Devoir à la maison n°10

À rendre le mercredi 5 juin 2024

Exercice 1. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$v_1 = (1,1,0,0) \qquad v_2 = (1,0,-1,0) \qquad v_3 = (1,0,1,1) \qquad v_4 = (1,1,2,1).$$

On pose, de plus, $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - 2t = 0\}$.

1. **a.** Écrire la matrice M de la famille $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ puis déterminer le rang de cette matrice.

b. En déduire la dimension de F.

c. Déterminer une base de F.

2. On souhaite montrer que $F = G$.

a. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une famille génératrice.

b. Justifier que $F \subset G$ et en déduire que $F = G$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $]1\,;+\infty[$ par

$$f_n(x) = n\ln(x) + \ln(x-1).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Déterminer le sens de variation de f_n sur $]1\,;+\infty[$.

b. Déterminer les limites de f_n en 1 et en $+\infty$.

c. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha_n \in\,]1\,;+\infty[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

2. On se propose dans cette question d'étudier la suite (α_n).

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n)$.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ puis que la suite (α_n) est décroissante.

b. Justifier que (α_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

c. En raisonnant par l'absurde, démontrer que $\ell = 1$.