Devoir à la maison n°1

À rendre le mercredi 25 septembre 2024

Étant donné deux rationnels $r = \dfrac{a}{b}$ et $s = \dfrac{c}{d}$ écrits sous forme de fractions irréductibles, on définit la médiante de r et s, notée $r \oplus s$, par

$$r \oplus s = \frac{a+c}{b+d}.$$

1. Calculer $r \oplus s$ dans chacun des cas suivants. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

a. $r = \dfrac{3}{5}$ et $s = \dfrac{2}{3}$ **b.** $r = \dfrac{3}{5}$ et $s = \dfrac{1}{3}$ **c.** $r = \dfrac{6}{15}$ et $s = \dfrac{16}{8}$.

2. Montrer que, pour tout rationnel x, $x \oplus x = x$.

3. Soit $r = \dfrac{a}{b}$ et $s = \dfrac{c}{d}$ deux rationnels écrits sous forme de fractions irréductibles.

a. Montrer que $r \oplus s = \dfrac{b}{b+d} \times r + \left(1 - \dfrac{b}{b+d}\right) \times s$.

b. Justifier que $0 < \dfrac{b}{b+d} < 1$.

c. En déduire que si $r < s$ alors $r < r \oplus s < s$.

4. Soit $r = \dfrac{a}{b}$ et $s = \dfrac{c}{d}$ deux rationnels écrits sous forme de fractions irréductibles. On dit que la médiante $r \oplus s$ est simple si la fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ est irréductible.

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? (On justifiera sa réponse.)

P_1 : « pour tous rationnels r et s, la médiante $r \oplus s$ est simple ».

5. Soit n et m deux entiers. Montrer que $n \oplus m$ est simple si et seulement si n et m n'ont pas la même parité. (On pourra utiliser un raisonnement pas disjonction des cas).

6. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse.

a. P_2 : « pour tous rationnels x, y et z, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ ».

b. P_3 : « pour tous rationnels x, y et z, $x \times (y \oplus z) = (x \times y) \oplus (x \times z)$ ».

c. P_4 : « pour tous rationnels x et y, $x \oplus y = y \oplus x$ ».

d. P_5 : « pour tous rationnels x et y non nuls, $\dfrac{1}{x} \oplus \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x \oplus y}$ ».

7. En raisonnant par l'absurde, montrer que la proposition suivante est fausse :

P_6 : « il existe un rationnel x tel que, pour tout rationnel y, $x \oplus y = y$ ».