Devoir à la maison n°1

À rendre le mercredi 25 septembre 2024

Étant donné deux rationnels $r = \dfrac{a}{b}$ et $s = \dfrac{c}{d}$ écrits sous forme de fractions irréductibles, on définit la médiante de r et s, notée $r \oplus s$, par

$$r \oplus s = \frac{a+c}{b+d}.$$

1. Calculer $r \oplus s$ dans chacun des cas suivants. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

a. $r = \dfrac{3}{5}$ et $s = \dfrac{2}{3}$ **b.** $r = \dfrac{3}{5}$ et $s = \dfrac{1}{3}$ **c.** $r = \dfrac{6}{15}$ et $s = \dfrac{16}{8}$.

2. Montrer que, pour tout rationnel x, $x \oplus x = x$.

3. Soit $r = \dfrac{a}{b}$ et $s = \dfrac{c}{d}$ deux rationnels écrits sous forme de fractions irréductibles.

a. Montrer que $r \oplus s = \dfrac{b}{b+d} \times r + \left(1 - \dfrac{b}{b+d}\right) \times s$.

b. Justifier que $0 < \dfrac{b}{b+d} < 1$.

c. En déduire que si $r < s$ alors $r < r \oplus s < s$.

4. Soit $r = \dfrac{a}{b}$ et $s = \dfrac{c}{d}$ deux rationnels écrits sous forme de fractions irréductibles. On dit que la médiante $r \oplus s$ est simple si la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? (On justifiera sa réponse.)

P_1 : « pour tous rationnels r et s, la médiante $r \oplus s$ est simple ».

5. Soit n et m deux entiers. Montrer que $n \oplus m$ est simple si et seulement si n et m n'ont pas la même parité. (On pourra utiliser un raisonnement pas disjonction des cas).

6. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse.

a. P_2 : « pour tous rationnels x, y et z, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ ».

b. P_3 : « pour tous rationnels x, y et z, $x \times (y \oplus z) = (x \times y) \oplus (x \times z)$ ».

c. P_4 : « pour tous rationnels x et y, $x \oplus y = y \oplus x$ ».

d. P_5 : « pour tous rationnels x et y non nuls, $\dfrac{1}{x} \oplus \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x \oplus y}$ ».

7. En raisonnant par l'absurde, montrer que la proposition suivante est fausse :

P_6 : « il existe un rationnel x tel que, pour tout rationnel y, $x \oplus y = y$ ».

Solution.

1. **a.** $r \oplus s = \dfrac{3}{5} \oplus \dfrac{2}{3} = \dfrac{3+2}{5+3}$ donc $\boxed{r \oplus s = \dfrac{5}{8}}$.

   b. $r \oplus s = \dfrac{3}{5} \oplus \dfrac{1}{3} = \dfrac{3+1}{5+3} = \dfrac{4}{8}$ donc $\boxed{r \oplus s = \dfrac{1}{2}}$.

   c. Pour calculer $r \oplus s$, il faut écrire r et s sous forme de fractions irréductibles : $r = \dfrac{2}{5}$ et $s = \dfrac{2}{1}$. Ainsi, $r \oplus s = \dfrac{2}{5} \oplus \dfrac{2}{1} = \dfrac{2+2}{5+1} = \dfrac{4}{6}$ donc $\boxed{r \oplus s = \dfrac{2}{3}}$.

2. Soit $x \in \mathbb{Q}$. On écrit x sous forme irréductible : $x = \dfrac{a}{b}$. Alors,

$$x \oplus x = \frac{a}{b} \oplus \frac{a}{b} = \frac{a+a}{b+b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = x.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{Q},\ x \oplus x = x}$.

3. **a.** On remarque que

$$\begin{aligned}\frac{b}{b+d} \times r + \left(1 - \frac{b}{b+d}\right) \times s &= \frac{b}{b+d} \times \frac{a}{b} + \left(\frac{b+d}{b+d} - \frac{b}{b+d}\right) \times \frac{c}{d} \\ &= \frac{a}{b+d} + \frac{d}{b+d} \times \frac{c}{d} \\ &= \frac{a}{b+d} + \frac{c}{b+d} \\ &= \frac{a+c}{b+d}\end{aligned}$$

   donc, par définition, $\boxed{r \oplus s = \dfrac{b}{b+d} \times r + \left(1 - \dfrac{b}{b+d}\right) \times s}$.

   b. Par définition, b et d appartiennent à $\mathbb{N}^*$. On en déduit, d'une part, que $b > 0$ et $d > 0$ donc $\dfrac{b}{b+d} > 0$ et, d'autre part, sachant que $d > 0$, $b + d > b$. Dès lors, en divisant par $b + d > 0$, $1 > \dfrac{b}{b+d}$. Ainsi, $\boxed{0 < \dfrac{b}{b+d} < 1}$.

   c. Supposons que $r < s$. Alors, comme $\dfrac{b}{b+d} > 0$, $\dfrac{b}{b+d} r < \dfrac{b}{b+d} s$ et ainsi,

$$\frac{b}{b+d} r + \left(1 - \frac{b}{b+d}\right) s < \frac{b}{b+d} s + \left(1 - \frac{b}{b+d}\right) s = s$$

   donc $r \oplus s < s$.

   De même, comme $\dfrac{b}{b+d} < 1$, $1 - \dfrac{b}{b+d} > 0$ donc $\left(1 - \dfrac{b}{b+d}\right) r < \left(1 - \dfrac{b}{b+d}\right) s$ et ainsi $\dfrac{b}{b+d} r + \left(1 - \dfrac{b}{b+d}\right) s < \dfrac{b}{b+d} r + \left(1 - \dfrac{b}{b+d}\right) s$ c'est-à-dire $r < r \oplus s$.

   Ainsi, on a bien montré que $\boxed{\text{si } r < s \text{ alors } r < r \oplus s < s}$.

4. On a vu à la question **1.b.** que $\dfrac{3}{5} \oplus \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{8}$ qui n'est pas irréductible donc $\dfrac{3}{5} \oplus \dfrac{1}{4}$ n'est pas simple.

   Ainsi, $\boxed{P_1 \text{ est fausse}}$.

5. Distinguons 4 cas.

1er cas. Supposons que n et m sont pairs. Alors, il existe des entiers k et ℓ tels que $n = 2k$ et $m = 2\ell$. Dès lors,

$$n \oplus m = \frac{2k}{1} \oplus \frac{2\ell}{1} = \frac{2k + 2\ell}{2} = \frac{2(k+\ell)}{2}$$

et cette fraction n'est pas irréductible car on peut la simplifier par 2. Ainsi, $m \oplus n$ n'est pas simple.

2e cas. Supposons que n et m sont impairs. Alors, il existe des entiers k et ℓ tels que $n = 2k+1$ et $m = 2\ell + 1$. Dès lors,

$$n \oplus m = \frac{2k+1}{1} \oplus \frac{2\ell+1}{1} = \frac{2k + 2\ell + 2}{2} = \frac{2(k+\ell+1)}{2}$$

et cette fraction n'est pas irréductible car on peut la simplifier par 2. Ainsi, $m \oplus n$ n'est pas simple.

3e cas. Supposons que n est pair et que m est impair. Alors, il existe des entiers k et ℓ tels que $n = 2k$ et $m = 2\ell + 1$. Dès lors,

$$n \oplus m = \frac{2k}{1} \oplus \frac{2\ell+1}{1} = \frac{2k + 2\ell + 1}{2} = \frac{2(k+\ell)+1}{2}$$

et cette fraction est pas irréductible le numérateur est impair donc il n'est pas divisible par 2. Ainsi, $m \oplus n$ est simple.

4e cas. Supposons que n est impair et que m est pair. Alors, il existe des entiers k et ℓ tels que $n = 2k+1$ et $m = 2\ell$. Dès lors,

$$n \oplus m = \frac{2k+1}{1} \oplus \frac{2\ell}{1} = \frac{2k + 2\ell + 1}{2} = \frac{2(k+\ell)+1}{2}$$

et on conclut, comme dans le cas précédent, que $m \oplus n$ est simple.

Conclusion. On conclut que $\boxed{m \oplus n \text{ est simple si et seulement si } m \text{ et } n \text{ ont la même parité}}$.

6. a. $\boxed{P_2 \text{ est fausse}}$ car si $x = 1$, $y = 1$ et $z = 2$ alors,

$$(x \oplus y) \oplus z = (1 \oplus 1) \oplus 2 = 1 \oplus 2 = \frac{1}{1} \oplus \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$$

et

$$x \oplus (y \oplus z) = 1 \oplus (1 \oplus 2) = \frac{1}{1} \oplus \left(\frac{1}{1} \oplus \frac{2}{1}\right) = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} = \frac{4}{4} = 1$$

donc $(x \oplus y) \oplus z \neq (x \oplus y) \oplus z$.

b. $\boxed{P_3 \text{ est fausse}}$ car si $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{2}$ et $z = \frac{1}{3}$ alors,

$$x \times (y \oplus z) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

et

$$(x \times y) \oplus (x \times z) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \oplus \frac{2}{9} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

donc $x \times (y \oplus z) \neq (x \oplus y) \times (x \oplus z)$.

c. $\boxed{P_3 \text{ est vraie}}$ car si on écrit $x = \dfrac{a}{b}$ et $y = \dfrac{c}{d}$ sous forme de fractions irréductibles alors $x \oplus y = \dfrac{a+c}{b+d}$ et $y \oplus x = \dfrac{c+a}{d+b} = \dfrac{a+c}{b+d} = y \oplus x$.

d. $\boxed{P_4 \text{ est vraie}}$ car si on écrit $x = \dfrac{a}{b}$ et $y = \dfrac{b}{d}$ sous forme de fractions irréductibles alors $\dfrac{1}{x} = \dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{1}{y} = \dfrac{d}{b}$ sont écrites sous forme irréductibles donc

$$\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y} = \frac{b}{a} \oplus \frac{d}{c} = \frac{b+d}{a+c} = \frac{1}{\frac{a+c}{b+d}} = \frac{1}{x \oplus y}.$$

7. Supposons que P_6 est vraie. Alors, il existe un rationnel x tel que, pour tout rationnel y, $x \oplus y = y$. Écrivons $x = \dfrac{a}{b}$ sous forme de fraction irréductible. Alors, en prenant $y = 0$, on obtient $\dfrac{a}{b} \oplus \dfrac{0}{1} = \dfrac{0}{1}$ i.e. $\dfrac{a}{b+1} = 0$ donc $a = 0$. Ainsi, $x = \dfrac{0}{b} = 0$. Or, $0 \oplus 1 = \dfrac{0}{1} \oplus \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{2} \neq 1$ ce qui est absurde puisque $x \oplus 1 = 1$ par définition de x.
Ainsi, $\boxed{P_6 \text{ est fausse}}$.