Devoir à la maison n°12

À rendre le mercredi 10 juin 2026

Pour tout entier naturel non nul, on considère l'équation

$$(E_n) : \quad \mathrm{e}^x = x^n$$

Pour ce faire, on introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = 1 - x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

Partie A. — Étude des cas $n = 1$ et $n = 2$

1. Dans cette question, on étudie le cas $n = 1$.

a. Étudier les variations de f_1 sur $[0\,;+\infty[$.
On dressera son tableau de variation en précisant la valeur en 0 et la limite en ∞.

b. Étudier l'existence de racines positives pour les équations (E_1).

2. Reprendre les questions précédentes dans le cas $n = 2$.

Partie B. — Étude du cas $n \geqslant 3$

1. Existence de solutions

Dans cette question, on suppose que n est un entier au moins égal à 3.

a. Montrer que $f_n(n) = 1 - \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ et en déduire que $f_n(n) < 0$.

b. Étudier la fonction f_n sur $[0\,;+\infty[$.
On dressera son tableau de variation en précisant la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.

c. Montrer que l'équation (E_n) admet deux solutions positives u_n et v_n telles que $1 \leqslant u_n < n < v_n$.

2. Étude de la suite (u_n)

a. Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 3$ le signe de $f_{n+1}(u_n)$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

b. Montrer que (u_n) converge.

c. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_n = \exp\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ et en déduire la limite ℓ de la suite (u_n).

d. En utilisant un équivalent usuel, montrer que $u_n - \ell \sim \dfrac{1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Étude de la suite (v_n)

a. Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 3$, le signe de $f_n(v_{n+1})$ et en déduire le sens de variation de la suite (v_n).

b. Déterminer la limite de (v_n).

c. On considère la fonction $g : x \longmapsto x - \ln(x)$ définie sur $[1\,;+\infty[$.
Montrer que g réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ dans $[1\,;+\infty[$.

d. Établir que, pour tout entier $n \geqslant 3$, $g\left(\dfrac{v_n}{n}\right) = \ln(n)$.

e. Montrer à l'aide de la bijection réciproque g^{-1} de g que $\dfrac{v_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

f. Conclure que $v_n \sim n\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.