♦ Chapitre 9. Dénombrement

I. — Ensemble fini et cardinal

1) Définitions

Définition 1

On dit qu'un ensemble est **fini** s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dit qu'un ensemble est **infini**.

Exemple 2. Les ensembles $\{a\}$, $\{1,2,3,4,5,6\}$, $\{0,1\}$, $\varnothing$ sont des ensembles finis. En revanche, les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ sont des ensembles infinis.

Définition 3

Soit E un ensemble fini. Le nombre d'éléments de E s'appelle le **cardinal** de E et se note $\mathrm{Card}(E)$.

Exemple 4. $\mathrm{Card}(\{a\}) = 1$, $\mathrm{Card}(\{1,2,3,4,5,6\}) = 6$, $\mathrm{Card}(\{0,1\}) = 2$, $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.

Définition 5

Dénombrer un ensemble fini, c'est déterminer son cardinal.

2) Exemples de dénombrement

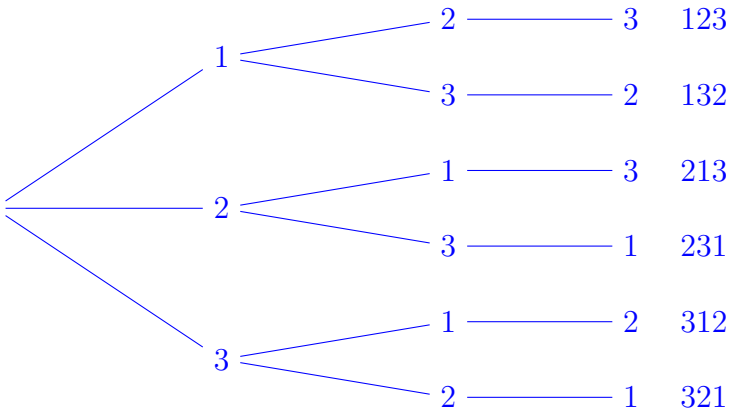
a) À l'aide d'un arbre

Exemple 6. On dispose d'un sac contenant 3 cartons portant respectivement le chiffre 1, le chiffre 2 et le chiffre 3.

On tire successivement et sans remise les trois cartons du sac. On obtient ainsi un nombre à 3 chiffres : par exemple, si on a tiré le carton portant le chiffre 3 puis le carton portant le chiffre 1 puis le carton portant le chiffre 2, on obtient le nombre 312.

Combien de nombres à 3 chiffres peut-on former ainsi ?

Solution. On peut représenter l'ensemble des tirages possibles par l'arbre suivant :

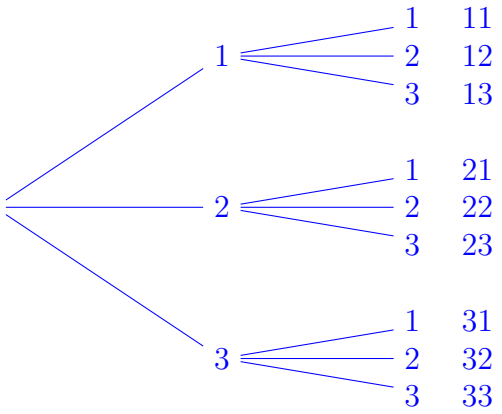


On peut former 6 nombres différents : 123, 132, 213, 231, 312 et 321.

Exemple 7. On considère le même sac que dans l'exemple précédent mais cette fois-ci on tire successivement et avec remise deux cartons dans le sac.

Combien de nombres à 2 chiffres peut-on former ainsi ?

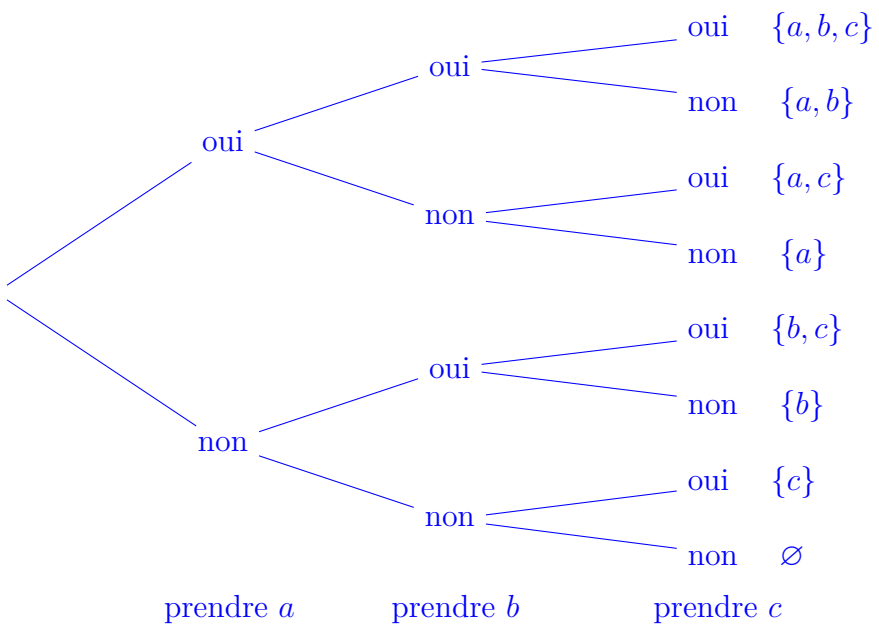
Solution. On peut représenter l'ensemble des tirages possibles par l'arbre suivant :



On peut former 9 nombres différents : 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32 et 33.

Exemple 8. Déterminer le nombre de parties de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$.

Solution. Pour former une partie de E, on peut choisir de prendre ou ne pas prendre a, de prendre ou ne pas prendre b et de prendre ou ne pas prendre c. On peut donc représenter la situation par l'arbre suivant :



Ainsi, il y a 6 parties différentes dans E.

b) À l'aide d'un tableau

Exemple 9. À leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie et 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.

Déterminer le nombre d'étudiants par discipline ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

Solution. On peut représenter la situation par le tableau suivant :

	anglais	allemand	Total
informatique	3		
chimie		6	15
astronomie	8		12
Total		16	

On peut alors compléter ce tableau en utilisant d'abord les nombres totaux d'étudiants en chimie et en astronomie puis les nombres totaux d'étudiants en anglais et en allemand :

	anglais	allemand	Total
informatique	3	6	9
chimie	9	6	15
astronomie	8	4	12
Total	20	16	36

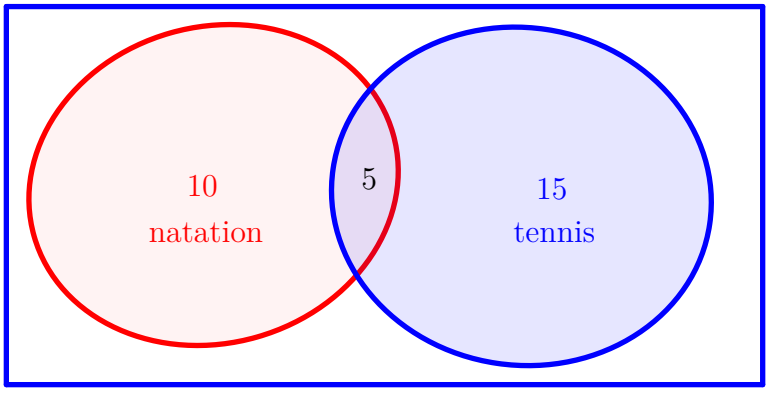
Ainsi, il y a 20 étudiants en anglais, 16 en allemand, 9 en informatique, 15 en chimie, 12 en astronomie et 36 au total.

c) À l'aide d'un diagramme de Venn

Exemple 10. Dans un club de sport, il y a 80 membres. Ceux-ci peuvent pratiquer plusieurs sports dont le tennis et la natation. On sait que 20 membres pratiquent le tennis, 15 membres pratiquent la natation et, parmi les membres précédents, 5 membres pratiquent les deux sports.

Combien de membres pratiquent au moins l'un des deux sports (tennis ou natation) ?

Solution. On peut représenter la situation par le diagramme de Venn suivant :



On en déduit qu'il y a $10 + 5 + 15 = 30$ membres qui pratiquent au moins l'un des deux sports.

II. — Opérations sur les cardinaux

Définition 11

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On dit que A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$.

Exemple 12. Si $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ alors $A = \{a, d\}$ et $B = \{c, e, f\}$ sont disjoints.

Propriété 13. — Principe additif

Soit E un ensemble fini et A et B deux parties de E. Si A et B sont disjoints alors

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Démonstration. Notons $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $B = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ avec $n = \mathrm{Card}(A)$ et $B = \mathrm{Card}(B)$ (i.e. $x_1, x_2, ..., x_n$ sont tous distincts et $y_1, y_2, ..., y_m$ sont tous distincts). Alors, par définition, $A \cup B = \{x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m\}$ et, comme $A \cap B$ sont disjoints, les éléments $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m$ sont tous distincts donc $\mathrm{Card}(A \cup B) = n + m = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$. □

Propriété 14

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E. Alors,

1. $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$
2. $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$

Démonstration.

1. Notons $C = A \setminus B$. Montrons que $A \cup B = C \cup B$. En effet, si $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in B$ alors $x \in C \cup B$. Sinon, $x \notin B$ donc $x \in A \setminus B$ i.e. $x \in C$ et donc $x \in C \cup B$. Ainsi, $A \cup B \subset C \cup B$. Inversement, si $x \in C \cup B$ alors $x \in C$ ou $x \in B$. Si $x \in C$ alors, par définition, $x \in A$ donc $x \in A \cup B$ et si $x \in B$ alors $x \in A \cup B$. Ainsi, $C \cup B \subset A \cup B$ donc, par le principe de double inclusion, $A \cup B = C \cup B$. Dès lors, $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(C \cup B)$ mais, par définition, C et B sont disjoints ($C = A \setminus B = A \cap \overline{B} \subset \overline{B}$) donc, par la propriété précédente, $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(C \cup B) = \mathrm{Card}(C) + \mathrm{Card}(B)$.

   De plus, $A = C \cup (A \cap B)$. En effet, si $x \in A$ alors soit $x \in B$ et alors $x \in A \cap B$ et, soit, $x \notin B$ et alors $x \in C$. Ainsi, $x \in C \cup (A \cap B)$ donc $A \subset C \cup (A \cap B)$. Inversement, si $x \in C \cup (A \cap B)$ alors soit $x \in C$ et alors $x \in A$ soit $x \in A \cap B$ et, là encore, $x \in A$. Ainsi, $C \cup (A \cap B) \subset A$ et, par le principe de double-inclusion, $A = C \cup (A \cap B)$. De plus, C et $A \cap B$ sont disjoints car $C \subset \overline{B}$ et $A \cap B \subset B$. Dès lors, par la propriété précédente, $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(C) + \mathrm{Card}(A \cap B)$ donc $\mathrm{Card}(C) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

   Finalement, on conclut que $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(B)$.
2. D'une part, $A \cup \overline{A} = E$ donc $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(A \cup \overline{A})$ et, d'autre part, A et $\overline{A}$ sont disjoints donc, par la propriété précédente, $\mathrm{Card}(A \cup \overline{A}) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(\overline{A})$.

   Ainsi, $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E)$ donc $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$.

□

Exemple 15.

1. En utilisant la propriété ci-dessus, retrouver le résultat de l'exemple 10.
2. En déduire le nombre de membres du club ne pratiquant ni le tennis ni la natation.

Solution.

1. Notons A l'ensemble des joueurs de tennis et B l'ensemble des nageurs. Alors, $A \cup B$ est l'ensemble des membres qui pratiquent au moins l'un des deux sports. Or,
$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B) = 20 + 15 - 5 = 30$$
donc 30 membres pratiquent au moins l'un des deux sports.
2. L'ensemble des membres ne pratiquant aucun des deux sports est $\overline{A} \cap \overline{B}$. Or, par les lois de de Morgan, $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ donc
$$\mathrm{Card}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 80 - \mathrm{Card}(A \cup B) = 80 - 30 = 50.$$
Ainsi, 50 membres ne pratiquent ni le tennis ni la natation.

Propriété 16. — Principe multiplicatif

Soit E et F deux ensembles finis. Alors, $E \times F$ est un ensemble fini et
$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F).$$

Démonstration. Un élément de $E \times F$ est une paire (a, b) avec $a \in E$ et $b \in F$. Or, il y a $\mathrm{Card}(E)$ choix pour a et $\mathrm{Card}(F)$ choix pour b donc il y a $\mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$ choix pour (a, b). Ainsi,
$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F).$$
□

Exemple 17. Combien y a-t-il de codes formés de 4 chiffres suivis d'une des lettres A ou B ?

Solution. Choisir un tel code revient à choisir une paire (N, L) où N est une suite de 4 chiffres et L est l'une des deux lettres A ou B. Or, il y a 10^4 suites de 4 chiffres (de 0000 à 9 999 donc autant que de nombres entre 0 et 9 999) et 2 choix pour la lettre donc, par le principe multiplicatif, il y a $10^4 \times 2 = 20\,000$ codes possibles.

Propriété 18

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel non nul. Alors, le nombre de listes ordonnées de p éléments de E est
$$\mathrm{Card}(E^p) = n^p.$$

Démonstration. Un élément de E^p est une liste $(a_1, a_2, ..., a_p)$ de p éléments de E. Il y a n choix pour a_1, n choix pour a_2, ..., n choix pour a_p donc il y a en tout n^p choix. Ainsi,$\mathrm{Card}(E^p) = n^p$.
□

Exemple 19. Avec les lettres de l'alphabet français, combien peut-on constituer de mots de 3 lettres ? (On considère tous les mots possibles, qu'ils aient un sens ou non.)

Solution. Il y a 26 lettres dans l'alphabet français. Or, construire un mot de 3 lettres revient à choisir un 3-uplet de cette alphabet : il y a donc $26^3 = 17\,576$ mots de 3 lettres possibles.

Propriété 20

Soit E un ensemble de cardinal fini n. Alors, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Démonstration. Former une partie de E revient à choisir, pour chaque élément de E, si on le prend ou non dans la partie. Pour chaque élément, il y a 2 choix possible (le prendre ou ne pas le prendre) donc il y a au total 2^n parties de E. Ainsi, $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$. □

III. — Arrangements et permutations

Dans toute la suite, n est un entier naturel et E est un ensemble à n éléments.

Définition 21

Soit p un entier naturel inférieur ou égal à n. Un **p-arrangement** de E (ou une **p-liste sans répétition** d'éléments de E) est une liste ordonnée de p éléments distincts de E.

Exemple 22. Si $E = \{a, b, c, d\}$ alors (b, c, a), (a, c, b) et (c, a, b) sont des 3-arrangements de E. En revanche, (a, a, b) n'est pas un arrangement car a est répété 2 fois.

Propriété 23

Soit p un entier naturel inférieur ou égal à n. Le nombre de p-arrangements de E est égal à $n(n-1)\cdots(n-p+1)$.

Démonstration. Pour former un p-arrangement, on a n choix pour le premier élément, $n-1$ choix pour le second (puisqu'il est différent du premier), $n-2$ choix pour le troisième, ... et $n-p+1$ pour le p-ième. Ainsi, par le principe multiplicatif, le nombre de p-arrangements est $n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$. □

Exemple 24. Au départ d'une course, il y a 12 chevaux. En supposant que tous les chevaux franchissent la ligne d'arrivée et qu'il n'y a pas d'ex æquo, combien y a-t-il de tiercés possibles ? de quintés possibles ?

Solution. Un tiercé est un 3-arrangements de l'ensemble des 12 chevaux : il y a en donc $12 \times 11 \times 10 = 1\,320$.

Un quintet est un 5-arrangement de l'ensemble des 12 chevaux : il y a en donc $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95\,040$.

Remarque 25. Le nombre de p-arrangements de E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Définition 26

Une **permutation** de E est un n-arrangement de E. Autrement dit, une permutation de E est une liste ordonnée contenant tous les éléments de E une fois et une seule.

Propriété 27

Le nombre de permutations de E est $n!$.

Démonstration. Par définition, une permutation est un n-arrangement de l'ensemble des n éléments de E : il y en a donc $n(n-1)\cdots(n-n+1) = n(n-1)\cdots 1 = n!$. □

Exemple 28. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « FRAISE ».

Solution. Comme toutes les lettres du mot FRAISE sont différentes, il y a autant d'anagrammes de FRAISE que de permutations de l'ensemble $\{\mathrm{F}, \mathrm{R}, \mathrm{A}, \mathrm{I}, \mathrm{S}, \mathrm{E}\}$. Ainsi, il y a $5! = 120$ anagrammes du mot FRAISE.

IV. — Combinaisons

Définition 29

Soit p un entier naturel inférieur ou égal à n. Une **p-combinaison** de E est une partie de E à p éléments.

Exemple 30. Si $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ alors $F = \{c\}$ est une 1-combinaison de E et $G = \{a\,;c\,;d\}$ est une 3-combinaison E.

Exemple 31. Déterminer le nombre de 3-combinaisons de l'ensemble $\{a\,;b\,;c\,;d\}$.

Solution. Les parties à 3 éléments de $\{a\,;b\,;c\,;d\}$ sont $\{a\,;b\,;c\}$, $\{a\,;b\,;d\}$, $\{a\,;c\,;d\}$ et $\{b\,;c\,;d\}$ donc il y a 4 3-combinaisons de $\{a\,;b\,;c\,;d\}$.

Théorème 32

Soit p un entier compris entre 0 et n. Le nombre de p-combinaisons de E est égal à

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration. Notons C le nombre de p-combinaisons. On va dénombrer de deux manières différentes les p-arrangements de E.

D'une part, on a vu qu'il y a $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de p éléments de E.

D'autre part, pour déterminer un p-arrangement d'éléments de E, on peut :

- choisir les p éléments qui vont constituer l'arrangement. Cela revient à choisir une p-combinaison de E : il y a donc C choix possibles ;
- une fois ces p éléments choisis, on les ordonne pour former un p-arrangement : il s'agit en fait d'une permutations des p éléments choisis, il y a donc $p!$ façons de faire.

Ainsi, le nombre de p-arrangements est égal à $C \times p!$.

On en déduit que $C \times p! = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ donc $C = \dfrac{n!}{p!(n-p!)} = \dbinom{n}{p}$.

Ainsi, il y a bien $\dbinom{n}{p}$ p-combinaisons d'éléments de E.

□

Remarque 33. Rappel : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ et $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exemple 34.

1. Dans une classe de 30 élèves, on choisit deux délégués provisoires. Combien a-t-il de choix possibles ?
2. On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie. On représente à l'aide d'un arbre toutes les possibilités. Combien y a-t-il de chemins dans cet arbre qui contiennent exactement 3 « *pile* » ?
3. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « ANANAS ».

Solution.

1. Choisir 2 délégués revient à choisir une paire d'élèves : il y a donc $\binom{30}{2} = \frac{30 \times 29}{2} = 435$ façons de choisir les deux délégués.
2. Un chemin dans l'arbre qui contient exactement trois « *pile* » est entièrement déterminer par la place de ces 3 « *pile* ». Cela revient donc à choisir une ensemble de 3 éléments parmi les 10 places possibles. Ainsi, il y a $\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$ chemins contenant exactement 3 « *pile* ».
3. Comme ANANAS contient plusieurs fois les mêmes lettres, une anagramme de ce mot n'est pas une permutation des ces lettres (contrairement à FRAISE). Pour déterminer une anagramme de ce mot, on peut :
   - choisir la place des trois A : il y a $\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$ choix possibles ;
   - choisir les places des deux N dans les 3 places restantes : il y $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$ choix possibles :
   - il n'y a alors plus qu'un seul choix possible pour le S restant.

   Ainsi, le nombre d'anagrammes du mot ANANAS est $20 \times 3 = 60$.

Propriété 35. — Formule du binôme de Newton (Rappel)

Soit a et b deux nombres réels. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. Lorsqu'on développe

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ fois}}$$

on choisit dans chaque parenthèse a ou b. On obtient ainsi une somme de terme de la forme $a^k b^{n-k}$ avec $k \in [\![0, n]\!]$. Or, on forme un tel terme si et seulement si on choisit a dans exactement k parenthèses (et donc b dans les $n-k$ autres) : il y a donc $\binom{n}{k}$ façons d'obtenir $a^k b^{n-k}$ donc le développement contient $\binom{n}{k}$ le terme $a^k b^{n-k}$. On en déduit donc que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

$\square$

Exemple 36. Retrouver le résultat de la propriété 20 à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Solution. Un ensemble à n éléments contient $\binom{n}{0}$ partie vide, $\binom{n}{1}$ parties à 1 élément, $\binom{n}{1}$ parties à 2 éléments, ..., $\binom{n}{n}$ parties à n éléments donc le nombre total de parties d'un ensemble E à n éléments est

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^p 1^{n-p} = (1+1)^n = 2^n.$$