

Devoir à la maison n°1

À rendre le jeudi 24 septembre 2026

Consignes à respecter :

- le devoir doit être rédigé sur des copies doubles numérotées et insérées les unes dans les autres ;
- vous pouvez travailler et rendre une copie pour 2 mais, dans ce cas, la copie doit contenir vos deux écritures (environ) à parts égales ;
- les copies doivent être propres, lisibles et bien rédigés. Toute copie contenant plus de 5 ratures ou plus de 5 fautes d'orthographe ou dans laquelle les résultats ne sont ni soulignés ni encadrés est susceptible de ne pas être corrigée.

Étant donné des nombres entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, on pose

$$]a_1, a_2, \dots, a_n[= \frac{1 + \frac{1 + \frac{1 + \frac{1}{a_n}}{a_3}}{a_2}}{a_1}.$$

Par exemple,

$$]3[= \frac{1}{3} \quad]1, 4[= \frac{1 + \frac{1}{4}}{1} \quad]2, 4, 5, 6[= \frac{1 + \frac{1 + \frac{1}{6}}{5}}{2}.$$

1. Montrer que l'écriture sous forme de fraction irréductible de $]2, 4, 5, 6[$ est $\frac{157}{240}$.
2. Déterminer, de même, les formes irréductibles de $]1, 1, 3[$ et de $]2, 3, 3, 6[$.
3. Soit un entier $n \geq 2$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers tels que $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Justifier que

$$]a_1, a_2, \dots, a_n[= \frac{1 +]a_2, a_3, \dots, a_n[}{a_1}.$$

4. a. Calculer $]1[$, $]1, 1[$, $]1, 1, 1[$ et $]1, 1, 1, 1[$.
 b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Émettre une conjecture sur la valeur de $]1, 1, \dots, 1[$ où le nombre 1 est répété n fois.
 c. Démontrer la conjecture précédente en raisonnant par récurrence.

5. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse.
- a. P_1 : « il existe des entiers a , b et c avec $0 < a \leq b \leq c$ tels que $]a, b, c[\in \mathbb{N}$ ».
 - b. P_2 : « pour tous entiers a , b et c avec $0 < a \leq b \leq c$, on a $]a, b, c[\in \mathbb{N}$ ».
 - c. P_3 : « pour tous entiers a , b et c avec $0 < a \leq b \leq c$, on a $]a, b, c[\in \mathbb{Q}$ ».
6. On s'intéresse à la proposition P_4 suivante :

P_4 : « il existe des entiers a et b avec $1 < a \leq b$ tels que $]a, b[\in \mathbb{N}$ ».

- a. Soit a et b deux entiers tels que $1 < a \leq b$. Montrer que $]a, b[= \frac{b+1}{ab}$.
- b. Soit a et b deux entiers tels que $1 < a \leq b$. Justifier que $]a, b[> 0$.
- c. Soit a un entier au moins égal à 2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $an > n + 1$.
- d. En déduire que P_4 est fausse.