♦ Chapitre 8. Généralités sur les fonctions numériques

Dans tout le chapitre, la plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ et si f est une fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans ce repère.

I. — Définition et opérations

Définition 1

Une **fonction numérique** (ou fonction réelle d'une variable réelle) est une fonction dont l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des parties de $\mathbb{R}$.
Si f est une fonction numérique, l'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe. On le note $\mathcal{D}_f$.

Exemple 2.

1. La fonction $f : x \longmapsto x^3 + 1$ est une fonction numérique et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. La fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{x-1}$ est une fonction numérique et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
3. La fonction $h : x \longmapsto \sqrt{2-x}$ est une fonction numérique et $\mathcal{D}_h =]-\infty\,;2]$.

Définition 3

Soit f et g deux fonctions numériques et λ et μ deux réels. On définit :

1. la fonction $\lambda f + \mu g$ par
$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \quad (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x).$$
On a donc $\mathcal{D}_{\lambda f + \mu g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
2. la fonction fg par
$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$
On a donc $\mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
3. la fonction $\frac{f}{g}$ par
$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap E \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
où E désigne l'ensemble des éléments x de $\mathcal{D}_g$ tel que $g(x) \neq 0$. On a donc $\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = \mathcal{D}_f \cap E = \mathcal{D}_f \cap (\mathcal{D}_g \setminus \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) = 0\})$.

Exemple 4. On considère les fonctions numériques
$$f : x \longmapsto \sqrt{3x-1} \qquad \text{et} \qquad g : x \longmapsto x^2 - 5x + 6.$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.
2. Déterminer les fonctions $2f - 3g$, fg et $\frac{f}{g}$ en précisant, pour chacune d'elles, son ensemble de définition.

Solution.

1. $f(x)$ existe pour tout réel x tel que $3x-1 \geqslant 0$ i.e. $x \geqslant \frac{1}{3}$. Ainsi, $\mathcal{D}_f = \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.
$g(x)$ existe pour tout réel x donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

2. L'ensemble de définition de $2f-3g$ est $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g = \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et, pour tout réel $x \geqslant \frac{1}{3}$,

$$(2f-3g)(x) = 2f(x)-3g(x) = 2\sqrt{3x-1}-3(x^2-5x+6) = 2\sqrt{3x-1}-3x^2+15x-18.$$

Ainsi,

$$2f-3g : \begin{array}{ccc} \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\sqrt{3x-1}-3x^2+15x-18 \end{array}$$

De même, $\mathcal{D}_{fg} = \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et, pour tout réel $x \geqslant \frac{1}{3}$,

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{3x-1}(x^2-5x+6).$$

Ainsi,

$$fg : \begin{array}{ccc} \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{3x-1}(x^2-5x+6) \end{array}$$

Pour déterminer l'ensemble de définition de $\dfrac{f}{g}$, il faut déterminer les antécédents de 0 par g. Or, le discriminant du trinôme x^2-5x+6 est $\Delta = (-5)^2 - 4\times 1\times 6 = 1 > 0$ donc l'équation $g(x)=0$ possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times 1} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times 1} = 3$$

donc $\mathcal{D}_{fracfg} = \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[\setminus \{2\,;3\}$. De plus, pour tout $x \in \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[\setminus \{2\,;3\}$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{3x-1}}{x^2-5x+6}.$$

Ainsi,

$$\frac{f}{g} : \begin{array}{ccc} \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[\setminus \{2\,;3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{3x-1}}{x^2-5x+6} \end{array}$$

II. — Parité et périodicité

1) Parité

Définition 5

On dit qu'un ensemble de nombres réels E est **centré en** 0 (ou symétrique par rapport à 0) si, pour tout $x \in E$, $-x \in E$.

Exemple 6. Les ensembles suivants sont-ils centrés en 0 ?

$E_1 = [-1\,;1]$	$E_2 = [-1\,;2]$	$E_3 = \mathbb{N}$	$E_4 = \mathbb{Z}$
$E_5 =]-3\,;-1] \cup [1\,;3[$	$E_6 =]-3\,;3[$	$E_7 =]-5\,;5]$	$E_8 = \mathbb{R}^*$

Solution.

• Soit $x \in E_1$. Alors, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ donc, en multipliant par $-1 < 0$, $1 \geqslant -x \geqslant -1$ i.e. $-1 \leqslant -x \leqslant 1$ donc $-x \in E_1$. Ainsi, E_1 est centré en 0.

• $2 \in E_2$ mais $-2 \notin E_2$ donc E_2 n'est pas centré en 0.

• $1 \in \mathbb{N}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$ donc E_3 n'est pas centré en 0.

• Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors, n est un entier donc $-n$ est aussi un entier et donc $-n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, E_4 est centré en 0.

• Soit $x \in E_5$. Si $x \in [1\,;3[$ alors $1 \leqslant x < 3$ donc $-1 \geqslant -x > -3$ i.e. $-3 < -x \leqslant -1$ donc $-x \in]-3\,;-1]$ et ainsi $-x \in E_5$.

Si $x \in]-3\,;-1]$ alors $-3 < x \leqslant -1$ donc $3 > -x \geqslant 1$ i.e. $1 \leqslant x < 3$ donc $-x \in [1\,;3[$ et ainsi $-x \in E_5$.

Dans tous les cas, $-x \in E_5$ donc E_5 est centré en 0.

• Soit $x \in E_6$. Alors, $-3 < x < 3$ donc $3 > -x > -3$ i.e. $-3 < -x < 3$ donc $-x \in E_6$. Ainsi, E_6 est centré en 0.

• $5 \in E_7$ mais $-5 \notin E_7$ donc E_7 n'est pas centré en 0.

• Soit $x \in E_8$. Alors, $x \neq 0$ donc $-x \neq 0$ et ainsi $-x \in E_8$. Dès lors, E_8 est centré en 0.

Définition 7

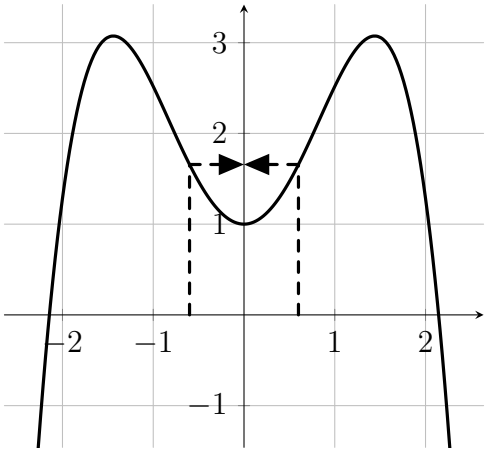
Soit f une fonction numérique. On dit que f est une fonction **paire** si $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et si, pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.

Exemple 8.

1. La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est une fonction paire. En effet, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout réel x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
2. De manière générale, pour tout entier naturel pair n, $f_n : x \longmapsto x^n$ est paire.
3. La fonction $g : x \longmapsto x^2 + x$ n'est pas paire car $g(-1) = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$ et $g(1) = 1^2 + 1 = 2$ donc $g(-1) \neq g(1)$.

Propriété 9

La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Démonstration. Soit $M(x, y) \in \mathscr{C}_f$. Alors, $x \in \mathcal{D}_f$ donc $-x \in \mathcal{D}_f$ car $\mathcal{D}_f$ est centré en 0. De plus, comme f est paire, $f(-x) = f(x) = y$ donc $N(-x, y) \in \mathscr{C}_f$ i.e. le symétrique de $M(x, y)$ par rapport à l'axe des ordonnées appartient $\mathscr{C}_f$.

Ainsi, pour tout point M de $\mathscr{C}_f$, le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées appartient également à $\mathscr{C}_f$ donc $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. □

Définition 10

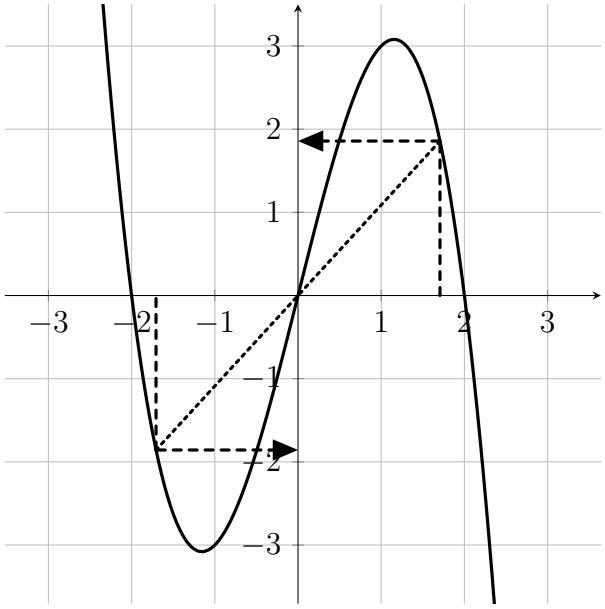
Soit f une fonction numérique. On dit que f est une fonction **impaire** si $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et si, pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Exemple 11.

1. La fonction $f : x \longmapsto x^3$ est une fonction impaire. En effet, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout réel x, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.
2. De manière générale, pour tout entier naturel impair n, $f_n : x \longmapsto x^n$ est impaire.
3. La fonction $g : x \longmapsto x^2 + x$ n'est pas impaire car $g(-1) = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$ et $g(1) = 1^2 + 1 = 2$ donc $g(-1) \neq -g(1)$.
   Ainsi, d'après l'exemple 8, la fonction g n'est ni paire ni impaire.

Propriété 12

La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Démonstration. Soit $M(x, y) \in \mathscr{C}_f$. Alors, $x \in \mathcal{D}_f$ donc $-x \in \mathcal{D}_f$ car $\mathcal{D}_f$ est centré en 0. De plus, comme f est impaire, $f(-x) = -f(x) = -y$ donc $N(-x, -y) \in \mathscr{C}_f$ i.e. le symétrique de $M(x, y)$ par rapport à l'origine du repère appartient $\mathscr{C}_f$.

Ainsi, pour tout point M de $\mathscr{C}_f$, le symétrique de M par rapport à l'origine du repère appartient également à $\mathscr{C}_f$ donc $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère. □

Définition 13

Étudier la parité d'une fonction numérique f, c'est déterminer si f est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre.

Exemple 14. Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{x}{x^2+1} \qquad g : x \longmapsto \frac{x^4}{x^2-1} \qquad h : x \longmapsto \frac{x}{x-1} \qquad k : x \longmapsto \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Solution.

• $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout réel x,

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = \frac{-x}{x^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$$

donc f est impaire.

• $x^2 - 1 = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = -1$ donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$. Or si $x \in \mathcal{D}_g$ alors $x \neq -1$ et $x \neq -1$ donc $-x \neq 1$ et $-x \neq -1$ et ainsi $-x \in \mathcal{D}_g$. Dès lors, $\mathcal{D}_g$ est centré en 0 et, pour tout $x \in \mathcal{D}_g$,

$$g(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^2-1} = \frac{x^4}{x^2-1} = g(x)$$

donc g est paire.

• $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc $-1 \in \mathcal{D}_h$ mais $-(-1) = 1 \notin \mathcal{D}_h$ donc $\mathcal{D}_h$ n'est pas centré en 0. Par suite, h n'est ni paire ni impaire.

• $k(1) = \dfrac{1+1}{1^2+1} = 1$ et $k(-1) = \dfrac{-1+1}{(-1)^2+1} = 0$ donc $k(-1) \neq k(1)$ et $k(-1) \neq -k(1)$. Ainsi, k n'est ni paire ni impaire.

2) Périodicité

Définition 15

Soit f une fonction numérique et T un réel strictement positif. On dit que f est T**-périodique** (ou périodique de période T) si :

- pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $x + T \in \mathcal{D}_f$.
- pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x+T) = f(x)$.

Exemple 16.

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 1$ est périodique de période T pour tout réel $T > 0$.
2. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \cos(2x)$ est π-périodique.

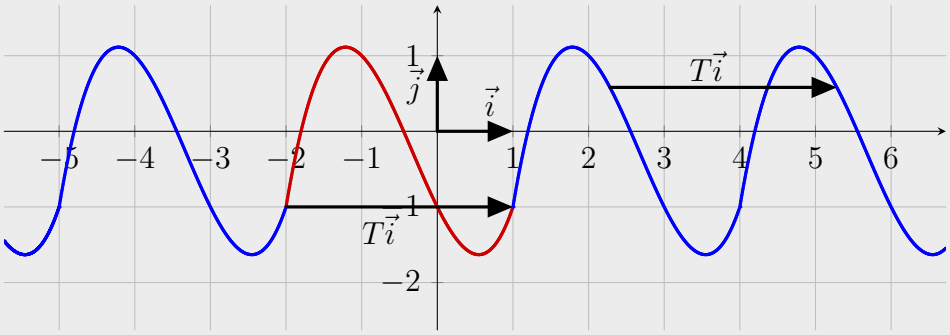
Solution.

1. Soit un réel $T > 0$. Comme $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $x + T \in \mathcal{D}_f$ et, de plus, $f(x+T) = 1 = f(x)$ donc f est T-périodique.
2. Comme $\mathcal{D}_f g = \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $x + \pi \in \mathcal{D}_g$ et, de plus, $g(x+\pi) = \cos(2(x+\pi)) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x)$ donc g est π-périodique.

Remarque 17. Si f est $T-$périodique, elle est également kT-périodique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Dans la pratique, on cherche en général à déterminer la plus petite période de f (si elle existe).

Propriété 18

Soit f une fonction T-périodique. La courbe de f est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$. Autrement dit, la courbe $\mathscr{C}_f$ est composé d'un motif de longueur T qui se répète.



Démonstration. Soit $M(x, y)$ un point de la courbe de f. Alors, $x \in \mathcal{D}_f$ donc, comme f est T-périodique, $x + T \in \mathcal{D}_f$ et $f(x + T) = f(x) = y$. Ainsi, le point de coordonnées $(x + T, y)$ appartient à $\mathscr{C}_f$. Or, ce point n'est autre que l'image de M par la translation de vecteur $T\vec{i}$ donc $\mathscr{C}_f$ est invariante par par translation de vecteur $T\vec{i}$. □

III. — Propriétés liées à l'ordre

1) Monotonie

Définition 19

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$. On dit que

- f est **croissante** sur I si

$$\forall\,(a\,;b) \in I^2 \qquad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$$

- f est **strictement croissante** sur I si

$$\forall\,(a\,;b) \in I^2 \qquad a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$$

- f est **décroissante** sur I si

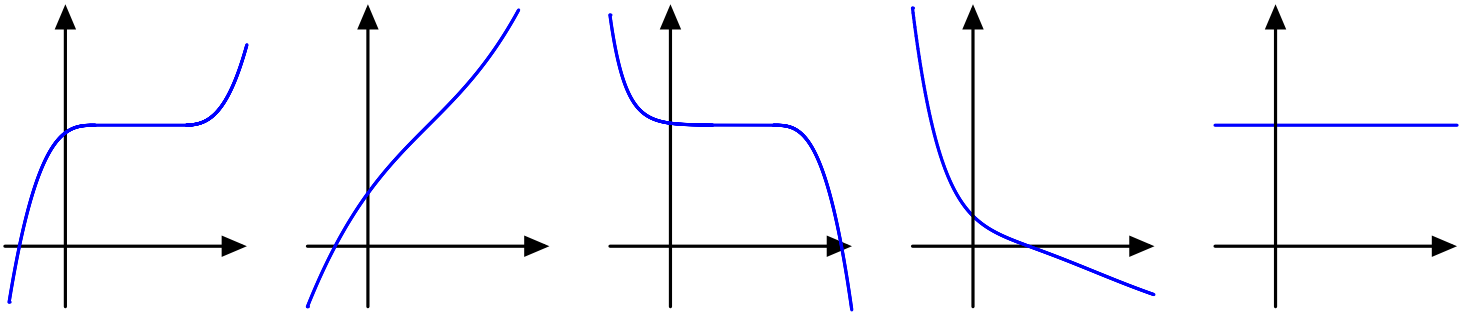
$$\forall\,(a\,;b) \in I^2 \qquad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b)$$

- f est **strictement décroissante** sur I si

$$\forall\,(a\,;b) \in I^2 \qquad a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$$

- f est **constante** sur I si

$$\forall\,(a\,;b) \in I^2 \qquad f(a) = f(b)$$



courbe d'une fonction croissante | courbe d'une fonction strictement croissante | courbe d'une fonction décroissante | courbe d'une fonction strictement décroissante | courbe d'une fonction constante

Remarque 20.

1. Une fonction croissante converse l'ordre alors qu'une fonction décroissante renverse l'ordre.
2. Une fonction strictement croissante (resp. décroissante) sur I est une fonction croissante (resp. décroissante) sur I.
3. Une fonction constante est à la fois croissante et décroissante.

Exemple 21.

1. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto -3x + 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction $g : x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Solution.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Alors, comme $-3 < 0$, $-3a > -3b$ et ainsi $-3a+1 > -3b+1$ i.e. $f(a) > f(b)$.
   On en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors, $g(b) - g(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$. Or, $b > a$ donc $b - a > 0$ et ainsi le signe de $g(b) - g(a)$ est le signe de $b + a$.
   Supposons que $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$. Alors, $0 \leqslant a < b$ donc $b+a > 0$ et ainsi $g(b) - g(a) > 0$. Dans ce cas, on a donc $g(a) < g(b)$ ce qui montre que g est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
   Supposons que $(a, b) \in \mathbb{R}_-^2$. Alors, $a < b \leqslant 0$ donc $b + a < 0$ et ainsi $g(b) - g(a) < 0$. Dans ce cas, on a donc $g(a) > g(b)$ ce qui montre que g est strictement décroissante sur $[-\infty\,;0[$.
   Ainsi, on conclut que $g : x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $]0\,;+\infty]$.

Définition 22

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.

1. On dit que f est (strictement) **monotone** sur I si f est (strictement) croissante sur I ou (strictement) décroissante sur I.
2. **Étudier les variations** de f, c'est partitionner $\mathcal{D}_f$ en intervalles les plus grands possibles sur lesquels f est monotone.

Exemple 23.

1. la fonction $f : x \longmapsto -3x + 1$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
2. la fonction $g : x \longmapsto x^2$ n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$ mais elle l'est sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0]$ et $[0\,;+\infty[$.

Propriété 24

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. Si f est strictement monotone sur I alors f est injective sur I.

Démonstration. Supposons que f est strictement monotone sur I. Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a \neq b$. Quitte à échanger a et b, on peut toujours supposer que $a < b$.

Si f est strictement croissante sur I, on en déduit que $f(a) < f(b)$ et, si f est strictement décroissante sur I, on en déduit que $f(a) > f(b)$. Dans les deux cas, $f(a) \neq f(b)$.

Ainsi, pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a \neq b$, $f(a) \neq f(b)$ donc f est injective sur I. □

Remarque 25. La réciproque de la propriété précédente est fausse : une fonction numérique peut être injective sur un intervalle sans être pour autant strictement monotone.

2) Fonctions majorées, minorées, bornées

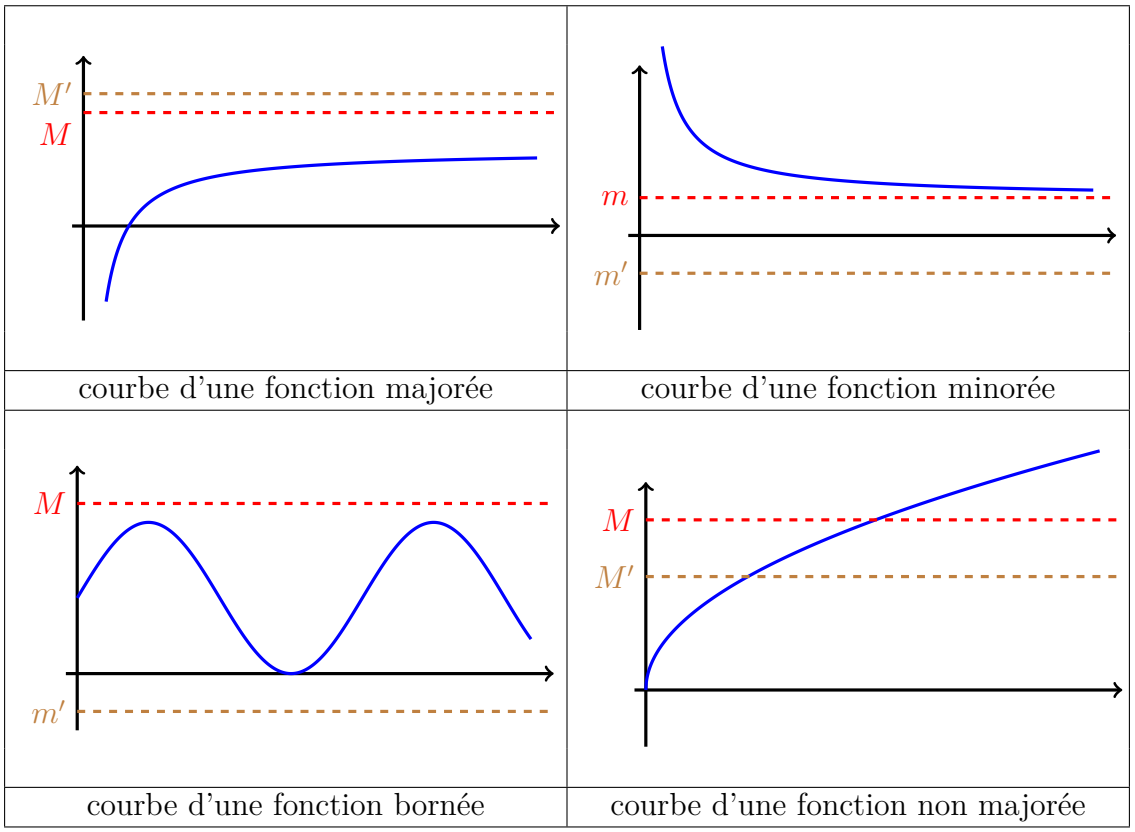
Définition 26

Soit f une fonction numérique. On dit que

- f est **majorée** sur $\mathcal{D}_f$ s'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \leqslant M$; le nombre M est alors appelé un **majorant** de f sur $\mathcal{D}_f$;
- f est **minorée** sur $\mathcal{D}_f$ s'il existe un réel m tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \geqslant m$; le nombre m est alors appelé un **minorant** de f sur $\mathcal{D}_f$;
- f est **bornée** sur $\mathcal{D}_f$ si elle est à la fois majorée et minorée sur $\mathcal{D}_f$ c'est-à-dire s'il existe des réels m et M tels que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Remarque 27.

1. Les nombres m et M ci-dessus doivent être indépendants de x.
2. Un majorant (resp. un minorant), s'il existe, n'est jamais unique. En effet, si f est majorée (resp. minorée) par M (resp. m) alors elle est aussi majorée (resp. minorée) par tout réel $M' \geqslant M$ (resp. $m' \leqslant m$).



courbe d'une fonction majorée	courbe d'une fonction minorée
courbe d'une fonction bornée	courbe d'une fonction non majorée

Exemple 28.

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ est minorée sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 1 + \cos(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$ donc $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$ donc $1 + \dfrac{1}{x^2} \geqslant 1$. Ainsi, f est minorée sur $\mathbb{R}^*$ par 1.
2. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant 1 + \cos(x) \leqslant 2$. Ainsi, g est bornée sur $\mathbb{R}$ par 0 et 2.

3) Extremums

Définition 29

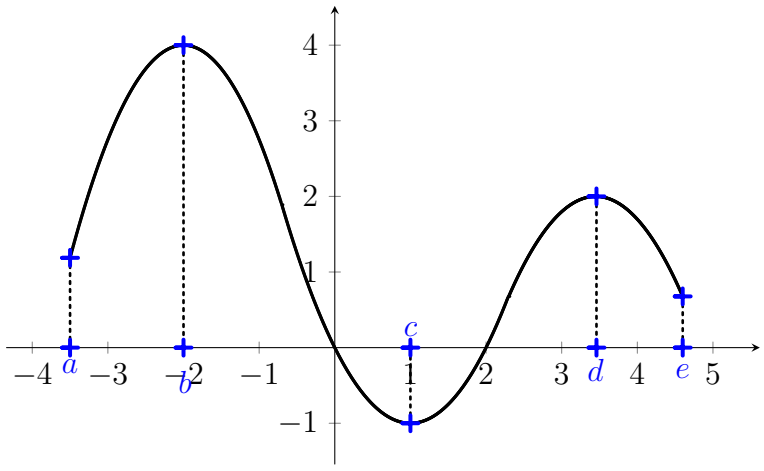
Soit f une fonction numérique. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. On dit que f présente :

1. un **minimum local** en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap J$, $f(x) \geqslant f(a)$;
2. un **maximum local** en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap J$, $f(x) \leqslant f(a)$;
3. un **minimum global** en a sur $\mathcal{D}_f$ si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \geqslant f(a)$;
4. un **maximum global** en a sur $\mathcal{D}_f$ si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \leqslant f(a)$.

Un minimum ou un maximum local (resp. global) est appelé un **extremum** local (resp. global).

Remarque 30. Un extremum global est un extremum local (il suffit de prendre $J = \mathbb{R}$) mais la réciproque est fausse.

Exemple 31. On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[a\,;e]$.



La fonction f présente 5 extremums : 3 minimums locaux en a, c et e et 2 maximums locaux en b et d. De plus, en b et en c, les extremums sont globaux sur $I = [a\,;e]$.

Remarque 32. Si $a \in \mathcal{D}_f$ et s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans $\mathcal{D}_f$ alors f présente un extremum local en a si et seulement si f change de variation en a.

4) Positions relatives de deux courbes

Définition 33

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un même ensemble E. On dit que :

1. $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathscr{C}_g$ sur E si, pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant g(x)$;
2. $\mathscr{C}_f$ est **en dessous** de $\mathscr{C}_g$ sur E si, pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$.

Remarque 34. Dire qu'une fonction f est majorée (resp. minorée) par M (resp. m) revient à dire que $\mathscr{C}_f$ est en dessous (resp. au-dessus) de la droite d'équation $y = M$ (resp. $y = m$).

Méthode 35

Étudier les positions relatives sur un ensemble E des courbes de deux fonctions f et g revient à comparer, pour tout réel $x \in E$, les nombres $f(x)$ et $g(x)$. Une méthode standard pour effectuer une telle comparaison consiste à étudier le signe de la différence $d(x) = f(x) - g(x)$ en fonction de x. En effet,

1. si, pour tout $x \in E$, $d(x) \geqslant 0$ alors $f(x) \geqslant g(x)$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$;
2. si, pour tout $x \in E$, $d(x) \leqslant 0$ alors $f(x) \leqslant g(x)$ donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$;

Remarque 36. Si $d(x)$ change de signe en fonction x, on étudie les positions relatives de f sur chaque intervalle de E où $d(x)$ reste de signe constant.

Exemple 37.

1. Étudier les positions relatives sur $\mathbb{R}$ des courbes des fonctions $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto x^2$.
2. Même question avec $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $g : x \longmapsto x + 1$.

Solution.

1. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d(x) = f(x) - g(x)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d(x) = x - x^2 = x(1-x)$.
   On a alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $d(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   donc $d(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]-\infty\,;0] \cup [1\,;+\infty[$ et $d(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0\,;1]$.
   On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\,;0] \cup [1\,;+\infty[$ et $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $[0\,;1]$.
2. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d(x) = f(x) - g(x)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d(x) &= \frac{1}{1+x^2} - (x+1) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1-(x+1)(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= \frac{1-(x+x^3+1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1-x-x^3-1-x^2}{1+x^2} \\ &= -\frac{-x(x^2+x+1)}{1+x^2}. \end{aligned}$$

   Or, le discriminant de x^2+x+1 est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc, pour tout réel x, x^2+x+1 est du signe de $a = 1 > 0$. De plus, pour tout réel x, $1+x^2 > 0$ donc le signe de $d(x)$ est le signe de $-x$. Ainsi, $d(x) \geqslant 0$ si $x \leqslant 0$ et $d(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant 0$.
   On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\,;0]$ et que $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $[0\,;+\infty[$.

IV. — Fonctions usuelles

1) Fonctions puissances entières et racine carrée

a) Fonctions puissances entières

Définition 38

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On définit la **fonction puissance** n par $f_n : x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$.

Remarque 39.

1. Si $n = 0$ alors f_n est la fonction constante égale à 1.
2. Lorsque $n < 0$, on écrit plutôt f_n sous la forme $f_n : x \longmapsto \frac{1}{x^{-n}}$ avec $-n > 0$. Ainsi, plutôt que d'écrire $f_{-2} : x \longmapsto x^{-2}$, on écrit $f_{-2} : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$.
3. La fonction carré $x \longmapsto x^2$ et la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sont des cas particuliers correspondant respectivement à $n = 2$ et $n = -1$.

Propriété 40

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et f_n la fonction puissance n.

1. Si $n > 0$ et si n est impair alors f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si $n > 0$ et si n est pair alors f_n est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $]0\,;+\infty]$.
3. Si $n < 0$ et si n est impair alors f_n est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ (mais pas sur la réunion des deux).
4. Si $n < 0$ et si n est pair alors f_n est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$ et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
5. Dans tous les cas, la fonction f_n a la même parité que n.

Démonstration.

1. Supposons $n > 0$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Alors,

$$(b-a)\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)b^k a^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b^{k+1}a^{n-(k+1)} - b^k a^{n-k}.$$

On reconnaît une somme téléscopique donc

$$(b-a)\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-k} = b^{n-1+1}a^{n-(n-1+1)} - b^0 a^{n-0} = b^n - a^n.$$

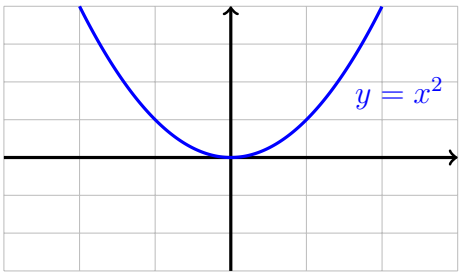
Autrement dit, $f_n(b) - f_n(a) = (b-a)\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-k-1}$. Comme $a < b$, $b - a > 0$ donc le signe de $f_n(b) - f_n(a)$ est le signe de $\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-k-1}$. En particulier, si $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, $0 \leqslant a < b$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-k-1} > 0$. Ainsi, pour $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, $f_n(b) - f_n(a) > 0$ donc, dans tous les cas, f_n est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Supposons que n est impair. Si $a \leqslant 0 < b$ alors $a^n \leqslant 0$ et $b^n > 0$ donc $f_n(a) < f_n(n)$. De même, si $a < 0 \leqslant b$ alors $a^n < 0$ et $b^n \geqslant 0$ donc $f_n(a) < f_n(b)$. Enfin, si $a < b \leqslant 0$ alors, $-a > -b \geqslant 0$ donc, par ce qui précède, $(-a)^n > (-b)^n$ i.e. $(-1)^n a^n > (-1)^n b^n$ soit, comme n impair, $-a^n > -b^n$. Dans ce cas, on a donc $a^n < b^n$ i.e. $f_n(a) < f_n(b)$.
Ainsi, quand n est impair, dans tous les cas, $f_n(a) < f_n(b)$ donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Supposons toujours $n > 0$ mais avec cette fois n pair. On a vu précédemment que f_n est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$. Si $(a,b) \in \mathbb{R}_-^2$ alors $a < b \leqslant 0$ donc $-a > -b \geqslant 0$ et, par stricte croissance de f_n sur $[0\,;+\infty[$, $(-a)^n > (-b)^n$. Ainsi, $(-1)^n a^n > (-1)^n b^n$ i.e., comme n est pair, $a^n > b^n$ soit $f_n(a) > f_n(b)$. On conclut donc que f_n est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
3. Commençons par le cas $n = -1$ (i.e. par la fonction inverse). Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $a < b$. Alors, $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{a-b}{ab}$ et, comme $a < b$, $b - a > 0$ donc le signe de $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ est l'opposé du signe de ab. Or, si a et b sont de même signe alors $ab > 0$ donc $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} < 0$. Ainsi, on conclut que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
Supposons $n < 0$ et n impair. Soit $(a,b) \in]0\,;+\infty[^2$ tel que $a < b$. Alors, $-n > 0$ et $-n$ est impair donc, par le point **1.**, $0 < a^{-n} < b^{-n}$. Dès lors, par stricte décoissance

de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{a^{-n}} > \dfrac{1}{b^{-n}}$ donc $a^n > b^n$. Ainsi, f_n est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
De même, si $(a,b) \in]-\infty\,;0[^2$ sont tels que $a < b$ alors $a^{-n} < b^{-n} < 0$ donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty\,;0[$, $\dfrac{1}{a^{-n}} > \dfrac{1}{b^{-n}}$ i.e. $a^n > b^n$. Ainsi, f_n est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

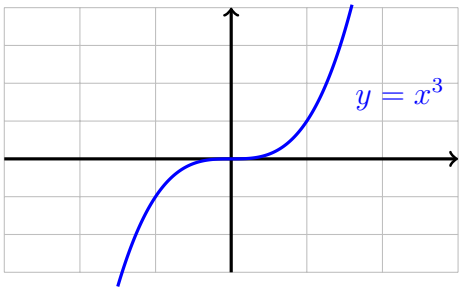
4. Supposons $n < 0$ et n pair. Soit $(a,b) \in]0\,;+\infty[^2$ tel que $a < b$. Alors, $-n > 0$ et $-n$ est pair donc, par le point **2.**, $0 < a^{-n} < b^{-n}$. Dès lors, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{a^{-n}} > \dfrac{1}{b^{-n}}$ donc $a^n > b^n$. Ainsi, f_n est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
De même, si $(a,b) \in]-\infty\,;0[^2$ sont tels que $a < b$ alors $a^{-n} > b^{-n} > 0$ donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{a^{-n}} < \dfrac{1}{b^{-n}}$ i.e. $a^n < b^n$. Ainsi, f_n est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$.

5. Si $n \geqslant 0$ alors $\mathcal{D}_{f_n} = \mathbb{R}$ qui est centré en 0 et si $n < 0$ alors $\mathcal{D}_{f_n} = \mathbb{R}^*$ qui est également centré en 0. De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_n}$, $f_n(-x) = (-x)^n = (-1)^n x^n$ donc $f_n(-x) = f_n(x)$ si n est pair et $f_n(-x) = -f_n(x)$ si n est impair. Ainsi, f_n a la même parité que n.

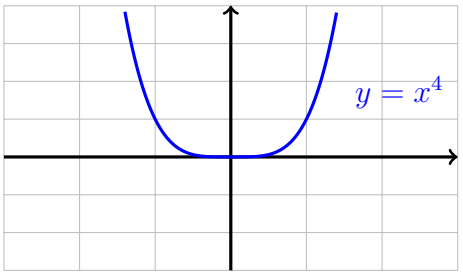
□



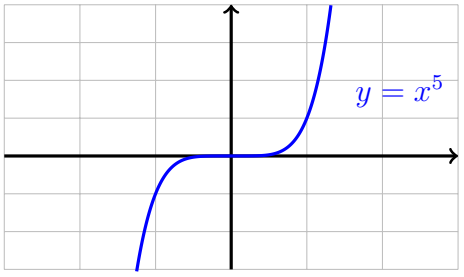
courbe de la fonction carré $x \longmapsto x^2$



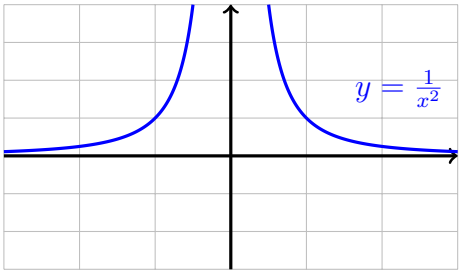
courbe de la fonction cube $x \longmapsto x^3$



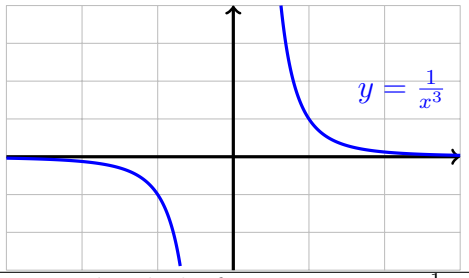
courbe de la fonction $x \longmapsto x^4$



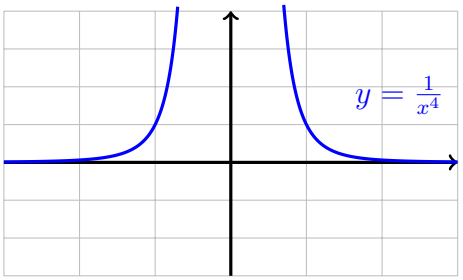
courbe de la fonction $x \longmapsto x^5$



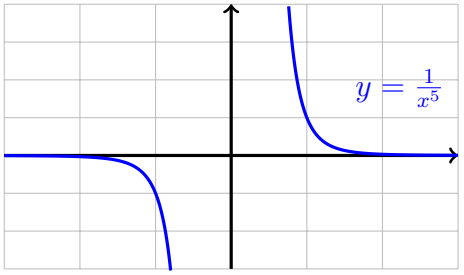
courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$



courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$



courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^4}$

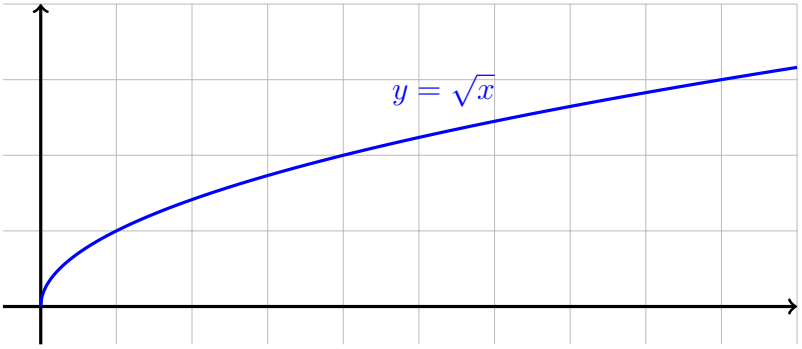


courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^5}$

b) La fonction racine carrée

Définition 41

La **fonction racine carrée** est la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.



Propriété 42

La fonction racine carrée réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ dont la bijection réciproque est la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Démonstration. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $a < b$. Alors,

$$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0$$

car $a < b$ donc $b - a > 0$. Ainsi, $\sqrt{b} > \sqrt{a}$ donc la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x^2} = |x| = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $\sqrt{x}^2 = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}(x)$ donc la fonction racine carrée et la fonction g sont des bijections réciproques $\square$

2) Fonctions homographiques

Définition 43

On dit qu'une fonction f est une **fonction homographique** s'il existe des réels a, b, c et d avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ tels que, pour tout réel $x \neq -\frac{d}{c}$,

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

En particulier, une fonction homographique est le quotient de deux fonctions affines.

Remarque 44. La condition $ad - bc \neq 0$ assure que la fonction f n'est pas constante. De plus, on écarte le cas $c = 0$, qui correspond aux fonctions affines.

Exemple 45. Justifier que les fonctions suivantes sont des fonctions homographiques et déterminer, dans chaque cas, l'ensemble de définition.

$f : x \longmapsto \dfrac{x-3}{2x+4}$ $\quad g : x \longmapsto \dfrac{3}{x+4}$ $\quad h : x \longmapsto \dfrac{-3+2x}{-5x}$ $\quad$ La fonction inverse $i : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Solution.

- Comme $1 \times 4 - (-3) \times 2 = 10 \neq 0$, f est bien une fonction homographique et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- Comme $0 \times 4 - 1 \times 3 = -3 \neq 0$, g est bien une fonction homographique et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.
- Comme $2 \times 0 - (-5) \times (-3) = -15 \neq 0$, h est bien une fonction homographique et $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Comme $0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 \neq 0$, i est bien une fonction homographique et $\mathcal{D}_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Propriété 46. Forme réduite d'une fonction homographique

Soit f une fonction homographique. Alors, il existe des réels α, β et γ tels que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-\gamma}.$$

Cette écriture s'appelle la forme réduite de f.

Démonstration. Comme f est une fonction homographique, il existe des réels a, b, c et d tels que $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$ et, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Alors, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(x) = \frac{1}{c} \times \frac{ax+b}{x+\frac{d}{c}} = \frac{1}{c} \times \frac{ax + \frac{ad}{c} - \frac{ad}{c} + b}{x+\frac{d}{c}} = \frac{1}{c}\left[\frac{a(x+\frac{d}{c})}{x+\frac{d}{c}} - \frac{\frac{ad-bc}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right] = \frac{a}{c} + \frac{-\frac{ad-bc}{c^2}}{x-(-\frac{d}{c})}.$$

Ainsi, on obtient bien la forme voulue en posant $\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = -\frac{ad-bc}{c^2}$ et $\gamma = -\frac{d}{c}$. $\square$

Exemple 47. Déterminer les formes réduites des fonctions f, g et h de l'exercice 45

Solution.

- Pour tout réel $x \neq -2$,

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x-3}{x+2} = \frac{1}{2} \times \frac{x+2-5}{x+2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{5}{x+2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{5}{2}}{x-(-2)}.$$

- Pour tout réel $x \neq -4$,

$$g(x) = 0 + \frac{3}{x-(-4)}$$

- Pour tout réel $x \neq 0$,

$$h(x) = \frac{2}{-5} \times \frac{x - \frac{3}{2}}{x} = \frac{2}{-5}\left(1 - \frac{\frac{3}{2}}{x}\right) = -\frac{2}{5} + \frac{\frac{3}{5}}{x-0}.$$

Propriété 48

Soit $f : x \longmapsto \alpha + \frac{\beta}{x-\gamma}$ une fontion homographique écrite sous forme réduite. Alors,

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\gamma\}$;
2. si $\beta > 0$ alors f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;\gamma[$ et $]\gamma\,;+\infty[$;
3. si $\beta < 0$ alors f est strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;\gamma[$ et $]\gamma\,;+\infty[$;
4. dans tous les cas, f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{\gamma\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ et sa bijection réciproque est une fonction homographique.

Démonstration.

1. Pour tout réel x, $f(x)$ existe si et seulement si $x - \gamma \neq 0$ i.e. $x \neq \gamma$. Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\gamma\}$.
2. Supposons que $\beta > 0$. Soit $(a,b) \in]\gamma\,;+\infty[^2$ tel que $\gamma < a < b$. Alors, $0 < a - \gamma < b - \gamma$ donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{a-\gamma} > \dfrac{1}{b-\gamma}$. Comme $\beta > 0$, $\dfrac{\beta}{a-\gamma} > \dfrac{\beta}{b-\gamma}$ donc $\alpha + \dfrac{\beta}{a-\gamma} > \alpha + \dfrac{\beta}{b-\gamma}$ i.e. $f(a) > f(b)$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $]\gamma\,;+\infty[$.
   Soit $(a,b) \in]-\infty\,;\gamma[^2$ tel que $a < b < \gamma$. Alors, $a - \gamma < b - \gamma < 0$ donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty\,;0[$, $\dfrac{1}{a-\gamma} > \dfrac{1}{b-\gamma}$. Comme $\beta > 0$, $\dfrac{\beta}{a-\gamma} > \dfrac{\beta}{b-\gamma}$ donc $\alpha + \dfrac{\beta}{a-\gamma} > \alpha + \dfrac{\beta}{b-\gamma}$ i.e. $f(a) > f(b)$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\gamma[$.
3. Supposons que $\beta < 0$. Soit $(a,b) \in]\gamma\,;+\infty[^2$ tel que $\gamma < a < b$. Alors, $0 < a - \gamma < b - \gamma$ donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{a-\gamma} > \dfrac{1}{b-\gamma}$. Comme $\beta < 0$, $\dfrac{\beta}{a-\gamma} < \dfrac{\beta}{b-\gamma}$ donc $\alpha + \dfrac{\beta}{a-\gamma} < \alpha + \dfrac{\beta}{b-\gamma}$ i.e. $f(a) < f(b)$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]\gamma\,;+\infty[$.
   Soit $(a,b) \in]-\infty\,;\gamma[^2$ tel que $a < b < \gamma$. Alors, $a - \gamma < b - \gamma < 0$ donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty\,;0[$, $\dfrac{1}{a-\gamma} > \dfrac{1}{b-\gamma}$. Comme $\beta < 0$, $\dfrac{\beta}{a-\gamma} <$

$\dfrac{\beta}{b-\gamma}$ donc $\alpha + \dfrac{\beta}{a-\gamma} < \alpha + \dfrac{\beta}{b-\gamma}$ i.e. $f(a) < f(b)$. Ainsi, f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\gamma[$.

4. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\gamma\}$,

$$f(x) = y \iff \alpha + \frac{\beta}{x-\gamma} = y \iff \frac{\beta}{x-\gamma} = y - \alpha \underset{y\neq\alpha}{\iff} \frac{x-\gamma}{\beta} = \frac{1}{y-\alpha}$$
$$\iff x - \gamma = \frac{\beta}{y-\alpha} \iff x = \gamma + \frac{\beta}{y-\alpha}$$

De plus, $\dfrac{1}{y-\alpha} \neq 0$ donc $\gamma + \dfrac{1}{y-\alpha} \neq \gamma$. Ainsi, f réalise une bijection de $\mathbb{R}\backslash_\gamma$ dans $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ et sa bijection réciproque est la fonction homographique

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} \setminus \{\alpha\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{\gamma\} \\ & x & \longmapsto & \gamma + \dfrac{\beta}{y-\alpha} \end{array}$$

□

Exemple 49. Déterminer les variations des fonctions f, g, h et i de l'exemple 45.

Solution.

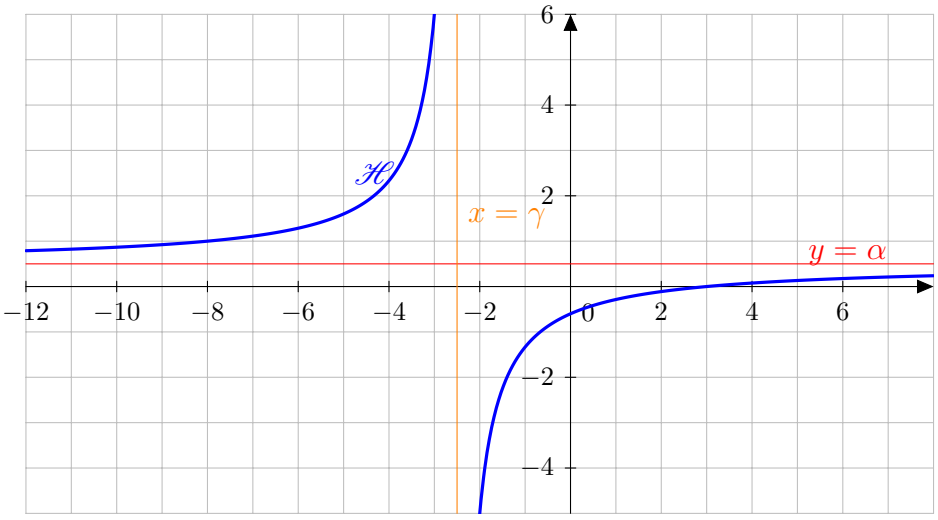
On a vu que, pour f, $\beta = -\frac{5}{2} < 0$ donc f est strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;-2[$ et $]-2\,;+\infty[$.

De même, pour g, $\beta = 3 > 0$ donc g est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;-4[$ et $]-4\,;+\infty[$.

Enfin, pour h, on a vu que $\beta = \frac{3}{5} > 0$ donc h est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

Définition 50

La courbe $\mathscr{H}$ d'une fonction homographique f est appelée **une hyperbole**. Elle est composée de deux morceaux appelés les **branches** de $\mathscr{H}$.
Si l'écriture sous forme réduite de f est $f : x \longmapsto \alpha + \frac{\beta}{x-\gamma}$ alors la droite d'équation $y = \alpha$ est appelée **asymptote horizontale** de $\mathscr{H}$ et la droite d'équation $x = \gamma$ est appelée **asymptote verticale** de $\mathscr{H}$.



Remarque 51. En particulier, la courbe de la fonction inverse est une hyperbole.

3) Fonctions exponentielles

Théorème 52. (admis)

Soit un réel $a > 0$. Il existe une unique fonction f_a dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_a(n) = a^n$;
2. pour tous réels x et y, $f_a(x+y) = f_a(x)f_a(y)$.

Démonstration. On admet l'existence d'une telle fonction. □

Définition 53

Soit un réel $a > 0$. La fonction f_a définie par le théorème précédent s'appelle la **fonction exponentielle de base** a. On la note $\exp_a(x)$.

Notation 54. Pour tout réel $a > 0$ et tout réel x, on note a^x le nombre $\exp_a(x)$.

Propriété 55

Pour tout réel $a > 0$ et tous réels x et y

$$a^x > 0 \qquad a^0 = 1 \qquad a^{x+y} = a^x a^y \qquad (a^x)^y = a^{xy} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

Démonstration. Soit un réel $a > 0$ et deux réels x et y.

La propriété $a^{x+y} = a^x a^y$ découle de la définition de l'exponentielle de base a.

On peut écrire $a^x = a^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = a^{\frac{x}{2}}a^{\frac{x}{2}} = \left(a^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geqslant 0$. De plus, si $a^x = 0$ alors $a = a^1 = a^{x+1-x} = a^x a^{1-x} = 0$ ce qui est exclu donc $a^x \neq 0$. On conclut donc que $a^x > 0$.

Par propriété des puissances entières, $a^0 = 1$.

Considérons la fonction $g : t \longmapsto a^{xt}$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction linéaire $t \longmapsto xt$ et de la fonction exponentielle de base a, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $g(n) = (a^x)^n$ ».

Initialisation. Comme $g(0) = a^0 = 1$ et $(a^x)^0 = 1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, par propriété de l'exponentielle de base a,

$$g(n+1) = a^{x(n+1)} = a^{nx+x} = a^{nx}a^x = (a^x)^n a^x = (a^x)^{n+1}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = (a^x)^n$.

Soit t et t' deux réels. Alors, $g(t+t') = a^{x(t+t')} = a^{tx+t'x} = a^{tx}a^{t'x} = g(t)g(t')$.

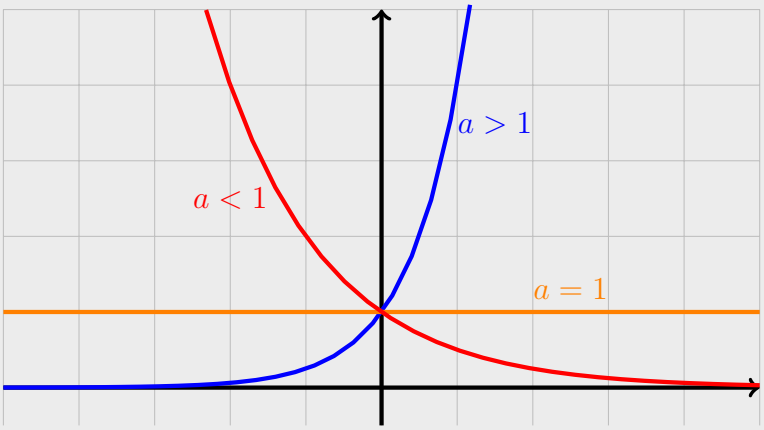
Ainsi, g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = (a^x)^n$ et, pour tous réels t et t', $g(t+t') = g(t)g(t')$ donc, par le théorème 52, g est la fonction exponentielle de base a^x. Ainsi, pour tout réel y, $g(y) = (a^x)^y$ i.e. $a^{xy} = (a^x)^y$.

Comme $a^x a^{-x} = a^{x+(-x)} = a^0 = 1$, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ et, par suite, $a^{x-y} = a^{x+(-y)} = a^x a^{-y} = a^x \times \dfrac{1}{a^y} = \dfrac{a^x}{a^y}$. □

Propriété 56

Soit un réel $a > 0$. La fonction exponentielle de base a est

- strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 1$;
- constante sur $\mathbb{R}$ si $a = 1$;
- strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$;



Démonstration.

• Commençons par le cas $a = 1$. Notons g la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$. Alors, g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = 1 = 1^n$ et, pour tous réels x et y, $g(x)g(y) = 1 \times 1 = 1 = g(x+y)$ donc, par définition, g est l'exponentielle de base 1. Ainsi, pour tout réel x, $1^x = 1$.

• Supposons à présent que $a > 1$. Montrons que, pour tout $x > 0$, $a^x > 1$. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $x > 0$ tel que $a^x \leqslant 1$. Si $a^x = 1$ alors $a = a^1 = a^{\frac{x}{x}} = (a^x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\frac{1}{x}} = 1$ (d'après le premier cas) ce qui est absurde. Ainsi, $a^x < 1$. Considérons un entier $n > x$. Alors, comme $\exp_a$ est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des bornes atteintes (qui sera vu dans le chapitre 18), $\exp_a$ atteint son minimum sur $[0\,;n]$ en un certain réel c et, comme $a^x < 1$ et $x \in [0\,;n]$, $a^c < 1$. De plus, $a^n > 1$ car $a > 1$ (et $n \in \mathbb{N}$) donc $c < n$. Considérons un rationnel $\frac{p}{q}$ compris strictement entre 1 et $\frac{n}{c}$. Comme $\frac{p}{q} > 1$, $p > q$. Alors, comme $0 < a^c < 1$, la suite $((a^c)^n)$ est strictement décroissante donc $(a^c)^p < (a^c)^q$ i.e. $a^{cp} < a^{cq}$. Dès lors, comme la fonction $x \longmapsto x^q$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit que $a^{\frac{cp}{q}} < a^c$ i.e. $a^{\frac{p}{q}c} < a^c$. Or, comme $1 < \frac{p}{q} < \frac{n}{c}$ et $c > 0$, $c < \frac{p}{q}c < n$, ce qui contredit la minimalité de a^c sur $[0\,;n]$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $a^x > 1$. Soit x et x' deux réels tels que $x < x'$. Alors, $a^{x'} = a^{x+(x'-x)} = a^x a^{x'-x}$ et, comme $x < x'$, $x' - x > 0$ donc $a^{x'-x} > 1$. De plus, $a^x > 0$ donc $a^x a^{x'-x} > a^x$ i.e. $a^{x'} > a^x$. On conclut donc que $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• Supposons pour finir que $a < 1$. Commençons par montrer que, pour tout réel x, $\frac{1}{a^x} = (\frac{1}{a})^x$. Pour cela, notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{a^x}$. Alors, comme la fonction $\exp_a$ est dérivable et ne s'annule par sur $\mathbb{R}$, h est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout entier n, $h(n) = \frac{1}{a^n} = (\frac{1}{a})^n$ et, pour tous réels x et y, $h(x)h(y) = \frac{1}{a^x} \times \frac{1}{a^y} = \frac{1}{a^x a^y} = \frac{1}{a^{x+y}} = h(x+y)$ donc, par définition, h est la fonction exponentielle de base $\frac{1}{a}$ i.e. pour tout réel x, $\frac{1}{a^x} = (\frac{1}{a})^x$.

Soit x et x' deux réels tels que $x < x'$. Comme $0 < a < 1$, $\frac{1}{a} > 1$ donc, par le premier cas, $(\frac{1}{a})^x < (\frac{1}{a})^{x'}$. Dès lors, par ce qui précède, $0 < \frac{1}{a^x} < \frac{1}{a^{x'}}$ et donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $a^x > a^{x'}$. Ainsi, $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. □

Théorème 57. (admis)

Il existe un unique réel $a > 0$ tel que la tangente à la courbe de $\exp_a$ en 0 ait une coefficient directeur égal à 1.

Définition 58

Le nombre défini par le théorème précédent s'appelle le nombre d'Euler et se note e.

Remarque 59. On peut montrer que $e \approx 2{,}718$.

Définition 60

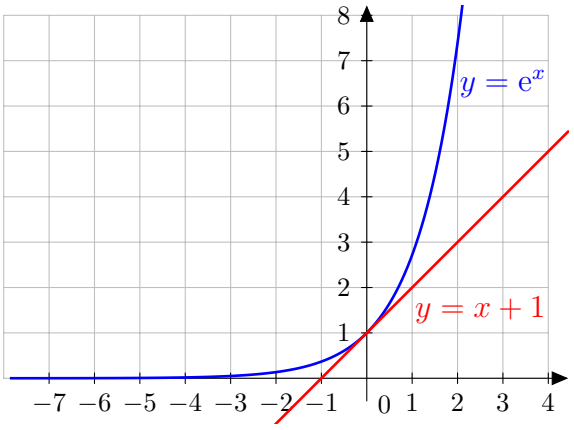
La fonction exponentielle de base e s'appelle la **fonction exponentielle** et on la note exp. Ainsi, pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$.

Remarque 61. Toutes les propriétés algébriques énoncées dans la propriété 55 sont vraies pour $a = e$.

Propriété 62

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. La stricte croissance vient de la Propriété 56 car $e > 1$. Dès lors, par la Propriété 24, f est injective. La surjectivité sur $]0\,;+\infty[$ est admis pour l'instant et découlera du théorème des valeurs intermédiaires (voir chapitre 18). □



Corollaire 63

Pour tous réels a et b,

1. $a = b \iff \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ **2.** $a < b \iff \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ **3.** $a \leqslant b \iff \mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b$.

Démonstration.

1. Ce premier point est une conséquence de l'injectivité de la fonction exponentielle.
2. Ce deuxième point est une conséquence de la stricte monotonie de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.
3. Ce troisième point est une conséquence des deux précédents.

□

Exemple 64. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

$$(E_1)\ \mathrm{e}^x = 1 \qquad (E_2)\ \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^x \qquad (I_1)\ \mathrm{e}^{2x} \leqslant -2 \qquad (I_2)\ \mathrm{e}^{x^2} > \exp(6-5x).$$

Solution.

• Pour tout réel x,

$$(E_1) \iff \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \iff x = 0.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est $\{0\}$.

• Pour tout réel x,

$$(E_2) \iff x^2 = x \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x-1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est $\{0\,;1\}$.

• Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$ donc l'ensemble des solutions de (I_1) est $\varnothing$.

• Pour tout réel x,

$$(I_2) \iff \mathrm{e}^{x^2} > \mathrm{e}^{6-5x} \iff x^2 > 6-5x \iff x^2+5x-6 > 0.$$

Le discriminant du trinôme $x \longmapsto x^2+5x-6$ est $\Delta = 5^2 - 4\times 1\times(-6) = 49 > 0$ donc celui-ci possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2\times 1} = -6 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2\times 1} = 1$$

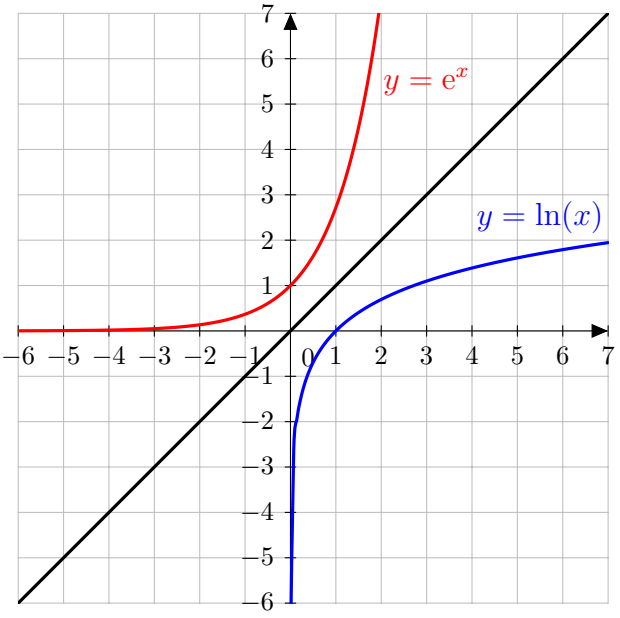
De plus, $a = 1 > 0$ donc $x^2 - 5x + 6 > 0$ si et seulement si $x \in \,]-\infty\,;-6[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

On conclut que l'ensemble des solutions de (I_2) est $]-\infty\,;-6[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

4) Fonctions logarithmes

Définition 65

La fonction logarithme népérien est le bijection réciproque de la fonction exponentielle. Elle est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.



Propriété 66

1. $\ln(1) = 0$ **2.** $\ln(e) = 1$ **3.** $\forall a > 0,\ \mathrm{e}^{\ln(a)} = a$ **4.** $\forall b \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^b) = b$.

5. Pour tous réels strictement positifs a et b,

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a).$$

6. Pour tous réels a_1, a_2, ..., a_n strictement positifs,

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n).$$

7. Pour tout réel x et tout réel strictement positif a, $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Démonstration.

1. Comme $\mathrm{e}^0 = 1$, $\ln(1) = 0$.

2. De même, comme $\mathrm{e}^1 = e$, $\ln(e) = 1$.

3. Comme exp et ln sont des bijections réciproques, pour tout réel $a > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(a)} = a$.

4. Pour la même raison, pour tout réel b, $\ln(\mathrm{e}^b) = b$.

5. Soit a et b deux réels strictement positifs. D'après **3.**, $a = \mathrm{e}^{\ln(a)}$ et $b = \mathrm{e}^{\ln(b)}$ donc $ab = \mathrm{e}^{\ln(a)}\mathrm{e}^{\ln(b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)}$ et ainsi, d'après **4.**, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(n)$.

En particulier, $0 = \ln(1) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ donc $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

Il s'ensuit que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

De plus, $2\ln\left(\sqrt{a}\right) = \ln\left(\sqrt{a}\right) + \ln\left(\sqrt{a}\right) = \ln\left(\sqrt{a} \times \sqrt{a}\right) = \ln(a)$ donc $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

6. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « pour tout $(a_1, a_2, ..., a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n)$ ».

Initialisation. Pour $n = 1$, le résultat est immédiat puisque, pour tout réel a_1, $\ln(a_1) = \ln(a_1)$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Soit $(a_1, a_2, ..., a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Alors, en appliquant le point **5.** avec $a = a_1 a_2 \cdots a_n$ et $b = a_{n+1}$, il vient

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}) = \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) = \ln(a_1 a_2 \cdots a_n) + \ln(a_{n+1})$$

et donc, comme $\mathcal{P}(n)$ est vraie,

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}) = \ln(ab) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots \ln(a_n) + \ln(a_{n+1}).$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors, $\mathrm{e}^{x\ln(a)} = (\mathrm{e}^{\ln(a)})^x = a^x$ donc $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

□

Exemple 67. Simplifier l'écriture des nombres suivants.

$$A = \ln(125) - 2\ln(10) + \ln(4) \qquad B = \ln(2-\sqrt{3}) + \ln(2+\sqrt{3}) \qquad C = \ln\left(\frac{1}{e}\right).$$

Solution.

$A = \ln(125 \times 4) - \ln(10^2) = \ln(500) - \ln(100) = \ln\left(\frac{500}{100}\right) = \ln(5)$.

$B = \ln((2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})) = \ln(2^2 - \sqrt{3}^2) = \ln(4-3) = \ln(1) = 0$.

$C = -\ln(e) = -1$ (ou $C = \ln(e^{-1}) = -1$).

Propriété 68

Pour tout réel $a > 0$ et tout réel x, $a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$.

Démonstration. Soit un réel $a > 0$ et un réel x. Alors, $\mathrm{e}^{x\ln(a)} = (\mathrm{e}^{\ln(a)})^x = a^x$. □

Propriété 69

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a < b$. Alors, comme $a = \mathrm{e}^{\ln(a)}$ et $b = \mathrm{e}^{\ln(b)}$, $\mathrm{e}^{\ln(a)} < \mathrm{e}^{\ln(b)}$ et donc, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\ln(a) < \ln(b)$. Ainsi, ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. □

Corollaire 70

Pour tous réels strictement positifs a et b,

1. $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ **2.** $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$ **3.** $\ln(a) \leqslant \ln(b) \iff a \leqslant b$.

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la Corollaire 63. □

Exemple 71. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(E_1) $\ln(x) \geqslant 0$ (E_2) $\ln(x) = \ln(x^2-2)$ (I_1) $\ln(2-x^2) > 5$ (I_2) $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 6 < 0$.

Solution.

• L'équation (E_1) a un sens si et seulement si $x > 0$ et, pour tout réel $x > 0$,

$$(E_1) \iff \ln(x) \geqslant \ln(1) \iff x \geqslant 1.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) est $[1\,;+\infty[$.

• L'inéquation (E_2) a un sens si et seulement si $x > 0$ et $x^2 - 2 > 0$. Or, pour tout réel $x > 0$,

$$x^2 - 2 > 0 \iff x^2 > 2 \iff \sqrt{x^2} > \sqrt{2} \iff |x| > \sqrt{2} \iff x > \sqrt{2}.$$

Ainsi, (E_2) a un sens si et seulement si $x > \sqrt{2}$ et, pour tout réel $x > \sqrt{2}$,

$$(E_2) \iff x = x^2 - 2 \iff x^2 - x - 2 = 0$$

Or, le discriminant du trinôme $x \longmapsto x^2 - x - 2$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 2$$

Parmi ces deux nombres, seul 2 est strictement supérieur à $\sqrt{2}$ donc on conclut que l'ensemble des solutions de (E_2) est $\{2\}$.

• L'inéquation (I_1) a un sens si et seulement si $2 - x^2 > 0$. Or, pour tout réel x,

$$2 - x^2 > 0 \iff x^2 < 2 \iff \sqrt{x^2} < \sqrt{2} \iff |x| < \sqrt{2} \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Ainsi, (I_1) a un sens si et seulement si $x \in \left]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right[$ et, pour tout $x \in \left]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right[$,

$$(I_1) \iff \ln(2-x^2) > \ln(\mathrm{e}^5) \iff 2-x^2 > \mathrm{e}^5 \iff x^2 < 2-\mathrm{e}^5$$

Or, $e > 2$ donc $\mathrm{e}^5 > 2$ et ainsi $2-\mathrm{e}^5 < 0$. Comme, pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$, on conclut que l'ensemble des solutions de (I_1) est $\varnothing$.

• Posons, pour tout réel x, $X = \mathrm{e}^x$. Alors, (I_2) se réécrit $X^2-5X+6 < 0$. Or, le discriminant du trinôme $X \longmapsto X^2-5X+6$ est $\Delta = (-5)^2 - 4\times 1\times 6 = 1 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times 1} = 2 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times 1} = 3$$

De plus, $a = 1 > 0$ donc $X^2-5X+6 < 0$ si et seulement si $X \in \,]2\,;3[$. Dès lors,

$$(I_2) \iff 2 < \mathrm{e}^x < 3 \iff \ln(2) < x < \ln(3).$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (I_2) est $]\ln(2)\,;\ln(3)[$.

Définition 72

On définit le logarithme décimal d'un nombre réel $x > 0$ par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

Propriété 73

La fonction $\log : x \longmapsto \log(x)$ réalise un bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est $x \longmapsto 10^x$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\log(10^x) = \frac{\ln(10^x)}{\ln(10)} = \frac{x\ln(10)}{\ln(x)} = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x)$$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$10^{\log(x)} = \mathrm{e}^{\log(x)\ln(10)} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{\ln(10)}\times\ln(10)} = \mathrm{e}^{\ln(x)} = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}(x).$$

On en déduit que les fonction log et $x \longmapsto 10^x$ sont des bijections réciproques. □

Remarque 74. Les propriétés calculatoires du logarithme décimal sont essentiellement les mêmes que celui du logarithme népérien en remplaçant e par 10. Ainsi, $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$, pour tout réel x, $\log(10^x) = x$. De plus, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et tout réel x,

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \qquad \log(a^x) = x\log(a).$$

Remarque 75. De manière générale, si $a > 0$ est un réel différent de 1, on peut définir la fonction logarithme de base a, notée $\log_a$, par

$$\log_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}$$

Cette fonction réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est $\exp_a$.

5) Fonctions trigonométriques

Définition 76

On définit les fonctions sinus et cosinus par

$$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

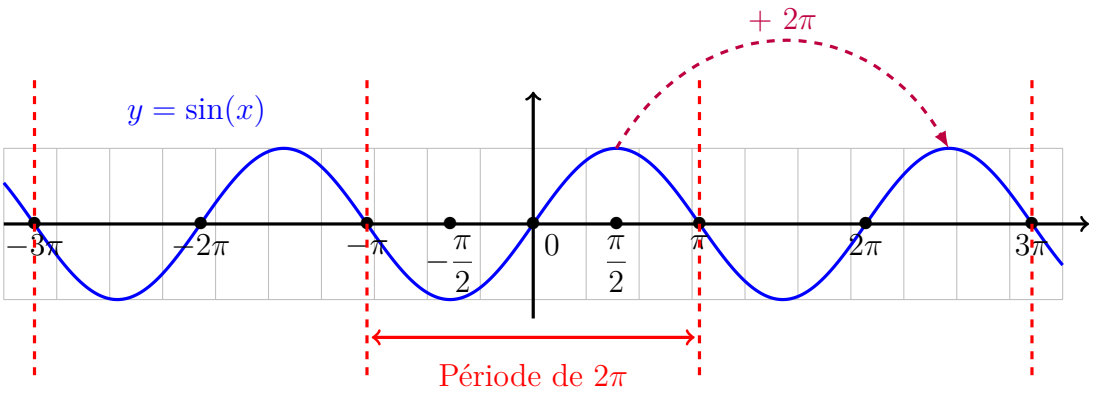
Propriété 77

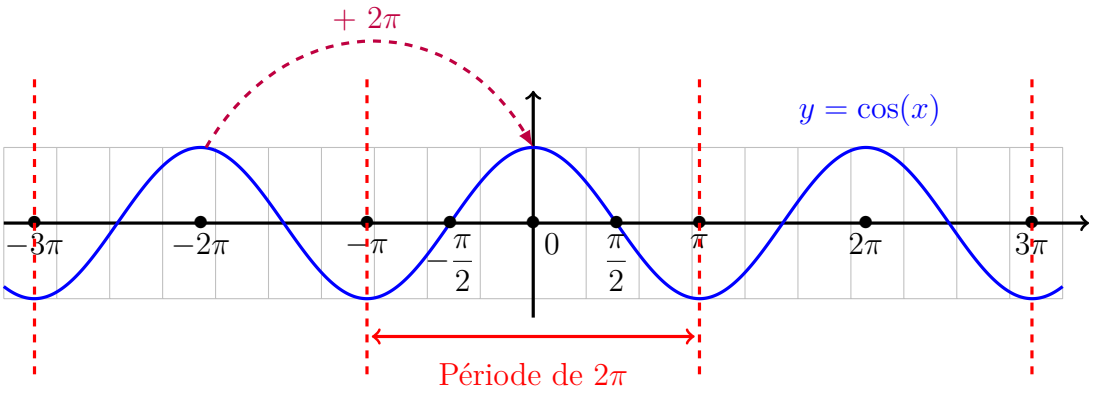
1. La fonction sinus est impaire, 2π-périodique et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction cosinus est paire, 2π-périodique et bornée sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

1. On a vu dans le chapitre 6 que, pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc la fonction cosinus est paire, 2π-périodique et bornée par -1 et 1.
2. On a vu dans le chapitre 6 que, pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc la fonction sinus est impaire, 2π-périodique et bornée par -1 et 1.

□





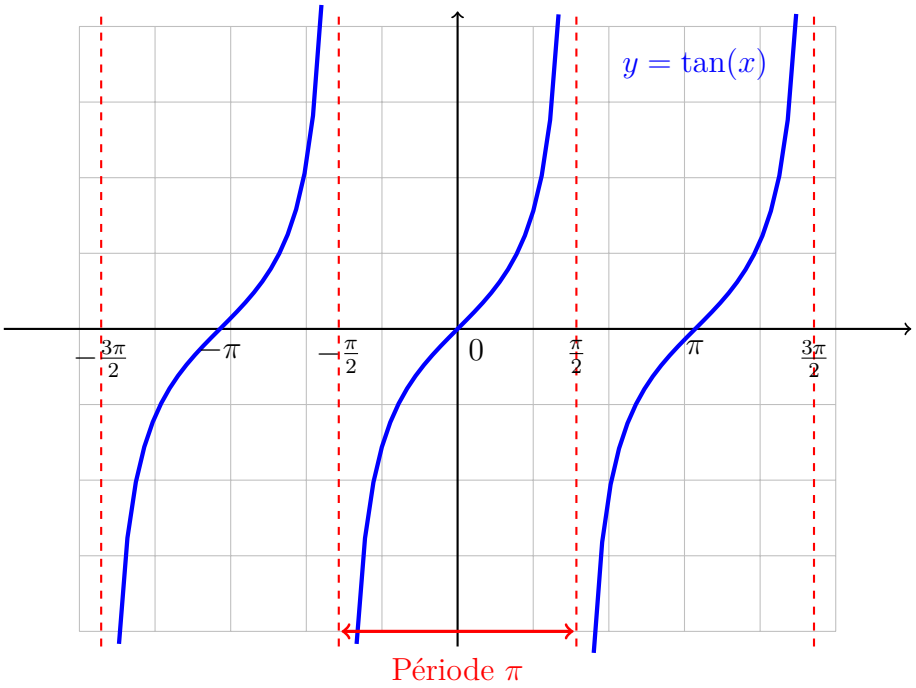
Définition 78

On définit la **fonction tangente** par

$$\begin{array}{rccc} \tan : & \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$$

Propriété 79

La fonction tan est impaire et $\pi-$périodique.

Démonstration. On a vu que dans le chapitre 6 que, si $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ alors $-x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$ donc tan est une fonction impaire.

De plus, on a également vu que, si $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ alors $x + \pi \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ donc tan est une fonction π-périodique. $\square$