Devoir à la maison n°11

À rendre le lundi 2 septembre 2024

Exercice 1 (Analyse)**.** On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in \left]-1\,;+\infty\right[$ par

$$f(x) = \ln(1+x).$$

1. **a.** Justifier que f est dérivable sur $\left]-1\,;+\infty\right[$ et calculer, pour tout réel $x > -1$, $f'(x)$.

b. Déterminer le sens de variation de f sur $\left]-1\,;+\infty\right[$.

c. Calculer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

d. Conclure que f réalise une bijection de $\left]-1\,;+\infty\right[$ dans $\mathbb{R}$.

2. On considère, pour tout $a \in \left]-1\,;1\right]$, $I_a = \displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. En utilisant une intégration par parties, démontrer que, pour tout réel $a \in \left]-1\,;1\right]$,

$$I_a = 2\ln(2) - (1+a)\ln(1+a) + a - 1.$$

b. En déduire la limite de I_a lorsque a tend vers -1.

3. On considère la fonction g définie pour tout réel $x > -1$ par $g(x) = f(x) - x$.

a. Étudier les variations de g sur $\left]-1\,;+\infty\right[$.

b. En déduire que, pour tout réel $x > -1$, $g(x) \leqslant 0$ et que $g(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. Montrer que (u_n) est décroissante.

c. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

d. Montrer que $u_{n+1} \sim u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (Algèbre)**.** On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y-2z, x, y). \end{array}$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer le noyau de f. Que peut-on en déduire ?

3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$. Quel est le rang de f ?

4. Justifier que f est bijectif.

5. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

6. Déterminer la matrice B de f^{-1} dans la base canonique.

7. On pose $u = (1,1,1)$, $v = (1,-1,1)$, $w = (4,2,1)$ et $\mathcal{B} = (u,v,w)$.

a. Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ et en déduire la matrice C de f dans $\mathcal{B}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la matrice C_n de $f^{\circ n}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3 (Probabilités)**.** On dispose de 3 dés équilibrés, chacun ayant 4 faces numérotées de 1 à 4. L'un des dés est rouge, un autre est bleu et le dernier est vert.

On lance simultanément les trois dés. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires égales aux nombres obtenus respectivement sur le dé rouge, sur le dé bleu et sur le dé vert.

1. **a.** Reconnaître la loi commune des variables aléatoires X_1, X_2 et X_3. Rappeler la valeur de leur espérance.

b. Déterminer la fonction de répartition F de X_1.

2. On pose $Y = X_1 + X_2$.

a. Déterminer l'espérance de Y.

b. Compléter le tableau suivant avec les valeurs de Y et en déduire l'univers image de Y.

dé 2 / dé 1				

c. Déduire de la question précédente la loi de Y. On présentera les résultats sous forme d'un tableau.

3. On pose $Z = X_1 + X_2 + X_3$.

a. Déterminer l'espérance de Z.

b. Déterminer l'univers image de Z.

c. Démontrer que, pour tout $j \in Z(\Omega)$, $\mathbf{P}(Z = j) = \sum_{k=2}^{8} \mathbf{P}(\{Y = k\} \cap \{X_3 = j - k\})$.

d. Démontrer que $\mathbf{P}(Z = 5) = \dfrac{3}{32}$.

e. Déterminer la probabilité que la somme des valeurs obtenues sur les trois dés soit un multiple de 5.