Devoir à la maison n°1

À rendre le jeudi 24 septembre 2026

Étant donné des nombres entiers a_1, a_2, ..., a_n tels que $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$, on pose

$$]a_1, a_2, ..., a_n[= \cfrac{1+\cfrac{\cdots+\cfrac{1}{a_n}}{\cfrac{\cdots}{a_3}}}{\cfrac{a_2}{a_1}}.$$

Par exemple,

$$]3[= \frac{1}{3} \qquad]1,4[= \cfrac{1+\cfrac{1}{4}}{1} \qquad]2,4,5,6[= \cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1}{6}}{5}}{2}.$$

1. Montrer que l'écriture sous forme de fraction irréductible de $]2,4,5,6[$ est $\dfrac{157}{240}$.

2. Déterminer, de même, les formes irréductibles de $]1,1,3[$ et de $]2,3,3,6[$.

3. Soit un entier $n \geqslant 2$ et a_1, a_2, ..., a_n des entiers tels que $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$. Justifier que

$$]a_1, a_2, ..., a_n[= \frac{1+]a_2, a_3, ..., a_n[}{a_1}.$$

4. **a.** Calculer $]1[$, $]1,1[$, $]1,1,1[$ et $]1,1,1,1[$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Émettre une conjecture sur la valeur de $]1,1,...,1[$ où le nombre 1 est répété n fois.

c. Démontrer la conjecture précédente en raisonnant par récurrence.

5. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse.

a. P_1 : « il existe des entiers a, b et c avec $0 < a \leqslant b \leqslant c$ tels que $]a,b,c[\in \mathbb{N}$ ».

b. P_2 : « pour tous entiers a, b et c avec $0 < a \leqslant b \leqslant c$, on a $]a,b,c[\in \mathbb{N}$ ».

c. P_3 : « pour tous entiers a, b et c avec $0 < a \leqslant b \leqslant c$, on a $]a,b,c[\in \mathbb{Q}$ ».

6. On s'intéresse à la proposition P_4 suivante :

$$P_4 \ : \ \text{« il existe des entiers } a \text{ et } b \text{ avec } 1 < a \leqslant b \text{ tels que }]a,b[\in \mathbb{N} \text{ »}.$$

a. Soit a et b deux entiers tels que $1 < a \leqslant b$. Montrer que $]a,b[= \dfrac{b+1}{ab}$.

b. Soit a et b deux entiers tels que $1 < a \leqslant b$. Justifier que $]a,b[> 0$.

c. Soit a un entier au moins égal à 2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $an > n+1$.

d. En déduire que P_4 est fausse.

Solution.

1. Par définition,

$$]2,4,5,6[= \frac{1+\dfrac{1+\dfrac{1}{6}}{5}}{4} = \frac{1+\dfrac{\frac{7}{6}}{5}}{4} = \frac{1+\frac{7}{6}\times\frac{1}{5}}{4}$$
$$= \frac{1+\dfrac{\frac{7}{30}}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\frac{37}{30}}{4}}{2} = \frac{1+\frac{37}{30}\times\frac{1}{4}}{2} = \frac{1+\frac{37}{120}}{2}$$
$$= \frac{\frac{157}{120}}{2} = \frac{157}{120}\times\frac{1}{2}$$

donc $\boxed{]2,4,5,6[= \frac{157}{240}}$.

2. De même,

$$]1,1,3[= \frac{1+\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1}}{1} = \frac{1+\frac{\frac{4}{3}}{1}}{1} = \frac{1+\frac{4}{3}}{1} = \frac{\frac{7}{3}}{1}$$

donc $\boxed{]1,1,3[= \frac{7}{3}}$ et

$$]2,3,3,6[= \frac{1+\dfrac{1+\dfrac{1+\frac{1}{6}}{3}}{3}}{2} = \frac{1+\dfrac{\frac{7}{6}}{3}}{2} = \frac{1+\frac{\frac{7}{18}}{3}}{2} = \frac{1+\frac{\frac{25}{18}}{3}}{2}$$
$$= \frac{1+\frac{25}{54}}{2} = \frac{\frac{79}{54}}{2}$$

soit $\boxed{]2,3,3,6[= \frac{79}{108}}$.

3. Par définition,

$$]a_2,a_3,\ldots,a_n[= \cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}{a_2}$$

donc

$$\frac{1+]a_2,a_3,\ldots,a_n[}{a_1} = \cfrac{1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}{a_2}}{a_1}$$

i.e. $\boxed{\dfrac{1+]a_2,a_3,\ldots,a_n[}{a_1} =]a_1,a_2,\ldots,a_n[}$.

4. a. Par définition,

- $]1[= \dfrac{1}{1}$ i.e. $\boxed{]1[= 1}$,
- $]1,1[= \dfrac{1+\dfrac{1}{1}}{1} = \dfrac{2}{1}$ c'est-à-dire $\boxed{]1,1[= 2}$,
- $]1,1,1[= \dfrac{1+\dfrac{1+\dfrac{1}{1}}{1}}{1} = \dfrac{1+\dfrac{2}{1}}{1} = \dfrac{3}{1}$ i.e. $\boxed{]1,1,1[= 3}$;
- $]1,1,1,1[= \dfrac{1+\dfrac{1+\dfrac{1+\dfrac{1}{1}}{1}}{1}}{1} = \dfrac{1+\dfrac{1+\dfrac{2}{1}}{1}}{1} = \dfrac{1+\dfrac{3}{1}}{1} = \dfrac{4}{1}$ i.e. $\boxed{]1,1,1,1[= 4}$.

b. On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $]\underbrace{1,1,...,1}_{n \text{ fois}}[= n$.

c. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $]\underbrace{1,1,...,1}_{n \text{ fois}}[= n$ ».

- **Initialisation.** On a vu que $]1[= 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $]\underbrace{1,1,...,1}_{n \text{ fois}}[= n$. Or, d'après le résultat de la question **3.**,

$$]\underbrace{1,1,...,1}_{n+1 \text{ fois}}[= \frac{1+]\underbrace{1,1,...,1}_{n \text{ fois}}[}{1}$$

donc

$$]\underbrace{1,1,...,1}_{n+1 \text{ fois}}[= \frac{1+n}{1} = n+1$$

et ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion**. Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ ]\underbrace{1,1,...,1}_{n \text{ fois}}[= n}.$$

5. a. La proposition P_1 est vraie comme le montre l'exemple témoin $a = b = c = 1$. En effet, d'après la question précédent, $]1,1,1[= 3$ donc $]1,1,1[\in \mathbb{N}$.

b. La proposition P_2 est fausse comme le montre le contre-exemple $a = 1$, $b = 1$ et $c = 3$ puisqu'on a vu en question **2.** que $]1,1,3[= \dfrac{7}{3} \notin \mathbb{N}$.

c. La proposition P_3 est vraie. En effet, considérons trois entiers a, b et c tels que $0 < a \leqslant b \leqslant c$. Alors, par définition,

$$]a,b,c[= \frac{1+\dfrac{1+\dfrac{1}{c}}{b}}{a} = \frac{1+\dfrac{\dfrac{c+1}{c}}{b}}{a} = \frac{1+\dfrac{c+1}{bc}}{a} = \frac{bc+c+1}{bc}a = \frac{bc+c+1}{abc}.$$

Or, comme a, b et c sont des entiers naturels non nuls, $bc+c+1$ est un entier et abc est un entier naturel non nul donc $]a,b,c[$ est un rationnel.

6. a. Par définition,

$$]a,b[= \frac{1+\frac{1}{b}}{a} = \frac{\frac{b+1}{b}}{a} = \frac{b+1}{b} \times \frac{1}{a}$$

donc $\boxed{]a,b[= \frac{b+1}{ab}}$.

b. Comme $a > 0$ et $b > 0$, $b+1 > 0$ et $ab > 0$ donc, par quotient, $\frac{b+1}{ab} > 0$ i.e. $\boxed{]a,b[> 0}$.

c. Soit un entier $n \geqslant 2$. Alors, comme $n \geqslant 2$, $n-1 \leqslant 1$ donc, en multipliant par $a > 0$, $a(n-1) \leqslant a$. Or, par hypothèse, $a > 1$ donc $a(n-1) > 1$ i.e. $an - n > 1$ soit finalement $\boxed{an > n+1}$.

d. Soit a et b deux entiers tels que $1 < a < b$. Alors, d'après la question **b.**, $]a,b[> 0$. De plus, comme $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$, d'après la question **c.**, $ab > b+1$ donc, en divisant par $ab > 0$, $1 > \frac{b+1}{ab}$ i.e. $1 >]a,b[$. Ainsi, $0 <]a,b[< 1$. Or, il n'y a pas d'entier strictement compris entre 0 et 1 donc $]a,b[\notin \mathbb{N}$. Ainsi, $\underline{P_4 \text{ est fausse}}$.