Devoir à la maison n°11

À rendre le mercredi 29 avril 2026

On pose $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs. On pourra procéder par récurrence sur n en montrant que, pour tout entier naturel n non nul, le réel u_n est bien défini et strictement positif.

2. Donner la valeur de u_2, puis vérifier que $u_3 = \frac{1}{12}$.

3. a. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. Déduire de la question précédente que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ.

c. Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

4. a. En utilisant seulement la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

b. En utilisant uniquement la question précédente, retrouver le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

5. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{k+1} - v_k = 2(k+1)$.

b. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle arithmétique ? Justifier.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$, montrer que

$$v_n = n(n+1).$$

d. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de u_n en fonction de n puis donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

a. Déterminer des constantes a et b telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k = \frac{a}{k} - \frac{b}{k+1}.$$

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de (S_n) en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « le nombre u_n est bien défini et il est strictement positif ».

• **Initialisation.** Comme $u_1 = \frac{1}{2}$, u_1 est bien défini et est un réel strictement positif donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, u_n est bien défini et est strictement positif donc, comme $n > 0$, u_n et $2(n+1)u_n + 1$ sont bien définis et strictement positifs et ainsi, par quotient, u_{n+1} est bien défini et strictement positif. Dès lors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est bien défini et strictement positif.

2. Par définition,

$$u_2 = \frac{u_1}{2 \times 2 \times u_1 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{4 \times \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

i.e. $\boxed{u_2 = \frac{1}{6}}$ et

$$u_3 = \frac{u_2}{2 \times 3 \times u_2 + 1} = \frac{\frac{1}{6}}{6 \times \frac{1}{6} + 1} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$$

i.e. $\boxed{u_3 = \frac{1}{12}}$

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2(n+1)u_n + 1}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n + 1 \geqslant 0$ et $u_n \geqslant 0$ donc $2(n+1)u_n + 1 \geqslant 1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, il s'ensuit que $\dfrac{1}{2(n+1)u_n + 1} \leqslant 1$ i.e. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$.

b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers une limite } \ell \geqslant 0}$.

c. Supposons par l'absurde que $\ell \neq 0$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell > 0$. Or, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell > 0$, par produit et somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2(n+1)u_n + 1 = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{2(n+1)u_n + 1} = 0$ i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$. On aboutit à une contradiction donc $\boxed{\ell = 0}$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n = 1$ alors $u_1 = \frac{1}{2}$ donc $0 \leqslant u_1 \leqslant \frac{1}{2\times 1}$. Supposons que $n \geqslant 2$. Alors, par définition, $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2nu_{n-1} + 1}$. Or, on a montré que tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont positifs donc $u_n \geqslant 0$ et, d'autre part, comme $1 > 0$, $2nu_{n-1} + 1 \geqslant 2nu_{n-1} > 0$ (car $u_{n-1} > 0$ et $n > 0$) donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{2nu_{n-1} + 1} \leqslant \dfrac{1}{2nu_{n-1}}$. Comme $u_{n-1} > 0$, on en déduit que $\dfrac{u_{n-1}}{2nu_{n-1} + 1} \leqslant \dfrac{u_{n-1}}{2nu_{n-1}}$ i.e. $u_n \leqslant \dfrac{1}{2n}$. Ainsi, on a bien montré que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2n}}$.

b. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, on déduit de la question précédente et du théorème d'encadrement que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et que } \lim u_n = 0}$.

5. a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$v_{k+1} - v_k = \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{2(k+1)u_k + 1}{u_k} - \frac{1}{u_k} = \frac{u_k}{2(k+1)u_k + 1 - 1}u_k = \frac{2(k+1)u_k}{u_k}$$

i.e. $\boxed{v_{k+1} - v_k = 2(k+1)}$.

b. En particulier, $v_1 - v_0 = 2$ et $v_2 - v_1 = 4$ donc $v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$.
Ainsi, $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ n'est pas arithmétique}}$.

c. D'une part,

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - v_k = \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) = \sum_{j=2}^{n} 2j = 2\sum_{j=2}^{n} j = 2\left[\sum_{j=1}^{n} j - 1\right] = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - v_k = n(n+1) - 2.$$

D'autre part, par téléscopage,

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - v_k = v_n - v_1 = v_n - \frac{1}{\frac{1}{2}} = v_n - 2.$$

Ainsi, $v_n - 2 = n(n+1) - 2$ donc $\boxed{v_n = n(n+1)}$.

d. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{u_n} = n(n+1)$ donc $\boxed{u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}}$. Or, $n(n+1) \sim n^2$ donc, par quotient, $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n^2}}$.

6. a. Soit a et b deux réels. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{a}{k} - \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1) - bk}{k(k+1)} = \frac{(a-b)k + a}{k(k+1)}$$

donc, pour que $u_k = \frac{a}{k} - \frac{b}{k+1}$, il suffit que $a - b = 0$ et que $a = 1$ i.e. que $\boxed{a = b = 1}$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

donc, par téléscopage,

$$\boxed{S_n = 1 - \frac{1}{n+1}}.$$

c. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on conclut que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 1}.$$