Devoir à la maison n°1

À rendre le mercredi 24 septembre 2025

Étant donné un entier relatif a_0 et des entiers naturels non nuls a_1, a_2, ..., a_n, on pose

$$[a_0, a_1, a_2, ..., a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Par exemple, $[3] = 3$, $[-3, 4] = -3 + \dfrac{1}{4}$, $[1, 2, 3] = 1 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}$ et $[0, 7, 3, 1] = 0 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{1}}}$.

1. Écrire sous forme de fractions irréductibles les nombres $[-2, 3, 5]$, $[0, 3, 1, 4]$ et $[1, 2, 3, 4]$.

2. On pose $A = [-5, 2, 3]$ et $B = [-5, 2, 2, 1]$. Comparer A et B.

3. On souhaite écrire le nombre $\dfrac{23}{7}$ sous la forme précédente.

- **a.** Déterminer le plus grand naturel entier a tel qu'il existe un entier $b > 0$ tel que $\dfrac{23}{7} = a + \dfrac{b}{7}$.
- **b.** Déterminer un entier c tel que $\dfrac{7}{b} = c + \dfrac{1}{b}$.
- **c.** Conclure.

4. En justifiant sa réponse, déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

- **a.** P_1 : « il existe un entier a_0 et un entier $a_1 > 0$ tels que $[a_0, a_1] \in \mathbb{Q}$ ».
- **b.** P_2 : « il existe un entier a_0 et un entier $a_1 > 0$ tels que $[a_0, a_1] \in \mathbb{Z}$ ».
- **c.** P_3 : « pour tout entier a_0 et tout entier $a_1 > 0$, $[a_0, a_1] \in \mathbb{Q}$ ».
- **d.** P_4 : « pour tout entier a_0 et tout entier $a_1 > 0$, $[a_0, a_1] \in \mathbb{Z}$ ».

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « pour tous entiers a_0, a_1, ..., a_n tels que $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$, le nombre $[a_0, a_1, ..., a_n]$ est rationnel ».
Démontrer par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. On considère l'implication Q : « pour tous entiers n et m et pour tous réels $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$, si $n = m$ et $x = y$ alors $n + \dfrac{1}{x} = m + \dfrac{1}{y}$ ».

- **a.** La proposition Q est-elle vraie ?
- **b.** Écrire la réciproque de l'implication Q.
- **c.** Démontrer que cette réciproque est vraie.
  Indication. On pourra commencer par montrer, en raisonnant par l'absurde, que $m = n$. Pour cela, on pourra traiter les deux cas $n > m$ et $n < m$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{R}(n)$: « pour tous entiers a_0, b_0, a_1, b_1,..., a_n, b_n tels que $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, ..., $a_n > 0$, $b_n > 0$, si $[a_0, a_1, ..., a_n] = [b_0, b_1, ..., b_n]$ alors $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$ ».
Démontrer par récurrence que la propriété $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Indication. On pourra utiliser le résultat de la question **6.c.**.

Solution.

1. $[-2,3,5] = -2 + \dfrac{1}{3+\frac{1}{5}} = -2 + \dfrac{1}{\frac{15}{5}+\frac{1}{5}} = -2 + \dfrac{1}{\frac{16}{5}} = -2 + \dfrac{5}{16} = \dfrac{-32}{16} + \dfrac{5}{16}$ donc $\boxed{[-2,3,5] = -\dfrac{27}{16}}$.

$[0,3,1,4] = 0 + \dfrac{1}{3+\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}}} = \dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\frac{4}{4}+\frac{1}{4}}} = \dfrac{1}{3+\dfrac{1}{\frac{5}{4}}} = \dfrac{1}{3+\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{\frac{15}{5}+\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{\frac{19}{5}}$ donc $\boxed{[0,3,1,4] = \dfrac{5}{19}}$.

$[1,2,3,4] = 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\frac{1}{4}}} = 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\frac{12}{4}+\frac{1}{4}}} = 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\frac{13}{4}}} = 1+\dfrac{1}{2+\frac{4}{13}} = 1+\dfrac{1}{\frac{26}{13}+\frac{4}{13}}$

$= 1+\dfrac{1}{\frac{30}{13}} = 1+\dfrac{13}{30} = \dfrac{30}{30}+\dfrac{13}{30}$

donc $\boxed{[1,2,3,4] = \dfrac{43}{30}}$.

2. D'une part,

$$A = -5 + \frac{1}{2+\frac{1}{3}}$$

et, d'autre part,

$$B = -5 + \frac{1}{2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{1}}} = -5 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+1}} = -5 + \frac{1}{2+\frac{1}{3}}$$

donc $\boxed{A = B}$.

3. **a.** Remarquons que $\dfrac{23}{7} < \dfrac{24}{7}$ i.e. $\dfrac{24}{7} < 4$ donc, si a est un entier tel qu'il existe $b > 0$ tel que $\dfrac{23}{7} = a + \dfrac{b}{7}$ alors, $a < a + \dfrac{b}{7} < 4$ donc, comme a est entier, $a \leqslant 3$. De plus, $\dfrac{23}{7} - 3 = \dfrac{23-21}{7} = \dfrac{2}{7}$ donc $\dfrac{23}{7} = 3 + \dfrac{2}{7}$. Ainsi, $\boxed{a = 3 \text{ et } b = 2}$.

b. On remarque que $\dfrac{7}{b} = \dfrac{7}{2} = \dfrac{6+1}{2} = 3 + \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{c = 3}$.

c. Ainsi, $\dfrac{23}{7} = 3 + \dfrac{2}{7} = 3 + \dfrac{1}{\frac{7}{2}} = 3 + \dfrac{1}{3+\frac{1}{2}}$ donc $\boxed{\dfrac{23}{7} = [3,3,2]}$.

4. **a.** Si $a_0 = 1$ et $a_1 = 2$ alors $[a_0, a_1] = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ donc $\boxed{P_1 \text{ est vraie.}}$

b. Si $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$ alors $[a_0, a_1] = 1 + \dfrac{1}{1} = 2 \in \mathbb{Z}$ donc $\boxed{P_2 \text{ est vraie.}}$

c. Soit $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_1 \in \mathbb{N}^*$. Alors, $[a_0, a_1] = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ avec $a_0 a_1 + 1 \in \mathbb{Z}$ et $a_1 \in \mathbb{N}^*$ donc $[a_0, a_1] \in \mathbb{Q}$. Ainsi, $\boxed{P_3 \text{ est vraie}}$.

d. On a vu que $[1,2] = \dfrac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ donc $\boxed{P_4 \text{ est fausse}}$.

5. **Initialisation.** Soit $a_0 \in \mathbb{Z}$. Alors, $[a_0] = a_0 \in \mathbb{Q}$ car $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Soit a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1} est entiers avec a_1, a_2, ..., a_{n+1} strictement positifs. Alors, par définition,

$$[a_0, a_1, ..., a_{n+1}] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n+1}}}}}$$

et on peut remarquer que

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n+1}}}} = [a_1, a_2, ..., a_{n+1}].$$

Or, a_1, a_2, ..., a_{n+1} donc des entiers strictement positifs donc, comme $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $[a_1, a_2, ..., a_{n+1}] \in \mathbb{Q}$ et, de plus, $[a_1, a_2, ...a_{n+1}] > 0$. Ainsi, il existe un entier $u > 0$ et un entier $v > 0$ tels que $[a_1, a_2, ..., a_{n+1}] = \dfrac{u}{v}$. Dès lors,

$$[a_0, a_1, ..., a_{n+1}] = a_0 + \frac{1}{\frac{u}{v}} = a_0 + \frac{v}{u} = \frac{a_0 u + v}{u}$$

avec $a_0 u + v \in \mathbb{Z}$ et $u \in \mathbb{N}^*$ donc $[a_0, a_1, ..., a_{n+1}] \in \mathbb{Q}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

6. a. Soit n et m deux entiers *etx* et y deux réels supérieurs ou égaux à 1. Supposons que $n = m$ et $x = y$. Comme $x = y$, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y}$ donc $n + \dfrac{1}{x} = n + \dfrac{1}{y}$. Or, $n = m$ donc $n + \dfrac{1}{y} = m + \dfrac{1}{y}$ et ainsi $n + \dfrac{1}{x} = m + \dfrac{1}{y}$.
On conclut que $\boxed{Q \text{ est vraie}}$.

b. La réciproque de Q est « pour tous entiers n et m et pour tous réels $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$, si $n + \dfrac{1}{x} = m + \dfrac{1}{y}$ alors $n = m$ et $x = y$ ».

c. Soit n et m deux entiers et $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$ deux réels tels que $n + \dfrac{1}{x} = m + \dfrac{1}{y}$.
Supposons par l'absurde que $n \neq m$. Il y a alors deux cas possibles : soit $n > m$ soit $n < m$.
Si $n > m$ alors, comme n et m sont entiers, $n - m \geqslant 1$ donc $n - m + \dfrac{1}{x} \geqslant 1 + \dfrac{1}{x} > 1$ car $x > 0$. Or, comme $n + \dfrac{1}{x} = m + \dfrac{1}{y}$, $n - m + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y}$. Ainsi, $\dfrac{1}{y} > 1$ donc $y < 1$, ce qui est absurde car $y \geqslant 1$.
Si $n < m$ alors, comme n et m sont entiers, $m - n \geqslant 1$ donc $m - n + \dfrac{1}{y} \geqslant 1 + \dfrac{1}{y} > 1$ car $y > 0$. Or, comme $n + \dfrac{1}{x} = m + \dfrac{1}{y}$, $m - n + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x}$. Ainsi, $\dfrac{1}{x} > 1$ donc $x < 1$, ce qui est absurde car $x \geqslant 1$.
Ainsi, dans les deux cas, on aboutit à une absurdité donc $n = m$.
Par suite, comme $n + \dfrac{1}{x} = m + \dfrac{1}{y}$, on en déduit que $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y}$ donc, grâce aux produits en croix, $1 \times y = 1 \times x$ i.e. $x = y$.
On conclut que $n = m$ et $x = y$ donc $\boxed{\text{la réciproque de } Q \text{ est vraie}}$.

7. Initialisation. Soit a_0 et b_0 deux entiers tels que $[a_0] = [b_0]$. Alors, comme $[a_0] = a_0$ et $[b_0] = b_0$, $a_0 = b_0$ donc $\boxed{\mathcal{R}(0) \text{ est vraie}}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{R}(n)$ est vraie. Soit a_0, b_0, a_1, b_1,..., a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1} des entiers tels que $a_1 > 0$, $b_1 > 0$, ..., $a_n > 0$, $b_n > 0$. Supposons que $[a_0, a_1, ..., a_n, a_{n+1}] = [b_0, b_1, ..., b_n, b_{n+1}]$. Alors,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + a_{n+1}}}} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + b_{n+1}}}}$$

avec, comme $a_1 \geqslant 1$, $a_2 > 0$, ..., $a_{n+1} > 0$,

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + a_{n+1}}} \geqslant 1$$

et, comme $b_1 \geqslant 1$, $b_2 > 0$, ..., $b_{n+1} > 0$,

$$b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + b_{n+1}}} \geqslant 1$$

donc, par le résultat de la question **6.c.**,

$$a_0 = b_0 \qquad \text{et} \qquad a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + a_{n+1}}} = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + b_{n+1}}}.$$

Autrement dit, $a_0 = b_0$ et $[a_1, a_2, ..., a_{n+1}] = [b_1, b_2, ..., b_{n+1}]$. Mais, comme $\mathcal{R}(n)$ est vraie, cette dernière égalité implique que $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{n+1} = b_{n+1}$ donc $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que $\underline{\mathcal{R}(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}}$.