Interrogation écrite n°4 – Sujet A

L'utilisation d'une calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de f sur I.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+1}{2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

2. $fx \longmapsto x\,\mathrm{e}^{2x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

3. $f : x \longmapsto (3x+1)^{2025}$ sur $I = \mathbb{R}$.

4. $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

Solution.

1. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{2}(x^2+1)$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{2}(2x)$ i.e. $\boxed{f'(x) = x}$.

2. Pour tout réel x, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{2x} + x \times (2\,\mathrm{e}^{2x})$ i.e. $\boxed{f'(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{2x}}$.

3. Pour tout réel x, $f'(x) = 3 \times 2025(3x+1)^{2024}$ i.e. $\boxed{f'(x) = 6075(3x+1)^{2024}}$.

4. Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

i.e. $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}}$.

Exercice 2. Déterminer les limites, en détaillant, les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) - \frac{1}{x}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{\mathrm{e}^{x}}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)-2}{\ln(x)+1}$.

Solution.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$ donc, par somme, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) - \frac{1}{x} = -\infty}$.

b) $\lim_{x\to -\infty} x+1 = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0^+$ donc, par quotient, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{\mathrm{e}^{x}} = -\infty}$.

c) Pour tout $x > 1$, $\dfrac{\ln(x)-2}{\ln(x)+1} = \dfrac{\ln(x)(1-\frac{2}{\ln(x)})}{\ln(x)(1+\frac{1}{\ln(x)})} = \dfrac{1-\frac{2}{\ln(x)}}{1+\frac{1}{\ln(x)}}$.

Or, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\ln(x)} = 0$ et ainsi, par somme et quotient, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)-2}{\ln(x)+1} = 1}$.

Interrogation écrite n°4 – Sujet B

L'utilisation d'une calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de f sur I.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x^3+1}{3}$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $fx \longmapsto x\,\mathrm{e}^{3x}$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \longmapsto (2x+1)^{2025}$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \longmapsto \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

Solution.

1. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^3+1)$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{3}(3x^2)$ i.e. $\boxed{f'(x) = x^2}$.
2. Pour tout réel x, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{3x} + x \times (3\,\mathrm{e}^{3x})$ i.e. $\boxed{f'(x) = (3x+1)\,\mathrm{e}^{2x}}$.
3. Pour tout réel x, $f'(x) = 2 \times 2025(2x+1)^{2024}$ i.e. $\boxed{f'(x) = 4050(2x+1)^{2024}}$.
4. Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{-\frac{2}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

i.e. $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}}$.

Exercice 2. Déterminer les limites, en détaillant, les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \ln(x)$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{\mathrm{e}^{x}}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)+2}$

Solution.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \tfrac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et donc, par différence, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \tfrac{1}{x} - \ln(x) = +\infty}$.

b) $\lim_{x\to -\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0^+$ donc, par quotient, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{\mathrm{e}^{x}} = +\infty}$.

c) Pour tout $x > 1$, $\dfrac{\ln(x)-1}{\ln(x)+2} = \dfrac{\ln(x)(1-\frac{1}{\ln(x)})}{\ln(x)(1+\frac{2}{\ln(x)})} = \dfrac{1-\frac{1}{\ln(x)}}{1+\frac{2}{\ln(x)}}$.

Or, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \tfrac{1}{\ln(x)} = \lim_{x\to +\infty} \tfrac{2}{\ln(x)} = 0$ et ainsi, par somme et quotient, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)+2} = 1}$.