⧫ Chapitre 9. Dénombrement

I. — Ensemble fini et cardinal

1) Définitions

Définition 1

On dit qu'un ensemble est **fini** s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dit qu'un ensemble est **infini**.

Exemple 2. Les ensembles $\{a\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{0, 1\}$, $\varnothing$ sont des ensembles finis. En revanche, les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ sont des ensembles infinis.

Définition 3

Soit E un ensemble fini. Le nombre d'éléments de E s'appelle le **cardinal** de E et se note $\mathrm{Card}(E)$.

Exemple 4. $\mathrm{Card}(\{a\}) = 1$, $\mathrm{Card}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 6$, $\mathrm{Card}(\{0,1\}) = 2$, $\mathrm{Card}(\varnothing) = 0$.

Définition 5

Dénombrer un ensemble fini, c'est déterminer son cardinal.

2) Exemples de dénombrement

a) À l'aide d'un arbre

Exemple 6. On dispose d'un sac contenant 3 cartons portant respectivement le chiffre 1, le chiffre 2 et le chiffre 3.

On tire successivement et sans remise les trois cartons du sac. On obtient ainsi un nombre à 3 chiffres : par exemple, si on a tiré le carton portant le chiffre 3 puis le carton portant le chiffre 1 puis le carton portant le chiffre 2, on obtient le nombre 312.

Combien de nombres à 3 chiffres peut-on former ainsi ?

Exemple 7. On considère le même sac que dans l'exemple précédent mais cette fois-ci on tire successivement et avec remise deux cartons dans le sac.

Combien de nombres à 2 chiffres peut-on former ainsi ?

Exemple 8. Déterminer le nombre de parties de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$.

b) À l'aide d'un tableau

Exemple 9. À leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie et 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.

Déterminer le nombre d'étudiants par discipline ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

c) À l'aide d'un diagramme de Venn

Exemple 10. Dans un club de sport, il y a 80 membres. Ceux-ci peuvent pratiquer plusieurs sports dont le tennis et la natation. On sait que 20 membres pratiquent le tennis, 15 membres pratiquent la natation et, parmi les membres précédents, 5 membres pratiquent les deux sports.

Combien de membres pratiquent au moins l'un des deux sports (tennis ou natation) ?

II. — Opérations sur les cardinaux

Définition 11

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On dit que A et B sont **disjoints** si $A \cap B = \varnothing$.

Exemple 12. Si $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ alors $A = \{a, d\}$ et $B = \{c, e, f\}$ sont disjoints.

Propriété 13. — Principe additif

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Si A et B sont disjoints alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B).$$

Propriété 14

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E. Alors,

1. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$
2. $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$

Exemple 15.

1. En utilisant la propriété ci-dessus, retrouver le résultat de l'exemple 10.
2. En déduire le nombre de membres du club ne pratiquant ni le tennis ni la natation.

Propriété 16. — Principe multiplicatif

Soit E et F deux ensembles finis. Alors, $E \times F$ est un ensemble fini et

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F).$$

Exemple 17. Combien y a-t-il de codes formés de 4 chiffres suivis d'une des lettres A ou B ?

Propriété 18

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel non nul. Alors, le nombre de listes ordonnées de p éléments de E est

$$\text{Card}(E^p) = n^p.$$

Exemple 19. Avec les lettres de l'alphabet français, combien peut-on constituer de mots de 3 lettres ? (On considère tous les mots possibles, qu'ils aient un sens ou non.)

Propriété 20

Soit E un ensemble de cardinal fini n. Alors, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

III. — Arrangements et permutations

Dans toute la suite, n est un entier naturel et E est un ensemble à n éléments.

Définition 21

Soit p un entier naturel inférieur ou égal à n. Un **p-arrangement** de E (ou une **p-liste sans répétition** d'éléments de E) est une liste ordonnée de p éléments distincts de E.

Exemple 22. Si $E = \{a, b, c, d\}$ alors (b, c, a), (a, c, b) et (c, a, b) sont des 3-arrangements de E. En revanche, (a, a, b) n'est pas un arrangement car a est répété 2 fois.

Propriété 23

Soit p un entier naturel inférieur ou égal à n. Le nombre de p-arrangements de E est égal à $n(n-1)\cdots(n-p+1)$.

Exemple 24. Au départ d'une course, il y a 12 chevaux. En supposant que tous les chevaux franchissent la ligne d'arrivée et qu'il n'y a pas d'ex æquo, combien y a-t-il de tiercés possibles ? de quintés possibles ?

Remarque 25. Le nombre de p-arrangements de E est $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Définition 26

Une **permutation** de E est un n-arrangement de E. Autrement dit, une permutation de E est une liste ordonnée contenant tous les éléments de E une fois et une seule.

Propriété 27

Le nombre de permutations de E est $n!$.

Exemple 28. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « FRAISE ».

IV. — Combinaisons

Définition 29

Soit p un entier naturel inférieur ou égal à n. Une p-**combinaison** de E est une partie de E à p éléments.

Exemple 30. Si $E = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ alors $F = \{c\}$ est une 1-combinaison de 1 élément de E et $G = \{a\,;c\,;d\}$ est une 3-combinaison E.

Exemple 31. Déterminer le nombre de 3-combinaisons de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$.

Théorème 32

Soit p un entier compris entre 0 et n. Le nombre de p-combinaisons de E est

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque 33. Rappel : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ et $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exemple 34.

1. Dans une classe de 30 élèves, on choisit deux délégués provisoires. Combien a-t-il de choix possibles ?
2. On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie. On représente à l'aide d'un arbre toutes les possibilités. Combien y a-t-il de chemins dans cet arbre qui contiennent exactement 3 « *pile* » ?
3. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « ANANAS ».

Propriété 35. — Formule du binôme de Newton (Rappel)

Soit a et b deux nombres réels. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 36. Retrouver le résultat du la propriété 20 à l'aide de la formule du binôme de Newton.

V. — Exercices

Exercice 1. On se place dans l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f\}$. Déterminer les cardinaux des ensembles suivants.

1. $A = \{a, b, c, d, e\}$ **2.** $B = \{a, b, f, d\}$ **3.** $A \cup B$ **4.** $A \cap B$

5. $\overline{A} \cap B$ **6.** $C = \{a, b, c, d, a, e, d, f\}$ **7.** $\overline{A \cap \overline{C}}$.

Exercice 2. Dans un sac, on place 4 cartons portant respectivement les lettres R, I, R et E.

1. On tire successivement et sans remise les 4 cartons du sac.
   a. À l'aide d'un arbre, dénombrer les tirages possibles.
   b. Les 4 cartons, dans l'ordre du tirage, forment un mot de 4 lettres. Combien de mots différents peut-on ainsi former ?
2. On tire successivement et avec remise 2 cartons du sac.
   a. À l'aide d'un arbre, dénombrer les tirages possibles.
   b. Combien de tirages donnent un mot qui contient au moins une voyelle ?

Exercice 3. Un club de jeux de société compte 120 adhérents. Parmi ceux-ci, 34 jouent uniquement au Scrabble, 21 uniquement au bridge et 26 uniquement au tarot. De plus, 10 membres jouent au bridge et au tarot mais pas au Scrabble, 9 jouent au tarot et au Scrabble mais pas bridge, 12 jouent au bridge et au Scrabble mais pas au tarot et 4 personnes jouent aux 3 jeux.

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.
2. Déterminer le nombre de membres ne jouant ni au Scrabble, ni au bridge ni au tarot.
3. Déterminer le nombre de personnes qui jouent, entre autres, au Scrabble.

Exercice 4. Dans une entreprise, il y a 800 employés. On sait que 300 employés sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Exercice 5.

1. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E tels que $\text{Card}(A) = 5$, $\text{Card}(B) = 7$ et $\text{Card}(A \cap B) = 3$. Déterminer le cardinal de $A \cup B$.
2. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E tels que $\text{Card}(A) = 5$, $\text{Card}(B) = 7$ et $\text{Card}(A \cup B) = 8$. Déterminer le cardinal de $A \cap B$.

Exercice 6. Dans une association de 50 personnes, 27 sont inscrites aux activités culturelles, 22 sont inscrites aux activités sportives et 10 ne sont inscrites ni aux activités sportives ni aux activités culturelles.

Combien de personnes sont inscrites à la fois aux activités culturelles et aux activités culturelles ?

Exercice 7. Combien de menus peut-on composer dans un restaurant qui propose à sa carte 5 entrées, 4 plats et 5 desserts ?

Exercice 8. Une personne a dans sa garde robe 6 chemises, 3 pantalons et 4 vestes. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Exercice 9. Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles.

De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

Exercice 10. Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes*. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage.

Exercice 11. En informatique, un octet est une suite de 8 chiffres 0 ou 1. Par exemple, 01000110, 00000000, 10101010 ou 11110000 sont des octets.

1. Déterminer le nombre d'octets différents.
2. Combien y a-t-il d'octets commençant par 0 ?
3. Combien y a-t-il d'octets contenant au moins un 0 ?

Exercice 12. On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

1. Quel est le cardinal de E ?
2. Quel est le nombre de parties de E ?
3. Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec les éléments de E ? (On ne demande pas que les mots formés aient un sens en français.)

Exercice 13. Sachant qu'un numéro de téléphone portable est un numéro à 10 chiffres commençant par 06 ou 07, combien y a-t-il de numéros de téléphone portable différents contenant au moins un fois le chiffre 9 ?

Exercice 14. Dans une association de 10 personnes, on doit désigner le bureau composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier.

Sachant qu'une personne ne peut pas cumuler plusieurs fonctions, combien y a-t-il de bureaux possibles ?

Exercice 15. Lors de la finale du 100 mètres aux jeux olympiques, il y a 8 coureurs au départ qui sont tous classés à l'arrivée.

Combien y a-t-il de classement possibles ?

Exercice 16. Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?

Exercice 17. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot CHOSE ?

Exercice 18. Lors d'une réunion, dix personnes doivent se répartir sur 10 chaises. Combien y a-t-il de répartitions différentes ?

Exercice 19. On considère un damier de jeu de dames composé de 8×8 cases. On dispose de 3 jetons différents. De combien de façons peut-on disposer ces jetons sur le damier :

1. en supposant que deux jetons ne peuvent pas être disposés sur la même case ?
2. en supposons qu'on peut empiler plusieurs jetons sur la même case ?

Exercice 20. Le clavier d'un digicode à l'entrée d'un immeuble est composé des 10 chiffres de 0 à 9 et des deux lettres A et B. Le code de l'immeuble est composé d'une succession de 4 chiffres et d'une lettre (par exemple, 1945B, 0122B ou 3323A).

1. Combien y a-t-il de codes différents possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes comportant 4 chiffres différents ?

Exercice 21. Trois villages doivent être reliés à une des quatre antennes-relais du secteur.

1. Combien y a-t-il de liaisons possibles si plusieurs villages peuvent être reliés à la même antenne ?
2. Même question si les villages doivent tous être reliés à des antennes différentes.

Exercice 22. Une entreprise comporte 18 employés, dont 8 femmes. Pour un sondage, on choisit 3 personnes au hasard. Quel est le nombre d'échantillons comportant au moins 2 hommes ?

Exercice 23. Dans mon armoire, il y a 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marrons et 2 paires de chaussures blanches. Je peux distinguer toutes ces chaussures les unes des autres. Un matin, mal réveillé, je choisis deux chaussures au hasard.

1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Combien y a-t-il de choix où j'obtiens deux chaussures de même couleur ?
3. Combien de choix amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien de choix amènent une chaussure droite et une chaussure gauche de même couleur ?
5. Combien de choix amènent à deux chaussures qui ne sont pas de la même paire ?

Exercice 24. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir ;

1. sans imposer de contraintes sur les cartes ;
2. contenant 5 carreaux ou 5 piques ;
3. contenant 2 carreaux et 3 piques ;
4. contenant au moins un roi ;
5. contenant au plus un roi ;
6. contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques.

Exercice 25. Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules noires. On tire simultanément 3 boules dans l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages différents ?
2. Combien y a-t-il de tirages qui donnent 3 boules de couleurs différentes ?
3. Combien y a-t-il de tirages qui donnent 3 boules de la même couleur ?
4. Combien y a-t-il de tirages qui donnent exactement 2 boules de la même couleur ?
5. Combien y a-t-il de tirages qui ne contiennent pas de boules rouges ?

Exercice 26. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ANAGRAMME ?

Exercice 27. Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. **a.** Combien y a-t-il de codes possibles ?
   b. Combien y a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
   c. Combien y a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
   d. Combien y a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
2. Dans cette question, on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   a. Combien y a-t-il de codes possibles ?
   b. Combien y a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
   c. Combien y a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

Exercice 28. Le clavier d'un digicode comprend 13 touches : A, B, C, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Un code est composé d'une lettre suivie de 4 chiffres (pas nécessairement distincts).

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?

2. Combien y a-t-il de codes ne contenant pas le chiffre 1 ?

3. Combien y a-t-il de codes contenant 4 chiffres distincts ?

4. Une personne est née en 1987. Elle a oublié le code mais elle sait que celui-ci commence par A et contient les 4 chiffres de son année de naissance. Combien d'essais au maximum devra-t-elle faire avant de retrouver le code ?

Exercice 29. Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 1. Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants :

1. l'ensemble A ;

2. l'ensemble B des nombres appartenant à A et ayant 7 chiffres différents ;

3. l'ensemble C des nombres pairs appartenant à A ;

4. l'ensemble D des nombres de A dont les chiffres sont ordonnés du plus petit au plus grand dans l'ordre dans lequel ils sont écrits.

Exercice 30. Un motif est composé de 5 cases alignées côte à côte.

1. Combien y a-t-il de façons de colorier le motif à l'aide de quatre couleurs, chaque couleur étant utilisée au moins une fois ?

2. Combien y a-t-il de façons de colorier le motif à l'aide de six couleurs, une couleur n'étant jamais utilisée deux fois ?

3. Combien y a-t-il de façons de colorier ce motif en noir et blanc avec exactement trois cases blanches ?

4. Combien y a-t-il de façons de colorier ce motif à l'aide de trois couleurs, chaque couleur étant utilisée au moins une fois, de telle sorte que deux cases adjacentes ne soit pas de la même couleur ?

Exercice 31. Pour jouer au loto, on constitue une grille en cochant 5 premiers numéros différents choisis entre 1 et 49 puis en choisissant un numéro « chance » compris entre 1 et 10.

1. Combien y a-t-il de grilles différentes ?

2. Pour un tirage du loto donné,

a. combien y a-t-il de grilles qui ont le bon numéro « chance » ?

b. combien y a-t-il de grilles qui ont les 5 bons premiers numéros ?

c. combien y a-t-il de grilles qui ont exactement 4 bons numéros parmi les 5 premiers ?

Exercice 32. Un domino est une pièce de bois séparée en deux parties. Chacune des deux parties porte un « numéro » entre 0 et 6 représenté par des points noirs (0 étant représenté par une partie sans point noir). Lorsque les deux « numéros » du domino sont identiques, on dit que ce domino est un « double ».

1. Déterminer le nombre de dominos différents.

2. Déterminer le nombre de dominos « double ».

3. On choisit deux dominos.

a. Combien y a-t-il de choix possibles ?

b. Combien de choix donnent deux dominos ayant un « numéro » en commun ?