \sim \frac{1}{n}.$$

3. a. Soit un entier  $n \geq 3$ . Comme  $e^{v_{n+1}} = v_{n+1}^{n+1}$  donc  $e^{-v_{n+1}} = \frac{1}{v_{n+1}^{n+1}}$ ,

$$f_n(v_{n+1}) = 1 - v_{n+1}^n e^{-v_{n+1}} = 1 - v_{n+1}^n \times \frac{1}{v_{n+1}^{n+1}} = 1 - \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{v_{n+1} - 1}{v_{n+1}} \geq 0$$

car  $v_n \geq 1$ . Ainsi,  $f_n(v_{n+1}) \geq 0$ .

Autrement dit,  $f_n v_{n+1} \geq f_n(v_n)$  donc, comme  $f_n$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $v_{n+1} \geq v_n$ . Ainsi, la suite  $(v_n)$  est décroissante.

b. On a montré que, pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $v_n \geq n$  donc, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , par le théorème de comparaison,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

c. La fonction  $g$  est dérivable et donc continue sur  $[1; +\infty[$  comme différence de fonctions dérivables et, pour tout réel  $x \geq 1$ ,  $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ . Or, pour tout  $x \geq 1$ ,  $x > 0$  et  $x-1 \geq 0$  donc  $g'(x) \geq 0$ . De plus,  $g'(x) = 0$  si et seulement si  $x = 1$  donc  $g$  est strictement croissante sur  $[1; +\infty[$ . Par ailleurs, d'une part,  $g(1) = 1$  et, d'autre part, pour tout  $x \geq 1$ ,  $g(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$  et, par croissances comparées,  $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  donc, par somme et produit,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ . Par le théorème de la bijection continue, on conclut que  $g$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  sur  $[1; +\infty[$ .

d. Soit un entier  $n \geq 3$ . Alors,  $e^{v_n} = v_n^n$  donc  $v_n = n \ln(v_n)$  i.e.  $\frac{v_n}{n} = \ln(v_n)$ . Dès lors,

$$g\left(\frac{v_n}{n}\right) = \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) = \ln(v_n) - (\ln(v_n) - \ln(n))$$

donc  $g\left(\frac{v_n}{n}\right) = \ln(n)$ .

e. On déduit de la question précédente que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(\frac{v_n}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$ . Or, pour tout entier  $n \geq 3$ ,  $\frac{v_n}{n} = g^{-1}\left(g\left(\frac{v_n}{n}\right)\right)$  et, comme  $\lim_{+\infty} g = +\infty$ ,  $\lim_{+\infty} g^{-1} = +\infty$  donc, par composition,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-1}\left(g\left(\frac{v_n}{n}\right)\right) = +\infty$  i.e.  $\frac{v_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

f. Pour tout entier  $n \geq 3$ , d'après la question d.,

$$\frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) = \ln(n)$$

donc

$$\frac{v_n}{n} \left[ 1 - \frac{\ln\left(\frac{v_n}{n}\right)}{\frac{v_n}{n}} \right] = \ln(n)$$

et ainsi

$$\frac{v_n}{n \ln(n)} = \frac{1}{1 - \frac{\ln\left(\frac{v_n}{n}\right)}{\frac{v_n}{n}}}$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = +\infty$  et, par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  donc, par composition,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{v_n}{n}\right)}{\frac{v_n}{n}} = 0$ . Dès lors, par somme et quotient,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{\ln\left(\frac{v_n}{n}\right)}{\frac{v_n}{n}}} = 1$  i.e.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n \ln(n)} = 1 \text{ et donc } v_n \sim n \ln(n).$$