Devoir à la maison n°10

À rendre le mercredi 5 juin 2024

Solution.

1. a. La matrice M est $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

Considérons le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x+y+z+t=0 & L_1 \\ x+t=0 & L_2 \\ -y+z+2t=0 & L_3 \\ z+t=0 & L_4 \end{cases}.$$

Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 & L_1 \\ \quad -y-z \qquad =0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -y+z+2t=0 & L_3 \\ \qquad z+t=0 & L_4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 & L_1 \\ \quad -y-z \qquad =0 & L_2 \\ \qquad 2z+2t=0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \qquad z+t=0 & L_4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z+t=0 & L_1 \\ \quad -y-z \qquad =0 & L_2 \\ \qquad 2z+2t=0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \qquad 0=0 & L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_3 \end{cases}$$

Le système échelonné contient 3 pivots le rang de (S) est 3. On en déduit que $\boxed{\mathrm{rg}(M) = 3}$.

b. Par propriété, on en déduit que $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = 3$ i.e., par définition, $\dim(\mathbf{Vect}(\mathcal{F})) = 3$. Ainsi, $\boxed{\dim(F) = 3}$.

c. On remarque que $v_4 = v_1 - v_2 + v_3$ donc $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$. Ainsi, $\mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3) = \dim(F) = 3$ donc, comme (v_1, v_2, v_3) contient 3 vecteur, $\boxed{(v_1, v_2, v_3) \text{ est une base de } F}$.

2. a. On remarque que

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y - z + 2t\} \\ &= \{(y-z+2t, y, z, t) \mid (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{y(1,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + t(2,0,0,1) \mid (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) \end{aligned}$$

en posant $e_1 = (1,1,0,0)$, $e_2 = (-1,0,1,0)$ et $e_3 = (2,0,0,1)$.

Ainsi, $\boxed{G \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$ et, de plus, comme $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$, la famille $\boxed{\mathcal{G} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une famille génératrice de } G}$.

b. Comme $1-1+0-2\times 0=0$, $v_1 \in G$. De même, $1-0+(-1)-2\times 0=0$ donc $v_2 \in G$. Enfin, $1-0+1-2\times 1=0$ donc $v_3 \in G$. Ainsi, comme G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) \subset G$ i.e. $\boxed{F \subset G}$.
On en déduit, par propriété que $\dim(F) \leqslant \dim(G)$. Or, $\dim(F)=3$ et, comme G admet une famille génératrice composée de 3 vecteurs, $\dim(G) \leqslant 3$. Ainsi, $3 = \dim(F) \leqslant \dim(G) \leqslant 3$ donc $\dim(F) = \dim(G) = 3$.
Comme $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, on conclut que $\boxed{F = G}$.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $]1\,;+\infty[$ par

$$f_n(x) = n\ln(x) + \ln(x-1).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Déterminer le sens de variation de f_n sur $]1\,;+\infty[$.

b. Déterminer les limites de f_n en 1 et en $+\infty$.

c. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha_n \in\,]1\,;+\infty[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

2. On se propose dans cette question d'étudier la suite (α_n).

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n)$.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ puis que la suite (α_n) est décroissante.

b. Justifier que (α_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

c. En raisonnant par l'absurde, démontrer que $\ell = 1$.

Solution.

1. a. La fonction f_n est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ comme composée et combinaison linéaire de fonctions dérivables et, pour tout réel $x > 1$,

$$f_n'(x) = n \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{n}{x} + \frac{1}{x-1}.$$

Or, pour tout réel $x > 1$, $\dfrac{n}{x} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x-1} > 0$ donc $f_n(x) > 0$.

Ainsi, $\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur }]1\,;+\infty[}$.

b. D'une part, comme ln est continue en 1, $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 1} n\ln(x) = 0$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1 = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln(X) = -\infty$ donc, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x-1) = -\infty$. Par somme, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x) = -\infty}$.
De même, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, si $n > 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} n\ln(x) = +\infty$. En revanche, si $n = 0$ alors, pour tout $x > 1$, $n\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} n\ln(x) = 0$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to +\infty} x-1 = ++\infty$ et $\lim\limits_{xXto} \ln(X) = +\infty$ donc, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x-1) = +\infty$. Dans tous les cas, par somme, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f_n(x) = +\infty}$.

c. La fonction f_n est dérivable (car continue) et strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$ donc, par le théorème de la bijection continue, elle réalise une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur $]1\,;+\infty[\, = \mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\text{il existe un unique réel } \alpha_n \in\,]1\,;+\infty[\text{ tel que } f_n(\alpha_n) = 0}$.

2. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition,

$$f_{n+1}(\alpha_n) = (n+1)\ln(\alpha_n)+\ln(\alpha_n-1) = n\ln(\alpha_n)+\ln(\alpha_n-1)+\ln(\alpha_n) = f_n(\alpha_n)+\ln(\alpha_n).$$

Or, par définition, $f_n(\alpha_n) = 0$ donc $\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n)}$.
Par définition, $\alpha_n > 1$ donc, par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(\alpha_n) > \ln(1)$ i.e. $\ln(\alpha_n) > 0$. Ainsi, on déduit de la question précédente que $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$. Or, par définition, $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ donc $\boxed{f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})}$.
D'après les résultats de la question **1.**, la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$ donc, comme $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$, $\alpha_n > \alpha_{n+1}$.
Ainsi, on conclut que $\boxed{(\alpha_n) \text{ est décroissante}}$.

b. La suite (α_n) est décroissante et minorée par 1 par définition, donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(\alpha_n) \text{ converge}}$.

c. Comme (α_n) est minorée par 1, $\ell \geqslant 1$. Supposons que $\ell \neq 1$. Alors, $\ell > 1$. Par définition, $f_n(\alpha_n) = 0$ donc $\ln(\alpha_n - 1) = -n\ln(\alpha_n)$. Comme $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 1$ et comme ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(\alpha_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell) > 0$. Par produit, on en déduit que $-n\ln(\alpha_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ i.e. $\ln(\alpha_n - 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. Or, $\alpha_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - 1$ et $\ell - 1 > 0$ car $\ell > 1$ donc, toujours par continuité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(\alpha_n - 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell - 1)$. On aboutit à une contradiction car, dans une cas, $(\ln(\alpha_n - 1))$ converge et, dans l'autre, elle diverge.
Ainsi, on conclut que $\boxed{\ell = 1}$.