Devoir à la maison n°1

À rendre le vendredi 22 septembre 2023

Une fraction égyptienne est une fraction dont le numérateur est 1 et le dénominateur est un entier strictement positif.

Dans l'Égypte antique, les nombres rationnels strictement compris entre 0 et 1 étaient décomposés en somme de fractions égyptiennes ayant toutes des dénominateurs différents afin d'obtenir ce qu'on appelle un développement égyptien. Le nombre de fractions qui apparaissent dans cette somme s'appelle la longueur de ce développement égyptien. Par exemple, $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$ est un développement égyptien de longueur 3 de $\frac{2}{5}$ car $\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$ et, dans cette somme, il y a 3 fractions égyptiennes qui ont bien toutes des dénominateurs différents. En revanche, $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}$ n'est pas un développement égyptien de $\frac{2}{5}$ car, dans cette somme, les fractions n'ont pas toutes des dénominateurs différents.

Si une fraction est déjà sous la forme $\frac{1}{d}$ avec $d \in \mathbb{N}^*$, on considère qu'elle constitue un développement égyptien de longueur de 1 d'elle-même.

On s'intéresse aux propositions suivantes concernant les développements égyptiens :

- Proposition A : « Pour tout rationnel r, si r est strictement compris entre 0 et 1 alors r admet un développement égyptien ».
- Proposition B : « Pour tout rationnel r strictement compris entre 0 et 1, si r admet un développement égyptien alors ce développement est unique ».
- Proposition C : « Pour tout rationnel r, si r est strictement compris entre 0 et 1 alors r admet une infinité de développements égyptiens différents ».

Le but de ce devoir est de déterminer si les propositions précédentes sont vraies ou fausses.

1. a. Justifier que $\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{240}$ est un développement égyptien de $\frac{2}{15}$.

b. On considère deux entiers p et q strictement positifs. Démontrer que

$$\frac{2}{pq}=\frac{1}{p\times\frac{p+q}{2}}+\frac{1}{q\times\frac{p+q}{2}}.$$

c. En déduire un développement égyptien de longueur 2 de $\frac{2}{15}$.

d. Que peut-on en déduire concernant la Proposition B ?

2. On va démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition suivante est vraie :

$\mathcal{P}(n)$: « pour tout entier naturel m compris entre 1 et n, pour tout entier $d > m$, la fraction $\frac{m}{d}$ admet un développement égyptien »

- **a.** Reformuler plus simplement la proposition $\mathcal{P}(1)$ puis démontrer qu'elle est vraie.
- **b.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. On va montrer alors que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  - i. Écrire la proposition $\mathcal{P}(k+1)$.
    Pourquoi suffit-il de montrer que, pour tout entier $d > k+1$, la fraction $\frac{k+1}{d}$ admet un développement égyptien ?
  - ii. Considérons un entier $d > k+1$. On admet qu'il existe un entier $c > 1$ tel que $\frac{1}{c} < \frac{k+1}{d} < \frac{1}{c-1}$. Montrer $\frac{k+1}{d} = \frac{1}{c} + \frac{(k+1)c-d}{dc}$.
  - iii. En utilisant le fait que $\frac{1}{c} < \frac{k+1}{d}$, montrer que avec $0 < (k+1)c - d$ puis, en utilisant le fait que $\frac{k+1}{d} < \frac{1}{c-1}$, montrer que $(k+1)c - d < k+1$.
  - iv. Justifier que $\mathcal{P}(k)$ permet d'affirmer que $\frac{(k+1)c-d}{d}$ admet un développement égyptien.
  - v. En déduire que $\frac{(k+1)c-d}{dc}$ admet un développement égyptien dont tous les dénominateur sont strictement supérieurs à c.
  - vi. Conclure que $\frac{k+1}{d}$ admet un développement égyptien.
- **c.** Conclure la récurrence.
- **d.** Que peut-on en déduire concernant la Proposition A ?

3. **a.** Montrer que, pour tout entier $d > 0$,

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{2d} + \frac{1}{3d} + \frac{1}{6d}.$$

- **b.** Partant du développement égyptien obtenu à la question **1.b.**, utiliser la question précédente pour déterminer un développement égyptien de longueur 4 de $\frac{2}{15}$.
- **c.** Réitérer le procédé pour déterminer un développement égyptien de longueur 6 de $\frac{2}{15}$.

4. On va montrer que la Proposition C est vraie en raisonnant par l'absurde. On suppose donc que la Proposition C est fausse.

- **a.** Écrire la négation de la Proposition C.
- **b.** Quelle est la valeur de vérité de cette négation ?
- **c.** Aboutir à une contradiction.
  Indication. Si un rationnel admet un nombre fini de développements égyptiens, on peut considérer un développement de longueur maximale et s'inspirer de ce qui a été fait à la question **3.**.

Solution.

1. a. D'une part, $\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{240}=\frac{16}{240}+\frac{15}{240}+\frac{1}{240}=\frac{15+16+1}{240}=\frac{32}{240}=\frac{2\times16}{15\times16}=\frac{15}{16}$ et, d'autre part, les trois fractions de la somme sont des fractions égyptiennes ayant des dénominateurs différents donc $\boxed{\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{240} \text{ est bien un développement égyptien de } \frac{2}{15}}$.

b.

$$\begin{aligned}\frac{1}{p\times\frac{p+q}{2}}+\frac{1}{q\times\frac{p+q}{2}} &= \frac{1}{\frac{p(p+q)}{2}}+\frac{1}{\frac{q(p+q)}{2}}\\ &=\frac{2}{p(p+q)}+\frac{2}{q(p+q)}\\ &=\frac{2q}{pq(p+q)}+\frac{2p}{pq(p+q)}\\ &=\frac{2(q+p)}{pq(p+q)}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\frac{1}{p\times\frac{p+q}{2}}+\frac{1}{q\times\frac{p+q}{2}}=\frac{2}{pq}}$.

c. En appliquant l'égalité précédente avec $p=3$ et $q=5$, on obtient

$$\frac{2}{15}=\frac{2}{3\times5}=\frac{1}{3\times\frac{3+5}{2}}+\frac{1}{5\times\frac{3+5}{2}}=\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times4}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}.$$

Comme $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{20}$ sont des fractions égyptiennes ayant des dénominateurs différents, on en déduit que $\boxed{\frac{1}{12}+\frac{1}{20} \text{ est un développement égyptien de longueur 2 de } \frac{2}{15}}$.

d. Ainsi, $\frac{2}{15}$ est un rationnel compris strictement entre 0 et 1 qui admet au moins deux développements égyptiens différents ($\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{240}$ et $\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$) ce qui permet d'affirmer que $\boxed{\text{la Proposition B est fausse}}$.

2. a. La proposition $\mathcal{P}(1)$ est « pour tout entier naturel m compris entre 1 et 1, pour tout entier $d>m$, la fraction $\frac{m}{d}$ admet un développement égyptien ». Or, le seul entier compris entre 1 et 1 est 1 lui-même donc $\mathcal{P}(1)$ peut se réécrire « pour tout entier $d>1$, la fraction $\frac{1}{d}$ admet un développement égyptien ». Cette proposition est vraie puisque, pour tout $d>1$, $\frac{1}{d}$ est son propre développement égyptien.

b. i. La proposition $\mathcal{P}(k+1)$ est « pour tout entier naturel m compris entre 1 et $k+1$, pour tout entier $d>m$, la fraction $\frac{m}{d}$ admet un développement égyptien ».

Si un entier m est compris entre 1 et k alors, comme $\mathcal{P}(k)$ est vraie, pour tout entier $d>m$, la fraction $\frac{m}{d}$ admet un développement égyptien. Ainsi, il suffit de prouver le résultat pour $k+1$.

ii. $\frac{1}{c}+\frac{(k+1)c-d}{dc}=\frac{d}{dc}+\frac{(k+1)c-d}{dc}=\frac{d+(k+1)c-d}{dc}=\frac{(k+1)c}{dc}$ donc $\boxed{\frac{1}{c}+\frac{(k+1)c-d}{dc}=\frac{k+1}{d}}$.

iii. En multipliant $\frac{1}{c}<\frac{k+1}{d}$ par $c>0$, on obtient $1<\frac{c(k+1)}{d}$ puis, en multipliant cette nouvelle inégalité par $d>0$, on obtient $d<(k+1)c$. Ainsi, en soustrayant d, il vient $\boxed{0<(k+1)c-d}$.

De même, en multipliant $\frac{k+1}{d}<\frac{1}{c-1}$ par $c-1>0$, on obtient $\frac{(k+1)(c-1)}{d}<1$ puis, en multipliant cette nouvelle inégalité par $d>0$, on obtient $(k+1)(c-1)<d$. Ainsi, en soustrayant d, il vient $(k+1)c-(k+1)+d<0$ et donc, en ajoutant $k+1$, $\boxed{(k+1)c-d<k+1}$.

iv. D'une part, $(k+1)c-d<k+1$ et $d>k+1$ donc $(k+1)c-d<d$. D'autre part, $(k+1)c-d$ est un entier donc, comme $(k+1)c-d<k+1$, $(k+1)c-d \leqslant k$. Ainsi, comme $\mathcal{P}(k)$ est vraie, $\boxed{\frac{(k+1)c-d}{d} \text{ admet un développement égyptien}}$.

v. On peut donc écrire $\frac{(k+1)c-d}{d}$ sous la forme

$$\frac{(k+1)c-d}{d}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\cdots+\frac{1}{s_p}$$

avec $s_1<s_2<\cdots<s_p$. Dès lors, comme $\frac{(k+1)c-d}{dc}=\frac{1}{c}\times\frac{(k+1)c-d}{d}$, on peut écrire $\frac{(k+1)c-d}{dc}$ sous la forme

$$\frac{1}{c}\times\left(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\cdots+\frac{1}{s_p}\right)=\frac{1}{cs_1}+\frac{1}{cs_2}+\cdots+\frac{1}{cs_p}.$$

De plus, comme $s_1<s_2<\cdots<s_p$ et $c>0$, $cs_1<cs_2<\cdots<cs_p$ donc les dénominateurs sont tous différents et, comme $s_1 \geqslant 2$, $cs_1 \geqslant 2c>c$ donc tous les dénominateurs sont strictement supérieurs à c.

vi. On conclut que

$$\frac{k+1}{d}=\frac{1}{c}+\frac{1}{cs_1}+\frac{1}{cs_2}+\cdots+\frac{1}{cs_p}$$

avec $c<cs_1<cs_2<\cdots<cs_p$ donc $\boxed{\frac{k+1}{d} \text{ admet une développement égyptien}}$.

c. On a montré que $\mathcal{P}(1)$ est vraie et que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ implique $\mathcal{P}(k+1)$ donc, par le principe de récurrence, $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n\in\mathbb{N}^*}$.

d. Considérons un rationnel r compris strictement entre 0 et 1. Alors, il existe un entier $n\geqslant 1$ et un entier $d>n$ tel que $r=\frac{n}{d}$. Comme $\mathcal{P}(n)$ est vraie, r admet donc un développement égyptien. On a ainsi prouvé que $\boxed{\text{la Proposition A est vraie}}$.

3. a. Soit un entier $d>0$. Alors,

$$\frac{1}{2d}+\frac{1}{3d}+\frac{1}{6d}=\frac{3}{6d}+\frac{2}{6d}+\frac{1}{6d}=\frac{3+2+1}{6d}=\frac{6}{6d}$$

donc $\boxed{\frac{1}{2d}+\frac{1}{3d}+\frac{1}{6d}=\frac{1}{d}}$.

b. On a vu en question **1.c.** que $\frac{2}{15}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$. En appliquant le résultat de la question précédent à $d=20$, on obtient $\frac{1}{20}=\frac{1}{40}+\frac{1}{60}+\frac{1}{120}$ et ainsi $\boxed{\frac{2}{15}=\frac{1}{12}+\frac{1}{40}+\frac{1}{60}+\frac{1}{120}}$.

c. On peut recommencer avec $d=120$, ce qui donne $\boxed{\frac{2}{15}=\frac{1}{12}+\frac{1}{40}+\frac{1}{60}+\frac{1}{240}+\frac{1}{360}+\frac{1}{720}}$.

4. a. La négation de la Proposition C est « il existe un rationnel r tel que r soit strictement compris entre 0 et 1 et qui admet un nombre fini de développements égyptiens différents ».

b. Comme on a supposé que la Proposition C est fausse, sa négation est vraie.

c. Soit r un rationnel compris entre 0 et 1 qui admet un nombre fini de développement égyptien. Considérons, parmi tous ces développements de r, un développement de longueur maximale. Appelons k cette longueur. Ainsi, il existe des entiers $0<d_1<d_2<\cdots<d_{k-1}<d_k$ tels que $r=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_k}$. En appliquant le résultat de la question **4.a.** avec $d=d_k$, on a $\frac{1}{d_k}=\frac{1}{2d_k}+\frac{1}{3d_k}+\frac{1}{6d_k}$ avec $d_k<2d_k<3d_k<6d_k$ car $d_k>0$. Ainsi, $r=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_{k-1}}+\frac{1}{2d_k}+\frac{1}{3d_k}+\frac{1}{6d_k}$ et $0<d_1<d_2<\cdots<d_{k-1}<2d_k<3d_k<6d_k$ donc on a obtenu un développement égyptien de r de longueur $k+2>k$ ce qui est contradictoire puisque k est la plus grande longueur possible. Ainsi, $\boxed{\text{la Proposition C est vraie}}$.