Devoir à la maison n°11

À rendre le mercredi 29 avril 2026

On pose $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement positifs. On pourra procéder par récurrence sur n en montrant que, pour tout entier naturel n, le réel u_n est bien défini et strictement positif.

2. Donner la valeur de u_2, puis vérifier que $u_3 = \frac{1}{12}$.

3. **a.** Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b. Déduire de la question précédente que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ.

c. Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

4. **a.** En utilisant seulement la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$

b. En utilisant uniquement la question précédente, retrouver le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

5. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{k+1} - v_k = 2(k+1)$.

b. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle arithmétique ? Justifier.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$, montrer que

$$v_n = n(n+1).$$

d. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de u_n en fonction de n puis donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

a. Déterminer des constantes a et b telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k = \frac{a}{k} - \frac{b}{k+1}.$$

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression explicite de (S_n) en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.