Devoir à la maison n°11 – Corrigé

Exercice 1 (Analyse)**.** On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in]-1\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x).$$

1. a. Justifier que f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et calculer, pour tout réel $x > -1$, $f'(x)$.

b. Déterminer le sens de variation de f sur $]-1\,;+\infty[$.

c. Calculer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

d. Conclure que f réalise une bijection de $]-1\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

2. On considère, pour tout $a \in]-1\,;1]$, $I_a = \displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. En utilisant une intégration par parties, démontrer que, pour tout réel $a \in]-1\,;1]$,

$$I_a = 2\ln(2) - (1+a)\ln(1+a) + a - 1.$$

b. En déduire la limite de I_a lorsque a tend vers -1.

3. On considère la fonction g définie pour tout réel $x > -1$ par $g(x) = f(x) - x$.

a. Étudier les variations de g sur $]-1\,;+\infty[$.

b. En déduire que, pour tout réel $x > -1$, $g(x) \leqslant 0$ et que $g(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. Montrer que (u_n) est décroissante.

c. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

d. Montrer que $u_{n+1} \sim u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution.

1. a. La fonction f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables et, $\boxed{\text{pour tout réel } x > -1,\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x}}$.

b. Pour tout réel $x > -1$, $x+1 > 0$ donc $f'(x) > 0$. On en déduit donc que la fonction $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-1\,;+\infty[}$.

c. D'une part, $\lim\limits_{x\to -1} x+1 = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty}$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to +\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc, par composition, $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$.

d. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ donc, d'après le théorème de la bijection continue, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de }]-1\,;+\infty[\text{ dans } \mathbb{R}}$.

2. a. Considérons les fonctions $u : x \longmapsto x+1$ et $v=f$ de telle sorte que $u' : x \longmapsto 1$ et $v' : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$ donc, pour tout réel $a \in]-1\,;1]$,

$$\begin{aligned} I_a &= [(x+1)\ln(1+x)]_a^1 - \int_a^1 (x+1)\times\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2)-(a+1)\ln(1+a)-\int_a^1 1\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2)-(1+a)\ln(1+a)-(1-a) \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{I_a = 2\ln(2)-(1+a)\ln(1+a)+a-1}.$$

b. Comme $\lim\limits_{a\to-1} 1+a=0$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{X\to0} X\ln(X)=0$, par composition, $\lim\limits_{a\to-1}(1+a)\ln(1+a)=0$. Dès lors, par somme, $\boxed{\lim\limits_{a\to-1} I_a = 2\ln(2)-2}$.

3. a. La fonction g est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ comme différence de fonctions dérivables et, pour tout réel $x>-1$, $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{1-(1+x)}{1+x}=-\dfrac{x}{1+x}$. Or, pour tout $x>-1$, $1+x>0$ donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $-x$. On en déduit que $g'(x)>0$ si $x\in]-1\,;0[$, $g'(0)=0$ et $g'(x)<0$ si $x\in]0\,;+\infty[$. Par suite, la fonction $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur }]-1\,;0] \text{ et strictement décroissante sur } [0\,;+\infty[}$.

b. Ainsi, g atteint son maximum en $x=0$ et seulement en $x=0$. Or, $g(0)=\ln(1)-0=0$ donc, $\boxed{\text{pour tout réel } x>-1,\ g(x)\leqslant 0 \text{ et, de plus, } g(x)=0 \text{ si et seulement si } x=0}$.

4. a. Considérons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « u_n est bien défini et $0\leqslant u_n\leqslant 1$ ».

• **Initialisation.** Comme $u_0=1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, u_n existe et $0\leqslant u_n\leqslant 1$. Dès lors, $1\leqslant 1+u_n\leqslant 2$ donc, en particulier, $1+u_n>0$ donc $\ln(1+u_n)$ existe i.e. u_{n+1} est bien défini. De plus, par croissance de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$, $\ln(1)\leqslant\ln(1+u_n)\leqslant\ln(2)$ i.e. $0\leqslant u_{n+1}\leqslant\ln(2)$. Or, $\ln(2)\leqslant 1$ donc $0\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion** Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n \text{ est bien défini et } 0\leqslant u_n\leqslant 1}$.

b. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors, $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=g(u_n)$. Or, $u_n\in[0\,;1]$ et on a vu que, pour tout $x\geqslant 0$, $g(x)\leqslant 0$. Ainsi, $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$.

On conclut donc que $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.

c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge vers une limite $\ell\geqslant 0$.

Dès lors, d'une part, $u_{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$ et, d'autre part, comme f est continue sur $]-1\,;+\infty[$, $u_{n+1}=f(u_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(\ell)$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on en déduit que $\ell=f(\ell)$ i.e. $f(\ell)-\ell=0$ soit encore $g(\ell)=0$. On en déduit alors de la question **3.b.** que $\ell=0$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0}$.

d. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\ln(1+u_n) \sim u_n$ i.e. $\boxed{u_{n+1} \sim u_n}$.

Exercice 2 (Algèbre)**.** On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y-2z, x, y). \end{array}$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer le noyau de f. Que peut-on en déduire ?

3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$. Quel est le rang de f ?

4. Justifier que f est bijectif.

5. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

6. Déterminer la matrice B de f^{-1} dans la base canonique.

7. On pose $u = (1,1,1)$, $v = (1,-1,1)$, $w = (4,2,1)$ et $\mathcal{B} = (u,v,w)$.

a. Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ et en déduire la matrice C de f dans $\mathcal{B}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la matrice C_n de $f^{\circ n}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution.

1. La fonction f est une application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même. Soit $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} f(\lambda v_1 + v_2) &= f(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2) \\ &= (2(\lambda x_1 + x_2) + \lambda y_1 + y_2 - 2(\lambda z_1 + z_2), \lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2) \\ &= (\lambda(2x_1 + y_1 - 2z_1) + 2x_2 + y_2 - 2z_2, \lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2) \\ &= \lambda(2x_1 + y_1 - 2z_1, x_1, y_1) + (2x_2 + y_2 - 2z_2, x_2, y_2) \\ &= \lambda f(v_1) + f(v_2) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire.

On conclut donc que $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3}$.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors,

$$(x,y,z) \in \ker f \iff f(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x = 0 \\ yz = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2 \times 0 + 0 - 2z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{\ker f = \{(0,0,0)\}}$. On en déduit que $\boxed{f \text{ est injective}}$.

3. On a $f(1,0,0)=(2,1,0)$, $f(0,1,0)=(1,0,1)$ et $f(0,0,1)=(-2,0,0)$ donc, par théorème, $\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}((2,1,0),(1,0,1),(-2,0,0))$. Considérons 3 réels a et b et c. Alors,

$$\begin{aligned} a(2,1,0)+b(1,0,1)+c(-2,0,0)=(0,0,0) &\iff (2a+b-2c,a,b)=(0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} 2a+b-2c=0 \\ a=0 \\ b=0 \end{cases} \\ &\iff (a,b,c)\in\ker f \\ &\iff (a,b,c)=(0,0,0) \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $((2,1,0),(1,0,1),(-2,0,0))$ est libre et, par conséquent, la famille $\boxed{((2,1,0),(1,0,1),(-2,0,0)) \text{ est une base de } \operatorname{Im} f}$.

On en déduit que $\boxed{\operatorname{rg}(f)=3}$.

4. Comme $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^3$ donc f est surjective. De plus, on a vu que f est injective donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme bijectif de } \mathbb{R}^3}$.

5. On déduit de la question **3.** que $\boxed{A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

6. Par théorème, $B=A^{-1}$. Or, si $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ alors

$$\begin{cases} 2x+y-2z=a \\ x=b \\ y=c \end{cases} \iff \begin{cases} 2b+c-2z=a \\ x=b \\ y=c \end{cases} \iff \begin{cases} x=b \\ y=c \\ z=-\frac{1}{2}a+b+\frac{1}{2}c \end{cases}$$

donc $\boxed{B=A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$.

7. **a.** Soit a, b et c trois réels. Alors,

$$\begin{aligned} au+bv+cw=(0,0,0) &\iff (a+b+4c,a-b+2c,a+b+c)=(0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} a+b+4c=0 & L_1 \\ a-b+2c=0 & L_2 \\ a+b+c=0 & L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a+b+4c=0 & L_1 \\ \quad -2b-2c=0 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ \qquad\quad -3c=0 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases} \end{aligned}$$

On aboutit à un système homogène de Cramer (car il y a trois pivots) donc l'unique solution est $(a,b,c)=(0,0,0)$. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

b. $f(u)=(1,1,1)=u$, $f(v)=(-1,1,-1)=-v$ et $f(w)=(8,4,2)=2w$. Ainsi, $\boxed{C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

c. Par théorème, $C_n = C^n$ donc, comme C est diagonale, $C_n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ i.e.

$\boxed{C_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$.

Exercice 3 (Probabilités)**.** On dispose de 3 dés équilibrés, chacun ayant 4 faces numérotées de 1 à 4. L'un des dés est rouge, un autre est bleu et le dernier est vert.

On lance simultanément les trois dés. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires égales aux nombres obtenus respectivement sur le dé rouge, sur le dé bleu et sur le dé vert.

1. a. Reconnaître la loi commune des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3. Rappeler la valeur de leur espérance.

b. Déterminer la fonction de répartition F de X_1.

2. On pose $Y = X_1 + X_2$.

a. Déterminer l'espérance de Y.

b. Compléter le tableau suivant avec les valeurs de Y et en déduire l'univers image de Y.

dé 1 \ dé 2				

c. Déduire de la question précédente la loi de Y. On présentera les résultats sous forme d'un tableau.

3. On pose $Z = X_1 + X_2 + X_3$.

a. Déterminer l'espérance de Z.

b. Déterminer l'univers image de Z.

c. Démontrer que, pour tout $j \in Z(\Omega)$, $\mathbf{P}(Z = j) = \displaystyle\sum_{k=2}^{8} \mathbf{P}(\{Y = k\} \cap \{X_3 = j - k\})$.

d. Démontrer que $\mathbf{P}(Z = 5) = \dfrac{3}{32}$.

e. Déterminer la probabilité que la somme des valeurs obtenues sur les trois dés soit un multiple de 5.

Solution.

1. a. Les variables X_1, X_2 et X_3 suivent toutes les trois une loi $\mathscr{U}(\llbracket 1,4\rrbracket)$. Par théorème, $\boxed{\mathbf{E}(X_1)=\dfrac{1+4}{2}=\dfrac{5}{2}}$.

b. Soit $x\in\mathbb{R}$. Par définition, $F(x)=P(X\leqslant x)$. Ainsi,

- si $x<1$, $F(x)=0$;
- si $x\in[1\,;2[$, $F(x)=\mathbf{P}(X=1)=\frac{1}{4}$;
- si $x\in[2\,;3[$, $F(x)=\mathbf{P}(X=1)+\mathbf{P}(X=2)=\frac{1}{2}$;
- si $x\in[3\,;4[$, $F(x)=\mathbf{P}(X=1)+\mathbf{P}(X=2)+\mathbf{P}(X=3)=\frac{3}{4}$;
- si $x\geqslant 4$, $F(x)=\mathbf{P}(X=1)+\mathbf{P}(X=2)+\mathbf{P}(X=3)+\mathbf{P}(X=4)=1$.

Ainsi,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad F(x)=\begin{cases}0 & \text{si} x\in\,]-\infty\,;1[\\ \frac{1}{4} & \text{si} x\in[1\,;2[\\ \frac{1}{2} & \text{si} x\in[2\,;3[\\ \frac{3}{4} & \text{si} x\in[3\,;4[\\ 1 & \text{si} x\in[4\,;+\infty[\end{cases}.}$$

2. a. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(Y)=\mathbf{E}(X_1)+\mathbf{E}(X_2)=2\times\dfrac{5}{2}$ donc $\boxed{\mathbf{E}(Y)=5}$.

b.

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

On en déduit que $Y(\Omega)=\llbracket 2,8\rrbracket$.

c. Comme X_1 et X_2 suivent des lois uniformes et que les résultats des dès sont indépendants, les 16 cases du tableau précédent sont équiprobables donc on obtient la loi suivante pour Y :

k	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{P}(Y=k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

3. a. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(Z)=\mathbf{E}(Y+X_3)=\mathbf{E}(Y)+\mathbf{E}(X_3)$ donc $\boxed{\mathbf{E}(Z)=\dfrac{15}{2}}$.

b. Y prend toutes les valeurs entières entre 2 et 8 et X_3 toutes les valeurs entières entre 1 et 4 donc $\boxed{Z(\Omega)=\llbracket 3,12\rrbracket}$.

c. Par propriété $((Y=k)_{k\in\llbracket 2,8\rrbracket})$ est un système complet d'évènements donc, par la formule de probabilités totales, pour tout $j \in Z(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z=j) &= \sum_{k=2}^{8} \mathbf{P}(\{Z=j\} \cap \{Y=k\}) \\
&= \sum_{k=2}^{8} \mathbf{P}(\{Y+X_3=j\} \cap \{Y=k\}) \\
&= \sum_{k=2}^{8} \mathbf{P}(\{k+X_3=j\} \cap \{Y=k\}) \\
&= \sum_{k=2}^{8} \mathbf{P}(\{X_3=j-k\} \cap \{Y=k\})
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } j \in Z(\Omega),\ \mathbf{P}(Z=j) = \sum_{k=2}^{8} \mathbf{P}(\{Y=k\} \cap \{X_3=j-k\})}$.

d. En particulier, pour $j=5$,

$$\mathbf{P}(Z=5) = \sum_{k=2}^{8} \mathbf{P}(\{Y=k\} \cap \{X_3=5-k\}).$$

Or, si $k \geqslant 5$ alors $5-k \leqslant 0$ donc $\{X_3=5-k\} = \varnothing$ donc

$$\mathbf{P}(Z=5) = \sum_{k=2}^{4} \mathbf{P}(\{Y=k\} \cap \{X_3=5-k\}).$$

De plus, les évènements $\{Y=k\}$ et $\{X_3=5-k\}$ sont indépendants car les résultats des 3 dés sont indépendants donc

$$\mathbf{P}(Z=5) = \sum_{k=2}^{4} \mathbf{P}(Y=k)\mathbf{P}(X_3=5-k)$$

donc, comme X_3 suit une loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z=5) = \sum_{k=2}^{4} \left(\mathbf{P}(Y=k) \times \frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{5} \mathbf{P}(Y=k) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{3}{16}\right)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(Z=5) = \frac{3}{32}}$.

e. La somme des trois résultats est un multiple de 5 si et seulement si $Z=5$ ou $Z=10$ donc, comme les évènements $\{Z=5\}$ et $\{Z=10\}$ sont incompatibles, la probabilité cherchée est $\mathbf{P}(Z=5) + \mathbf{P}(Z=10)$.

On a vu précédemment que $\mathbf{P}(Z=5)=\dfrac{3}{32}$. De la même façon,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z=10) &= \sum_{k=2}^{8} \mathbf{P}(\{Y=k\}\cap\{X_3=10-k\}) \\
&= \sum_{k=6}^{8} \mathbf{P}(\{Y=k\})\mathbf{P}(\{X_3=10-k\}) \\
&= \sum_{k=6}^{8} \left(\mathbf{P}(\{Y=k\}) \times \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right) \\
&= \frac{3}{32}
\end{aligned}$$

donc $\mathbf{P}(Z=5)+\mathbf{P}(Z=10)=2\times\dfrac{3}{32}=\dfrac{3}{16}$.

Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité que la somme des trois chiffres soit un multiple de 5 est } \dfrac{3}{16}}$.