Devoir à la maison n°10

À rendre le mercredi 8 avril 2026

Lors d'un tournoi, trois joueurs A, B et C s'affrontent simultanément en plusieurs manches.

Pour chacune de manches disputées, il n'y a qu'un et un seul vainqueur possible.

Les joueurs A et B ont le même niveau et ont chacun une probabilité de gagner une manche disputée égale à $\frac{1}{5}$.

Le premier des trois joueurs qui gagne deux manches consécutives remporte le tournoi.

1. Quelle est la probabilité que le joueur C gagne une manche disputée ?

2. Dans cette question, on note, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, R_i : « le joueur A remporte la partie i ».

- **a.** Déterminer, en justifiant, la probabilité de l'évènement G_A : « Le joueur A remporte le tournoi à l'issue de la seconde manche » puis donner, sans justification cette fois, les probabilités des évènements G_B et G_C définis de façon similaire.
- **b.** Quelle est la probabilité que le tournoi comporte au moins trois manches ?
- **c.** On note T : « Le joueur A remporte le tournoi à l'issue de la troisième manche ». Écrire l'évènement T à l'aide de R_1, R_2 et R_3 (et de leurs complémentaires) et en déduire que $\mathrm{P}(T) = \frac{4}{125}$.
- **d.** Quelle est la probabilité que le joueur C gagne la première manche sachant que le joueur A remporte le tournoi à l'issue de la troisième manche ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (resp. B_n, resp. C_n) l'évènement : « le tournoi n'est pas achevé avant la $n^{\text{ième}}$ manche, la $n^{\text{ième}}$ manche est gagné par le joueur A (resp. le joueur B, resp. le joueur C) et le tournoi continue ».

On note également D_n : « le tournoi est achevé avant la $n^{\text{ième}}$ manche ou lors de la $n^{\text{ième}}$ manche ».

- **a.** Calculer $\mathbf{P}(A_1)$, $\mathbf{P}(B_1)$, $\mathbf{P}(C_1)$, $\mathbf{P}(A_2)$, $\mathbf{P}(B_2)$ et $\mathbf{P}(C_2)$.
- **b.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, que peut-on dire des événements $A_{n+1} \cap A_n$ et $A_{n+1} \cap D_n$?
- **c.** En appliquant la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{5}(\mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}(C_n)).$$

- **d.** Sans justification, donner des égalités similaires pour $\mathbf{P}(B_{n+1})$ et $\mathbf{P}(C_{n+1})$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(A_n) \\ \mathbf{P}(B_n) \\ \mathbf{P}(C_n) \end{pmatrix}$.

- **a.** Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = \frac{1}{5} M X_n$.
- **b.** Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} X_1$.
- **c.** Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.
- **d.** Calculer $D = P^{-1} M P$. On vérifiera en particulier que D est une matrice diagonale.
- **e.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = P D^n P^{-1}$.
- **f.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des expressions explicites de $\mathbf{P}(A_n)$, $\mathbf{P}(B_n)$ et $\mathbf{P}(C_n)$ en fonction de n.
- **g.** Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(D_n)$.

Solution.

1. À chaque manche disputée, il y a un et une seul joueur qui gagne dont la probabilité que le joueur C remporte une manche disputée est $1-\frac{1}{5}\times 2$ c'est-à-dire $\boxed{\frac{3}{5}}$.

2. a. Comme $G_A = R_1 \cap R_2$,

$$\mathbf{P}(G_A) = \mathbf{P}(R_1)\mathbf{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}(G_A) = \frac{1}{25}}$.

De la même façon, $\boxed{\mathbf{P}(G_B) = \frac{1}{25}}$ et $\boxed{\mathbf{P}(G_C) = (\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{25}}$.

b. Comme les évènements G_A, G_B et G_C sont deux à deux incompatibles, la probabilité qu'il y ait un vainqueur à l'issue de la second manche est

$$\mathbf{P}(G_A \cup G_B \cup G_C) = \mathbf{P}(G_A) + \mathbf{P}(G_B) + \mathbf{P}(G_C) = \frac{11}{25}$$

et donc la probabilité que le tournoi comporte au moins 3 manches est

$$\boxed{\mathbf{P}(\overline{G_A \cup G_B \cup G_C}) = 1 - \frac{11}{25} = \frac{14}{25}}.$$

c. On peut écrire $T = \overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3$ donc, par la formule des probabilités composées,

$$\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(\overline{R_1})\mathbf{P}_{\overline{R_1}}(R_2)\mathbf{P}_{\overline{R_1}\cap R_2}(R_3) = 45\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(T) = \frac{4}{125}}$.

d. Notons S : « le joueur C gagne la première partie ». Alors, $T \cap S = S \cap R_2 \cap R_3$ donc, comme précédemment,

$$\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(S)\mathbf{P}_S(R_1)\mathbf{P}_{S\cap R_1}(R_2) = \frac{3}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{3}{125}$$

donc

$$\mathbf{P}(S \mid T) = \frac{\mathbf{P}(T\cap S)}{\mathbf{P}(T)} = \frac{\frac{3}{125}}{\frac{4}{125}}$$

soit $\boxed{\mathbf{P}(S \mid T) = \frac{3}{4}}$.

3. a. Clairement, $A_1 = R_1$ donc $\boxed{\mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{5}}$. De même, $\boxed{\mathbf{P}(B_1) = \frac{1}{5}}$ et $\boxed{\mathbf{P}(C_1) = \frac{3}{5}}$. Avec les notations de la question **2.**, $A_2 = \overline{R_1} \cap R_2$ donc $\mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(\overline{R_1})\mathbf{P}_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{4}{5}\times\frac{1}{5}$ soit $\boxed{\mathbf{P}(A_2) = \frac{4}{25}}$. De la même façon, $\mathbf{P}(B_2) = \frac{4}{5}\times\frac{1}{5}$ donc $\boxed{\mathbf{P}(B_2) = \frac{4}{25}}$ et $\mathbf{P}(C_2) = \frac{2}{5}\times\frac{3}{5}$ donc $\boxed{\mathbf{P}(C_2) = \frac{6}{25}}$.

b. Si le joueur A gagne les parties n et $n+1$, il remporte le tournoi donc celui-ci s'arrête. Ainsi, A_n et A_{n+1} sont incompatibles i.e. $\boxed{A_{n+1}\cap A_n = \varnothing}$. Si le tournoi continue après la partie $n+1$, il ne peut pas s'achever au plus tard à la partie n donc, de même, A_{n+1} et D_n sont incompatibles i.e. $\boxed{A_{n+1}\cap D_n = \varnothing}$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme (A_n, B_n, C_n, D_n) est un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_{n+1}) &= \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbf{P}(B_n)\mathbf{P}_{B_n}(A_{n+1}) + \mathbf{P}(C_n)\mathbf{P}_{C_n}(A_{n+1}) + \mathbf{P}(D_n)\mathbf{P}_{D_n}(A_{n+1})\\ &= \mathbf{P}(A_n)\times 0 + \mathbf{P}(B_n)\times\frac{1}{5} + \mathbf{P}(C_n)\times\frac{1}{5} + \mathbf{P}(D_n\times 0)\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{5}(\mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}(C_n))}$.

d. De même, $\boxed{\mathbf{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{5}(\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(C_n))}$ et $\boxed{\mathbf{P}(C_{n+1}) = \frac{3}{5}(\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(B_n))}$.

4. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(A_{n+1}) \\ \mathbf{P}(B_{n+1}) \\ \mathbf{P}(C_{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(\mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}(C_n)) \\ \frac{1}{5}(\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(C_n)) \\ \frac{3}{5}(\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(B_n)) \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{P}(A_n) \\ \mathbf{P}(B_n) \\ \mathbf{P}(C_n) \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$.

b. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{H}_n$: « $X_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} X_1$ ».

- **Initialisation.** Comme $\frac{1}{5^0} M^0 X_1 = I_3 X_1 = X_1$, $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Alors, d'après la question **a.**,

$$X_{n+1} = \frac{1}{5} M X_n = \frac{1}{5} M \left(\frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} X_1\right) = \frac{1}{5^n} M^n X_1$$

  donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} X_1}.$$

c. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Considérons le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ suivant :

$$(S) \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ -x + y + z = b & L_2 \\ 2y - 3z = c & L_3 \end{cases}.$$

Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ 2y + 2z = b + a & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 2y - 3z = c & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = a & L_1 \\ 2y + 2z = b + a & L_2 \\ -5z = c - (b + a) & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

On obtient ainsi un système échelonné avec 3 pivots donc il s'agit d'un système de Cramer et ainsi P est inversible. De plus,

$$(S) \iff \begin{cases} x + y = a - \frac{1}{5}(a + b - c) \\ y = \frac{1}{2}(b + a) - \frac{1}{5}(a + b - c) \\ z = \frac{1}{5}(a + b - c) \end{cases} \iff \begin{cases} x = -(\frac{3}{10}a + \frac{3}{10}b + \frac{1}{5}c) + \frac{4}{5}a - \frac{1}{5}b + \frac{1}{5}c \\ y = \frac{3}{10}a + \frac{3}{10}b + \frac{1}{5}c \\ z = \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b - \frac{1}{5}c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ y = \frac{3}{10}a + \frac{3}{10}b + \frac{1}{5}c \\ z = \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}b - \frac{1}{5}c \end{cases}$$

donc $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}$.

d. On a

$$\begin{aligned}
P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ est bien une matrice diagonale}}$.

e. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{G}_n$: « $M^n = PD^nP^{-1}$ ».

- **Initialisation.** Comme $M^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $\mathcal{G}_1$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{G}_n$ est vraie. Alors, d'après la question **d.**, $D = P^{-1}MP$ donc $M = PDP^{-1}$. Dès lors,

$$M^{n+1} = M^nM = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^nI_3DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

donc $\mathcal{G}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad M^n = PD^nP^{-1}}.$$

f. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit des questions précédentes que

$$X_n = \frac{1}{5^{n-1}}M^{n-1}X_1 = \frac{1}{5^{n-1}}PD^{n-1}P^{-1}X_1.$$

Or, D est diagonale donc

$$D^{n-1} = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
X_n &= \frac{1}{5^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{25} \\ -\frac{1}{25} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\times 3^n}{25} \\ -\frac{(-2)^{n-1}}{25} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5^{n-1}} \begin{pmatrix} \frac{2\times 3^n - (-2)^{n-1}}{25} \\ \frac{2\times 3^n - (-2)^{n-1}}{25} \\ \frac{4\times 3^n + 3\times(-2)^{n-1}}{25} \end{pmatrix} = \frac{1}{5^{n-1}} \times \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 2\times 3^n - (-2)^{n-1} \\ 2\times 3^n - (-2)^{n-1} \\ 4\times 3^n + 3\times(-2)^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, on conclut que

$$\boxed{\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(B_n) = \frac{2 \times 3^n - (-2)^{n-1}}{5^{n+1}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(C_n) = \frac{4 \times 3^n + 3 \times (-2)^{n-1}}{5^{n+1}}}.$$

g. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme (A_n, B_n, C_n, D_n) est un système complet d'évènements,

$$\mathbf{P}(A_n) + \mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}(C_n) + \mathbf{P}(D_n) = 1$$

donc

$$\mathbf{P}(D_n) = 1 - 2 \times \frac{2 \times 3^n - (-2)^{n-1}}{5^{n+1}} - \frac{4 \times 3^n + 3 \times (-2)^{n-1}}{5^{n+1}}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}(D_n) = 1 - \frac{8 \times 3^n + (-2)^{n-1}}{5^{n+1}}}$.