Devoir à la maison n°10

À rendre le mercredi 8 avril 2026

Lors d'un tournoi, trois joueurs A, B et C s'affrontent simultanément en plusieurs manches.

Pour chacune de manches disputées, il n'y a qu'un et un seul vainqueur possible.

Les joueurs A et B ont le même niveau et ont chacun une probabilité de gagner une manche disputée égale à $\frac{1}{5}$.

Le premier des trois joueurs qui gagne deux manches consécutives remporte le tournoi.

1. Quelle est la probabilité que le joueur C gagne une manche disputée ?

2. Dans cette question, on note, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, R_i : « le joueur A remporte la partie i ».

- **a.** Déterminer, en justifiant, la probabilité de l'évènement G_A : « Le joueur A remporte le tournoi à l'issue de la seconde manche » puis donner, sans justification cette fois, les probabilités des évènements G_B et G_C définis de façon similaire.
- **b.** Quelle est la probabilité que le tournoi comporte au moins trois manches ?
- **c.** On note T : « Le joueur A remporte le tournoi à l'issue de la troisième manche ». Écrire l'évènement T à l'aide de R_1, R_2 et R_3 (et de leurs complémentaires) et en déduire que $\mathrm{P}(T) = \frac{4}{125}$.
- **d.** Quelle est la probabilité que le joueur C gagne la première manche sachant que le joueur A remporte le tournoi à l'issue de la troisième manche ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n (resp. B_n, resp. C_n) l'évènement : « le tournoi n'est pas achevé avant la $n^{\text{ième}}$ manche, la $n^{\text{ième}}$ manche est gagné par le joueur A (resp. le joueur B, resp. le joueur C) et le tournoi continue ».

On note également D_n : « le tournoi est achevé avant la $n^{\text{ième}}$ manche ou lors de la $n^{\text{ième}}$ manche ».

- **a.** Calculer $\mathbf{P}(A_1)$, $\mathbf{P}(B_1)$, $\mathbf{P}(C_1)$, $\mathbf{P}(A_2)$, $\mathbf{P}(B_2)$ et $\mathbf{P}(C_2)$.
- **b.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, que peut-on dire des événements $A_{n+1} \cap A_n$ et $A_{n+1} \cap D_n$?
- **c.** En appliquant la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbf{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{5}(\mathbf{P}(B_n) + \mathbf{P}(C_n)).$$
- **d.** Sans justification, donner des égalités similaires pour $\mathbf{P}(B_{n+1})$ et $\mathbf{P}(C_{n+1})$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(A_n) \\ \mathbf{P}(B_n) \\ \mathbf{P}(C_n) \end{pmatrix}$.

- **a.** Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} = \frac{1}{5} M X_n$.
- **b.** Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \frac{1}{5^{n-1}} M^{n-1} X_1$.
- **c.** Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1}.
- **d.** Calculer $D = P^{-1} M P$. On vérifiera en particulier que D est une matrice diagonale.
- **e.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = P D^n P^{-1}$.
- **f.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des expressions explicites de $\mathbf{P}(A_n)$, $\mathbf{P}(B_n)$ et $\mathbf{P}(C_n)$ en fonction de n.
- **g.** Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(D_n)$.