Devoir à la maison n°10

À rendre le mercredi 28 mai 2025

1. On considère le polynôme $P = X^3 - X^2 - X + 1$.

a. Montrer que -1 est une racine de P. Est-ce une racine multiple ?

b. Factoriser le polynôme P.

c. En déduire l'ensemble des racines de P.

d. Calculer, en justifiant, les limites de $P(x)$ quand x tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$.

e. Étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation complet.

2. On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 - 2x - 1)\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans une repère orthonormé.

a. Calculer l'image de 0 par f.

b. Calculer, en justifiant, les limites de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$.

c. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

d. Dresser le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.

e. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha \in \left[-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right]$ puis justifier que $\alpha < 0$.

f. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_{-1} à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 puis justifier que T_{-1} passe par l'origine O du repère.

g. Soit $a \in \mathbb{R}$ et T_a la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a. Montrer que T_a passe par l'origine O du repère si et seulement si $P(a) = 0$.
En déduire le nombre de tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ qui passent par le point O.

Solution.

1. a. $P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 + = 0$ donc -1 est une racine de P. De plus, $P' = 3X^2 - 2X - 1$ donc $P'(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) - 1 = 4 \neq 0$ donc $\boxed{-1 \text{ est une racine simple de } P}$.

b. Comme -1 est racine de P, il existe des réels a, b et c tels que

$$P = (X - (-1))(aX^2 + bX + c) = P = (X + 1)(aX^2 + bX + c).$$

Or, pour tous réels a, b et c,

$$(X+1)(aX^2+bX+c) = aX^3+bX^2+cX+aX^2+bX+c = aX^3+(a+b)X^2+(b+c)X+c$$

donc

$$P = (X + 1)(aX^2 + bX + c) \iff \begin{cases} a = 1 \\ a + b = -1 \\ b + c = -1 \\ c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Ainsi, $P = (X + 1)(X^2 - 2X + 1)$ soit $\boxed{P = (X + 1)(X - 1)^2}$.

c. On en déduit que, pour tout réel x,

$$P(x) = 0 \iff (x+1)(x-1)^2 = 0 \iff x+1 = 0 \text{ ou } x-1 = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des racines de } P \text{ est } \{-1\,;1\}}$.

d. Comme P est une polynôme, $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty}$.

e. Comme P est un polynôme, P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $P'(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Le discriminant de P' est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 > 0$ donc P' possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 3} = 1.$$

Comme $a = 3 > 0$, on en déduit que P' est positif sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right] \cup [1\,;+\infty[$ et négatif sur $\left[-\frac{1}{3}\,;1\right]$. Dès lors, P est croissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right]$, décroissante sur $\left[-\frac{1}{3}\,;1\right]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.

On aboutit donc au tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
Variation de P	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. a. L'image de 0 par f est $\boxed{f(0) = -1\mathrm{e}^0 = -1}$.

b. Pour tout réel x, $f(x) = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

Comme $x \longmapsto x^2 - 2x - 1$ est un polynôme, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 2x - 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

c. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$f'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^x + (x^2-2x-1)\mathrm{e}^x = (2x-2+x^2-2x-1)\mathrm{e}^x = (x^2-3)\mathrm{e}^x.$$

Or, pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme $x^2 - 3 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$. Comme son coefficient dominant est positif, on en déduit que $x^2 - 3 \geqslant 0$ pour tout $x \in \left]-\infty\,;-\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}\,;+\infty\right]$ et $x^2 - 3 \leqslant 0$ pour tout $x \in \left[-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right]$. Ainsi, $\underline{f'(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\infty\,;-\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}\,;+\infty\right] \text{ et } f'(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \left[-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right]}$.

d. On aboutit au tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation de f	0	$\nearrow$	$(2+2\sqrt{3})\mathrm{e}^{-\sqrt{3}}$	$\searrow$	$(2-2\sqrt{3})\mathrm{e}^{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

e. Sur l'intervalle $\left[-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right]$, f est continue car dérivable et strictement décroissante (car f' est négative et ne s'annule que 2 fois). De plus, $f(-\sqrt{3}) = (2+2\sqrt{3})\mathrm{e}^{-\sqrt{3}} > 0$ car $2+2\sqrt{3} > 0$ et $\mathrm{e}^{-\sqrt{3}} > 0$ et $f(\sqrt{3}) < 0$ car $2-2\sqrt{3} < 0$ et $\mathrm{e}^{\sqrt{3}} > 0$. Ainsi, par le théorème de bijection continue, $\underline{\text{il existe un unique réel } \alpha \in \left[-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right] \text{ tel que } f(\alpha) = 0}$.
De plus, $f(0) = -1 < 0$ donc $f(0) < f(\alpha)$ et ainsi, comme f est strictement décroissante sur $\left[-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right]$, $\boxed{\alpha < 0}$.

f. L'équation réduite de T_{-1} est $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$. Or, $f'(-1) = -2\mathrm{e}^{-1}$ et $f(-1) = 2\mathrm{e}^{-1}$ donc $T_{-1} : y = -2\mathrm{e}^{-1}(x+1) + 2\mathrm{e}^{-1}$ soit encore, en développant, $\boxed{T_{-1} : y = -2\mathrm{e}^{-1}x}$.
En particulier, $0 = -2\mathrm{e}^{-1} \times 0$ donc $y_{\mathrm{O}} = -2\mathrm{e}^{-1}x_{\mathrm{O}}$ et ainsi $\boxed{\mathrm{O} \in T_{-1}}$.

g. De même, l'équation réduite de T_a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Or, $f'(a) = (a^2-3)\mathrm{e}^a$ et $f(a) = (a^2-2a+1)\mathrm{e}^a$ donc $T_a : y = (a^2-3)\mathrm{e}^a(x-a) + (a^2-2a-1)\mathrm{e}^a$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{O} \in T_a &\iff (a^2-3)\mathrm{e}^a(0-a)+(a^2-2a-1)\mathrm{e}^a = 0 \\
&\iff (-a(a^2-3)+a^2-2a-1)\mathrm{e}^a = 0 \\
&\underset{\mathrm{e}^a\neq 0}{\iff} -a(a^2-3)+a^2-2a-1 = 0 \\
&\iff -a^3+a^2+a-1 = 0 \\
&\iff -P(a) = 0
\end{aligned}$$

donc on conclut que $\boxed{\text{O appartient à } T_a \text{ si et seulement si } P(a)=0}$.

h. Or, on a vu en question **1.c.** que les racines de a sont 1 et -1. De plus, $T_{-1} : y = -2\mathrm{e}^{-1}x$ et $T_1 : y = -2\mathrm{e}^1(x-1) - 2\mathrm{e}^x$ donc $T_1 : y = -2\mathrm{e}x$ et ainsi $T_1 \neq T_{-1}$ puisque ces deux droites n'ont pas le même coefficient directeur.
On conclut que $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ possède exactement deux tangentes passant par O}}$.