Devoir à la maison n°11

À rendre le mercredi 3 septembre 2025

Exercice 1 (Algèbre)**.** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'objet de l'exercice est de proposer deux méthodes pour calculer une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Partie A. Première méthode

On considère trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $a_1 = -1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} = a_n - 1, \quad b_{n+1} = b_n - c_n, \quad c_{n+1} - c_n = 2^n.$$

1. Calculer a_4.

2. Justifier que $c_3 = 7$.

3. Calculer b_2 et b_3.

4. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n en fonction de n.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ en fonction de n et en déduire, pour tout $n \geqslant 2$, l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$.

6. Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (c_{k+1} - c_k) = c_n - c_1.$$

7. Déduire des deux questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = 2^n - 1$.

8. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = (n+1) - 2^n$.

9. On admet qu'il existe trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & u_n & v_n \\ 0 & 1 & w_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Donner les valeurs de u_1, v_1 et w_1.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $A \times A^n$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n$, $v_n = b_n$ et $w_n = c_n$.

11. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de A^n en explicitant ses coefficients en fonction de n.

Partie B. Seconde méthode

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer P^2.
2. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
3. On note $S = PAP$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $S = D + M$.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer D^k en fonction de k.
5. Calculer M^2 et en déduire, pour tout entier $k \geqslant 2$, la matrice M^k.
6. Montrer que $MD = DM$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admet que la formule du binôme de Newton s'applique pour le calcul de $(D + M)^n$. Démontrer que $S^n = D^n + nM$.
8. Exprimer S^n en explicitant ses coefficients en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
9. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PS^nP$.
10. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de A^n en explicitant ses coefficients en fonction de n.

Exercice 2 (Analyse)**.**

Partie 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
   On admet que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ et en déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
5. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
6. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
7. Déterminer la bijection réciproque de f.

Partie 2. Pour tout entier naturel n, on pose, pour tout réel x de $[0\,;1]$,

$$g_n(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-nx}\right) \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** Montrer que, pour tout $x \in [0\,;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$.
   b. En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
   c. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.
2. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel n,

$$I_n = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-n}\right) + n\int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{1 + \mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x.$$

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\int_0^1 x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n^2}.$$

d. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 3 (Probabilités)**.** L'exercice comporte deux parties indépendantes.

Première partie. Alice et Bob organisent un jeu à l'aide du matériel suivant :

— Alice dispose de trois boules rouges et d'une pièce équilibrée ;
— Bob dispose de deux boules vertes et d'une pièce équilibrée ;
— une urne vide est placée entre les deux joueurs.

Le déroulement d'une partie est le suivant :

— chaque joueur lance la pièce autant de fois qu'il possède de boules ;
— pour chaque *PILE* obtenu, il place une de ses boules dans l'urne.

Alice est déclarée gagnante si l'urne contient strictement plus de boules rouges que de boules vertes ; sinon, Bob est déclaré gagnant.

On note X le nombre de boules placées dans l'urne par Alice et Y le nombre de boules placées dans l'urne par Bob. Enfin, on nomme A l'évènement « Alice gagne ».

1. Lors d'une partie, Alice obtient PPF et Bob obtient PF lors des lancers de leur pièce (on a noté P pour *PILE* et F pour *FACE*). Décrire la composition de l'urne, les valeurs de X et de Y et enfin donner le vainqueur de cette partie.

2. Décrire l'évènement « Alice gagne » à l'aide des variables aléatoires X et Y.

3. Reconnaître la loi de X et celle de Y. Rappeler les valeurs de leurs espérances respectives $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{E}(Y)$.

4. Recopier et compléter le tableau suivant, donnant la loi de X :

k	0	1	2	3
$\mathbf{P}(X=k)$	$\frac{1}{8}$	...	...	...

5. Comparer l'espérance de X avec celle de Y. Lequel des deux joueurs semble favorisé ? Expliquer pourquoi.

6. Justifier que la probabilité qu'Alice gagne sachant que Bob n'a obtenu aucun *PILE*, c'est-à-dire $\mathbf{P}_{(Y=0)}(A)$, est égale à $\frac{7}{8}$.

7. En considérant le système complet d'évènements $\{(Y=0),(Y=1),(Y=2)\}$, montrer que $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$.

8. Le jeu est-il équitable ?

9. Sachant qu'Alice a remporté la partie, quelle est la probabilité que Bob n'ait obtenu aucun *PILE* ?

Seconde Partie. Alice et Bob décident de changer la règle du jeu. Ils jouent des manches successives de la façon suivante :

— Alice dispose d'une boule rouge et d'une pièce équilibrée ;
— Bob dispose d'une ou deux boules vertes et d'une pièce truquée, tombant sur *PILE* avec une probabilité $\frac{1}{3}$;
— une urne vide est placée entre les deux joueurs.

Une manche se déroule ainsi :

— Alice lance sa pièce une fois et place sa boule rouge dans l'urne si elle a obtenu *PILE* ;
— Bob lance sa pièce autant de fois qu'il a de boules vertes (une ou deux) et place une boule verte dans l'urne pour chaque *PILE* obtenu.

Si l'urne contient strictement plus de boules rouges que de boules vertes, Alice est déclarée gagnante ; sinon Bob est déclaré gagnant.

À la fin de la manche, on vide l'urne et chaque joueur récupère une boule de sa couleur.

Si Alice a remporté la manche, Bob prend une boule verte supplémentaire pour la manche suivante.

Ainsi, au début de chaque manche, Alice dispose d'une boule rouge. S'il a gagné la manche précédente, Bob dispose d'une seule boule verte et s'il a perdu la manche précédente, Bob dispose de deux boules vertes.

Au début de la première manche, Bob dispose d'une seule boule verte.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n : « Alice remporte la manche n » et $a_n = \mathbf{P}(A_n)$ la probabilité de a_n.

1. Justifier que $a_1 = \dfrac{1}{3}$.

2. Soit n un entier naturel non nul. Expliquer pourquoi $\mathbf{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

3. **a.** On considère un entier non nul n tel qu'Alice a remporté la manche n. Quelle est la probabilité que Bob place deux boules vertes dans l'urne lors de la manche $n+1$?

b. Montrer que $\mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{2}{9}$.

c. En déduire la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_{A_n}(\overline{A_{n+1}})$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le système complet d'évènements $\{A_n, \overline{A_n}\}$, démontrer que

$$a_{n+1} = -\frac{1}{9}a_n + \frac{1}{3}.$$

5. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $x = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{1}{3}$. Pour la suite de l'exercice, on note ℓ sa solution.

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n - \ell$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique.

7. Après avoir calculé u_1, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de u_n en fonction de n.

8. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de a_n en fonction de n.

9. En déduire la limite de (a_n).

FIN DE L'ÉNONCÉ