⧫ Chapitre 8. Généralités sur les fonctions numériques

Dans tout le chapitre, la plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ et si f est une fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans ce repère.

I. — Définition et opérations

Définition 1

Une **fonction numérique** (ou fonction réelle d'une variable réelle) est une fonction dont l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des parties de $\mathbb{R}$.
Si f est une fonction numérique, l'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe. On le note $\mathcal{D}_f$.

Exemple 2.

1. La fonction $f : x \longmapsto x^3 + 1$ est une fonction numérique et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. La fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{x-1}$ est une fonction numérique et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
3. La focntion $h : x \longmapsto \sqrt{2-x}$ est une fonction numérique est $\mathcal{D}_h =]-\infty\,;2]$.

Définition 3

Soit f et g deux fonctions numériques et λ et μ deux réels. On définit :

1. la fonction $\lambda f + \mu g$ par
$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \quad (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x).$$
On a donc $\mathcal{D}_{\lambda f + \mu g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
2. la fonction fg par
$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \quad (fg)(x) = f(x)g(x).$$
On a donc $\mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
3. la fonction $\frac{f}{g}$ par
$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap E \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
où E désigne l'ensemble des éléments x de $\mathcal{D}_g$ tel que $g(x) \neq 0$. On a donc $\mathcal{D}_{\frac{f}{g}} = \mathcal{D}_f \cap E = \mathcal{D}_f \cap (\mathcal{D}_g \setminus \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) = 0\})$.

Exemple 4. On considère les fonctions numériques

$$f : x \longmapsto \sqrt{3x-1} \qquad \text{et} \qquad g : x \longmapsto x^2 - 5x + 6.$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$.
2. Déterminer les fonctions $2f - 3g$, fg et $\frac{f}{g}$ en précisant, pour chacune d'elles, son ensemble de définition.

II. — Parité et périodicité

1) Parité

Définition 5

On dit qu'un ensemble de nombres réels E est **centré en** 0 (ou symétrique par rapport à 0) si, pour tout $x \in E$, $-x \in E$.

Exemple 6. Les ensembles suivants sont-ils centrés en 0 ?

$E_1 = [-1\,;1]$	$E_2 = [-1\,;2]$	$E_3 = \mathbb{N}$	$E_4 = \mathbb{Z}$
$E_5 =]-3\,;-1] \cup [1\,;3[$	$E_6 =]-3\,;3[$	$E_7 =]-5\,;5]$	$E_8 = \mathbb{R}^*$

Définition 7

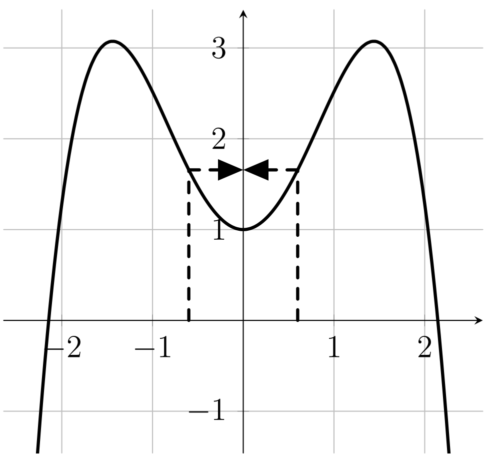
Soit f une fonction numérique. On dit que f est une fonction **paire** si $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et si, pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.

Exemple 8.

1. La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est une fonction paire. En effet, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout réel x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
2. De manière générale, pour tout entier naturel pair n, $f_n : x \longmapsto x^n$ est paire.
3. La fonction $g : x \longmapsto x^2 + x$ n'est pas paire car $g(-1) = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$ et $g(1) = 1^2 + 1 = 2$ donc $g(-1) \neq g(1)$.

Propriété 9

La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Définition 10

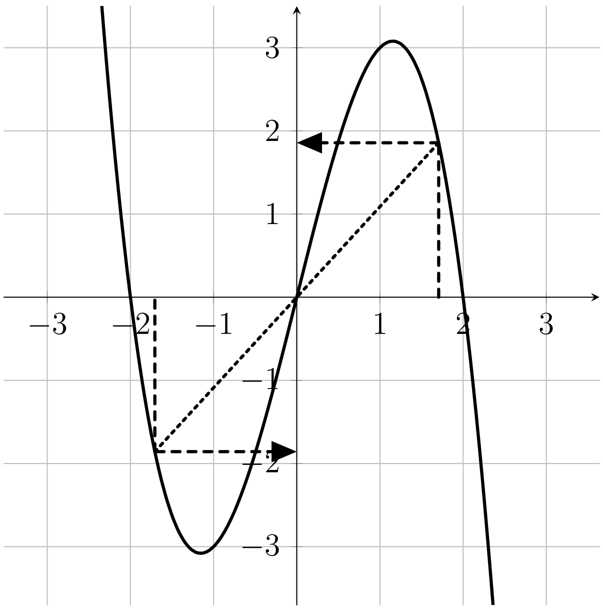
Soit f une fonction numérique. On dit que f est une fonction **impaire** si $\mathcal{D}_f$ est centré en 0 et si, pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Exemple 11.

1. La fonction $f : x \longmapsto x^3$ est une fonction impaire. En effet, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ est centré en 0 et, pour tout réel x, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.
2. De manière générale, pour tout entier naturel impair n, $f_n : x \longmapsto x^n$ est impaire.
3. La fonction $g : x \longmapsto x^2 + x$ n'est pas impaire car $g(-1) = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0$ et $g(1) = 1^2 + 1 = 2$ donc $g(-1) \neq -g(1)$.
   Ainsi, d'après l'exemple 8, la fonction g n'est ni paire ni impaire.

Propriété 12

La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Définition 13

Étudier la parité d'une fonction numérique f, c'est déterminer si f est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre.

Exemple 14. Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{x}{x^2+1} \qquad g : x \longmapsto \frac{x^4}{x^2-1} \qquad h : x \longmapsto \frac{x}{x-1} \qquad k : x \longmapsto \frac{x+1}{x^2+1}.$$

2) Périodicité

Définition 15

Soit f une fonction numérique et T un réel strictement positif. On dit que f est **T-périodique** (ou périodique de période T) si :

- pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $x + T \in \mathcal{D}_f$.
- pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x+T) = f(x)$.

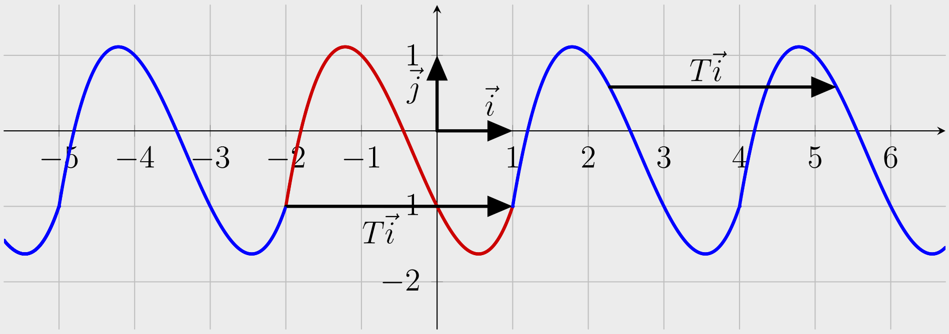
Exemple 16.

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 1$ est périodique de période T pour tout réel $T > 0$.
2. Montre que la fonction $g : x \longmapsto \cos(2x)$ est π-périodique.

Remarque 17. Si f est $T-$périodique, elle est également kT-périodique pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Dans la pratique, on cherche en général à déterminer la plus petite période de f (si elle existe).

Propriété 18

Soit f une fonction T-périodique. La courbe de f est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$. Autrement dit, la courbe $\mathscr{C}_f$ est composé d'un motif de longueur T qui se répète.



III. — Propriétés liées à l'ordre

1) Monotonie

Définition 19

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$. On dit que

- f est **croissante** sur I si

$$\forall (a\,;b) \in I^2 \qquad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$$

- f est **strictement croissante** sur I si

$$\forall (a\,;b) \in I^2 \qquad a < b \Longrightarrow f(a) < f(b)$$

- f est **décroissante** sur I si

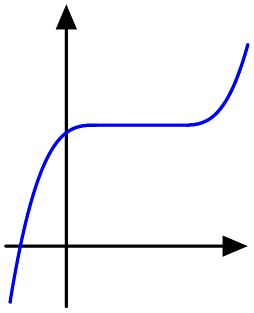
$$\forall (a\,;b) \in I^2 \qquad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b)$$

- f est **strictement décroissante** sur I si

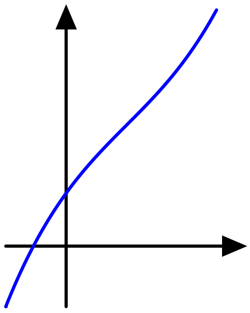
$$\forall (a\,;b) \in I^2 \qquad a < b \Longrightarrow f(a) > f(b)$$

- f est **constante** sur I si

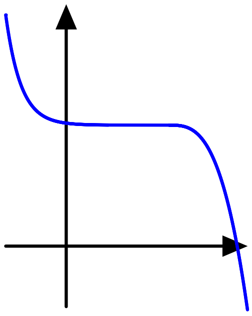
$$\forall (a\,;b) \in I^2 \qquad f(a) = f(b)$$



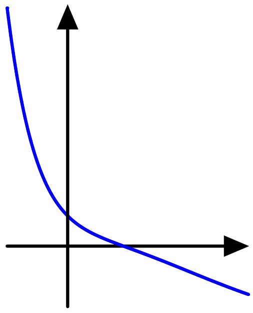
courbe d'une fonction croissante



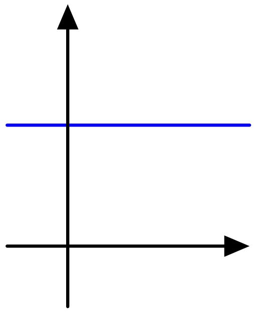
courbe d'une fonction strictement croissante



courbe d'une fonction décroissante



courbe d'une fonction strictement décroissante



courbe d'une fonction constante

Remarque 20.

1. Une fonction croissante converse l'ordre alors qu'une fonction décroissante renverse l'ordre.
2. Une fonction strictement croissante (resp. décroissante) sur I est une fonction croissante (resp. décroissante) sur I.
3. Une fonction constante est à la fois croissante et décroissante.

Exemple 21.

1. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto -3x + 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction $g : x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Définition 22

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.

1. On dit que f est (strictement) **monotone** sur I si f est (strictement) croissante sur I ou (strictement) décroissante sur I.
2. **Étudier les variations** de f, c'est partitionner $\mathcal{D}_f$ en intervalles les plus grands possibles sur lesquels f est monotone.

Exemple 23.

1. la fonction $f : x \longmapsto -3x + 1$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
2. la fonction $g : x \longmapsto x^2$ n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$ mais elle l'est sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0]$ et $[0\,;+\infty[$.

Propriété 24

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. Si f est strictement monotone sur I alors f est injective sur I.

Remarque 25. La réciproque de la propriété précédente est fausse : une fonction numérique peut être injective sur un intervalle sans être pour autant strictement monotone.

2) Fonctions majorées, minorées, bornées

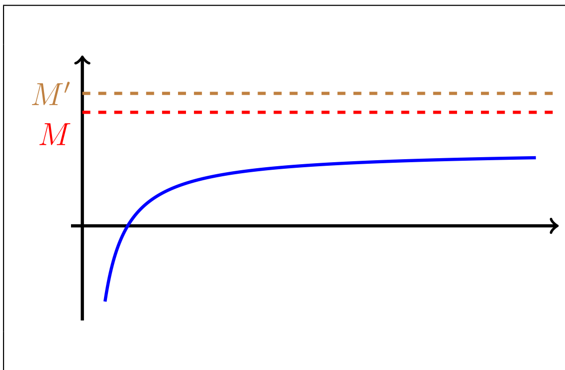
Définition 26

Soit f une fonction numérique. On dit que

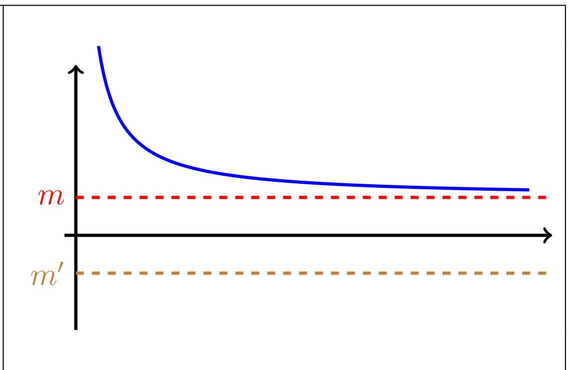
- f est **majorée** sur $\mathcal{D}_f$ s'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \leqslant M$; le nombre M est alors appelé un **majorant** de f sur $\mathcal{D}_f$;
- f est **minorée** sur $\mathcal{D}_f$ s'il existe un réel m tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \geqslant m$; le nombre m est alors appelé un **minorant** de f sur $\mathcal{D}_f$;
- f est **bornée** sur $\mathcal{D}_f$ si elle est à la fois majorée et minorée sur $\mathcal{D}_f$ c'est-à-dire s'il existe des réels m et M tels que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Remarque 27.

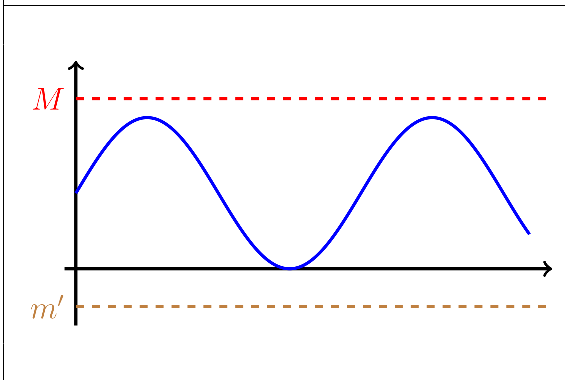
1. Les nombres m et M ci-dessus doivent être indépendants de x.
2. Un majorant (resp. un minorant), s'il existe, n'est jamais unique. En effet, si f est majorée (resp. minorée) par M (resp. m) alors elle est aussi majorée (resp. minorée) par tout réel $M' \geqslant M$ (resp. $m' \leqslant m$).



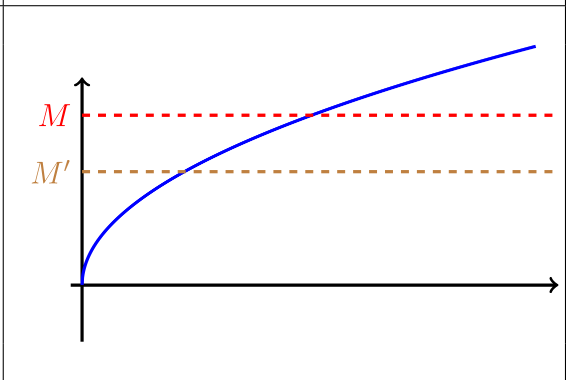
courbe d'une fonction majorée



courbe d'une fonction minorée



courbe d'une fonction bornée



courbe d'une fonction non majorée

Exemple 28.

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ est minorée sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto 1 + \cos(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

3) Extremums

Définition 29

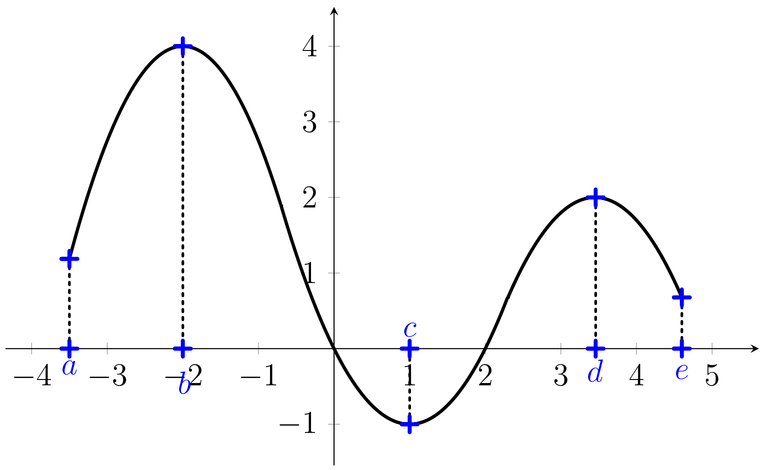
Soit f une fonction numérique. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. On dit que f présente :

1. un **minimum local** en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap J$, $f(x) \geqslant f(a)$;
2. un **maximum local** en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap J$, $f(x) \leqslant f(a)$;
3. un **minimum global** en a sur $\mathcal{D}_f$ si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \geqslant f(a)$;
4. un **maximum global** en a sur $\mathcal{D}_f$ si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \leqslant f(a)$.

Un minimum ou un maximum local (resp. global) est appelé un **extremum** local (resp. global).

Remarque 30. Un extremum global est un extremum local (il suffit de prendre $J = \mathbb{R}$) mais la réciproque est fausse.

Exemple 31. On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[a\,;e]$.



La fonction f présente 5 extremums : 3 minimums locaux en a, c et e et 2 maximums locaux en b et d. De plus, en b et en c, les extremums sont globaux sur $I = [a\,;e]$.

Remarque 32. Si $a \in \mathcal{D}_f$ et s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans $\mathcal{D}_f$ alors f présente un extremum local en a si et seulement si f change de variation en a.

4) Positions relatives de deux courbes

Définition 33

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un même ensemble E. On dit que :

1. $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathscr{C}_g$ sur E si, pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant g(x)$;
2. $\mathscr{C}_f$ est **en dessus** de $\mathscr{C}_g$ sur E si, pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$.

Remarque 34. Dire qu'une fonction f est majorée (resp. minorée) par M (resp. m) revient à dire que $\mathscr{C}_f$ est en dessous (resp. au-dessus) de la droite d'équation $y = M$ (resp. $y = m$).

Méthode 35

Étudier les positions relatives sur un ensemble E des courbes de deux fonctions f et g revient à comparer, pour tout réel $x \in E$, les nombres $f(x)$ et $g(x)$. Une méthode standard pour effectuer une telle comparaison consiste à étudier le signe de la différence $d(x) = f(x) - g(x)$ en fonction de x. En effet,

1. si, pour tout $x \in E$, $d(x) \geqslant 0$ alors $f(x) \geqslant g(x)$ donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$;
2. si, pour tout $x \in E$, $d(x) \leqslant 0$ alors $f(x) \leqslant g(x)$ donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}_g$;

Remarque 36. Si $d(x)$ change de signe en fonction x, on étudie les positions relatives de f sur chaque intervalle de E où $d(x)$ reste de signe constant.

Exemple 37.

1. Étudier les positions relatives sur $\mathbb{R}$ des courbes des fontions $f : x \longmapsto x$ et $g : x \longmapsto x^2$.
2. Même question avec $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $g : x \longmapsto x + 1$.

IV. — Fonctions usuelles

1) Fonctions puissances entières et racine carrée

a) Fonctions puissances entières

Définition 38

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On définit la **fonction puissance** n par $f_n : x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ et sur $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$.

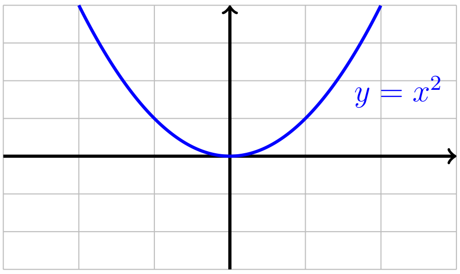
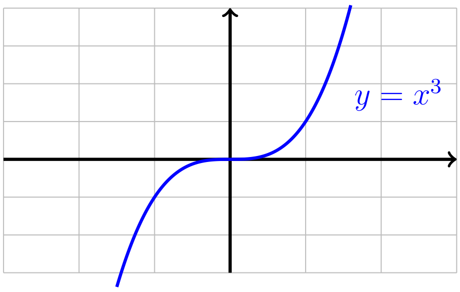
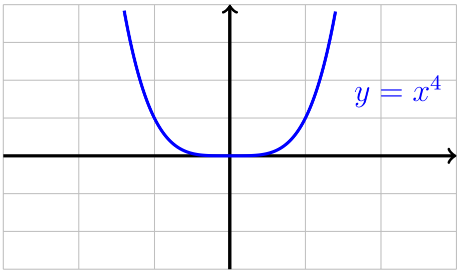
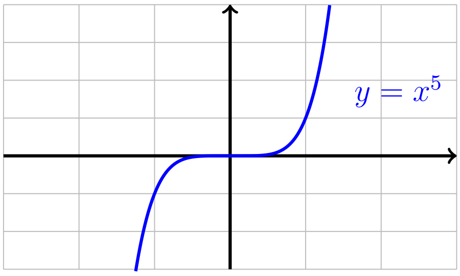
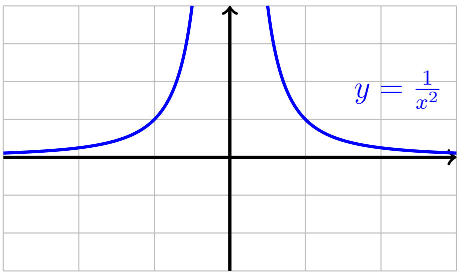
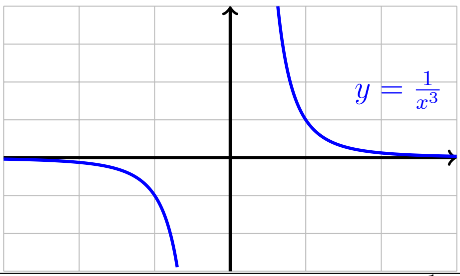
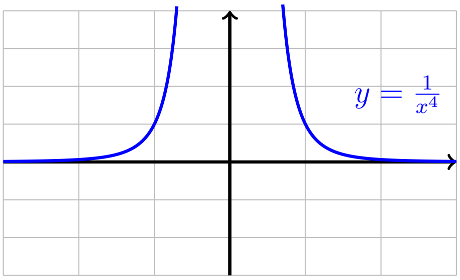
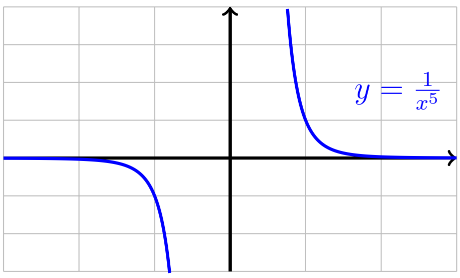
Remarque 39.

1. Si $n = 0$ alors f_n est la fonction constante égale à 1.
2. Lorsque $n < 0$, on écrit plutôt f_n sous la forme $f_n : x \longmapsto \frac{1}{x^{-n}}$ avec $-n > 0$. Ainsi, plutôt que d'écrire $f_{-2} : x \longmapsto x^{-2}$, on écrit $f_{-2} : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$.
3. La fonction carré $x \longmapsto x^2$ et la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sont des cas particuliers correspondant respectivement à $n = 2$ et $n = -1$.

Propriété 40

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et f_n la fonction puissance n.

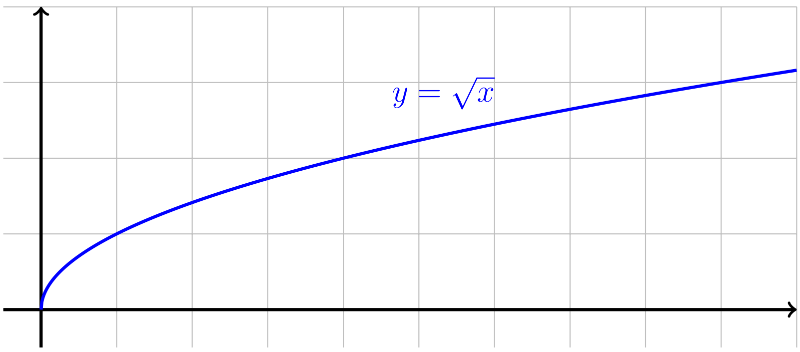
1. Si $n > 0$ et si n est impair alors f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si $n > 0$ et si n est pair alors f_n est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $]0\,;+\infty]$.
3. Si $n < 0$ et si n est impair alors f_n est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ (mais pas sur la réunion des deux).
4. Si $n < 0$ et si n est pair alors f_n est strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$ et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
5. Dans tous les cas, la fonction f_n a la même parité que n.

	
courbe de la fonction carré $x \longmapsto x^2$	courbe de la fonction cube $x \longmapsto x^3$
	
courbe de la fonction $x \longmapsto x^4$	courbe de la fonction $x \longmapsto x^5$
	
courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$	courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$
	
courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^4}$	courbe de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^5}$

b) La fonction racine carrée

Définition 41

La **fonction racine carrée** est la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.



Propriété 42

La fonction racine carrée réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ dont la bijection réciproque est la fonction
$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

2) Fonctions homographiques

Définition 43

On dit qu'une fonction f est une **fonction homographique** s'il existe des réels a, b, c et d avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$ tels que, pour tout réel $x \neq -\frac{d}{c}$,
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$
En particulier, une fonction homographique est le quotient de deux fonctions affines.

Remarque 44. La condition $ad - bc \neq 0$ assure que la fonction f n'est pas constante. De plus, on écarte le cas $c = 0$, qui correspond aux fonctions affines.

Exemple 45. Justifier que les fonctions suivantes sont des fonctions homographiques et déterminer, dans chaque cas, l'ensemble de définition.

$f : x \longmapsto \dfrac{x-3}{2x+4}$ $\quad$ $g : x \longmapsto \dfrac{3}{x+4}$ $\quad$ $h : x \longmapsto \dfrac{-3+2x}{-5x}$ $\quad$ La fonction inverse $i : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Propriété 46. — Forme réduite d'une fonction homographique

Soit f une fonction homographique. Alors, il existe des réels α, β et γ tels que
$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) = \alpha + \frac{\beta}{x-\gamma}.$$
Cette écriture s'appelle la forme réduite de f.

Exemple 47. Déterminer les formes réduites des fonctions f, g et h de l'exercice 45

Propriété 48

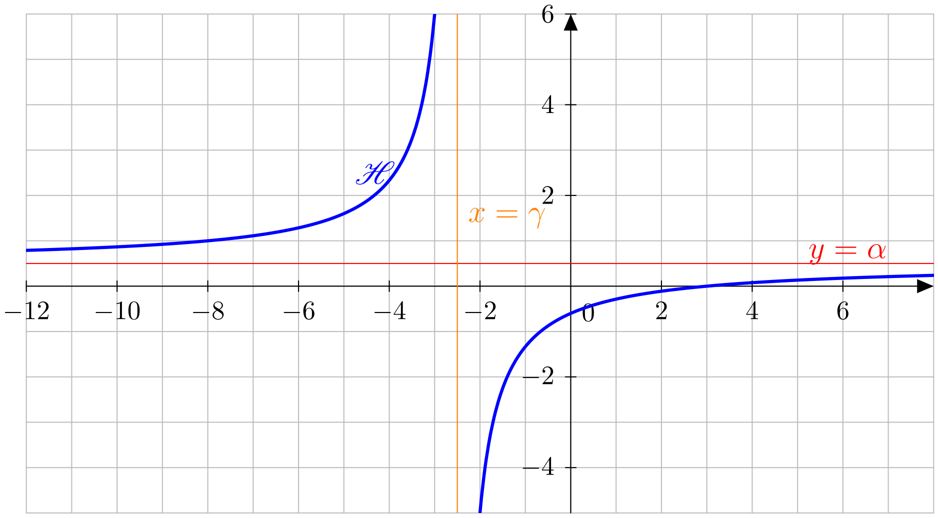
Soit $f : x \longmapsto \alpha + \frac{\beta}{x-\gamma}$ une fontion homographique écrite sous forme réduite. Alors,

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\gamma\}$;
2. si $\beta > 0$ alors f est strictement décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;\gamma[$ et $]\gamma\,;+\infty[$;
3. si $\beta < 0$ alors f est strictement croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;\gamma[$ et $]\gamma\,;+\infty[$;
4. dans tous les cas, f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{\gamma\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ et sa bijection réciproque est une fonction homographique.

Exemple 49. Déterminer les variations des fonctions f, g, h et i de l'exemple 45.

Définition 50

La courbe $\mathscr{H}$ d'une fonction homographique f est appelée **une hyperbole**. Elle est composée de deux morceaux appelés les **branches** de $\mathscr{H}$.
Si l'écriture sous forme réduite de f est $f : x \longmapsto \alpha + \frac{\beta}{x-\gamma}$ alors la droite d'équation $y = \alpha$ est appelée **asymptote horizontale** de $\mathscr{H}$ et la droite d'équation $x = \gamma$ est appelée **asymptote verticale** de $\mathscr{H}$.



Remarque 51. En particulier, la courbe de la fonction inverse est une hyperbole.

3) Fonctions exponentielles

Théorème 52

Soit un réel $a > 0$. Il existe une unique fonction f_a dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_a(n) = a^n$;
2. pour tous réels x et y, $f_a(x+y) = f_a(x)f_a(y)$.

Définition 53

Soit un réel $a > 0$. La fonction f_a définie par le théorème précédent s'appelle la **fonction exponentielle de base** a. On la note $\exp_a(x)$.

Notation 54. Pour tout réel $a > 0$ et tout réel x, on note a^x le nombre $\exp_a(x)$.

Propriété 55

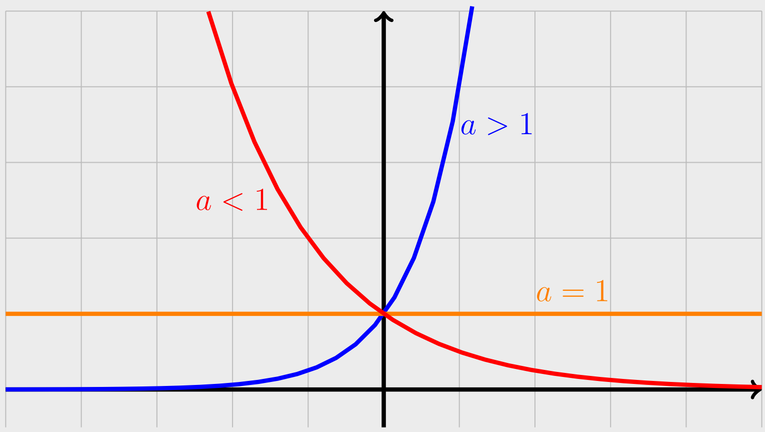
Pour tout réel $a > 0$ et tous réels x et y

$$a^x > 0 \qquad a^0 = 1 \qquad a^{x+y} = a^x a^y \qquad (a^x)^y = a^{xy} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

Propriété 56

Soit un réel $a > 0$. La fonction exponentielle de base a est

- strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 1$;
- constante sur $\mathbb{R}$ si $a = 1$;
- strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$;



Théorème 57

Il existe un unique réel $a > 0$ tel que la tangente à la courbe de $\exp_a$ en 0 ait une coefficient directeur égal à 1.

Définition 58

Le nombre défini par le théorème précédent s'appelle le nombre d'Euler et se note e.

Remarque 59. On peut montrer que $e \approx 2{,}718$.

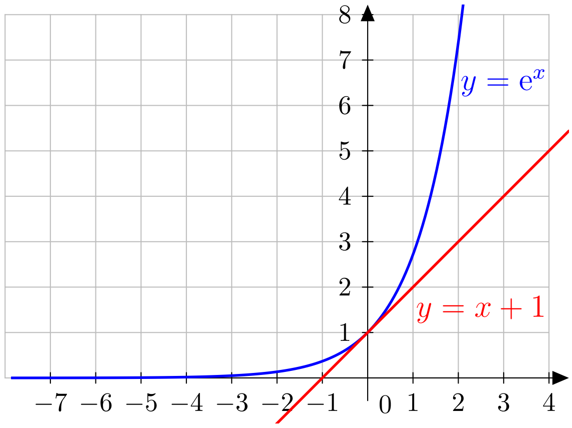
Définition 60

La fonction exponentielle de base e s'appelle la **fonction exponentielle** et on la note exp. Ainsi, pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$.

Remarque 61. Toutes les propriétés algébriques énoncées dans la propriété 55 sont vraies pour $a = e$.

Propriété 62

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.



Corollaire 63

Pour tous réels a et b,

1. $a = b \iff \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ **2.** $a < b \iff \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$ **3.** $a \leqslant b \iff \mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b$.

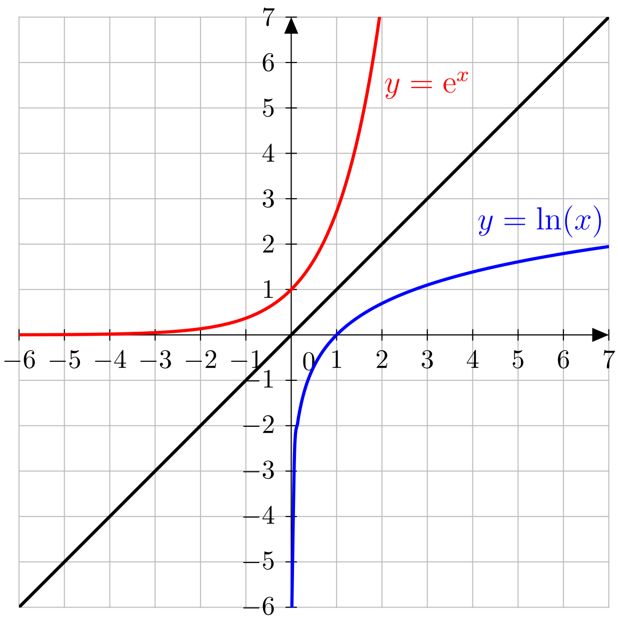
Exemple 64. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

$$(E_1)\ \mathrm{e}^x = 0 \qquad (E_2)\ \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^x \qquad (I_1)\ \mathrm{e}^{2x} \leqslant -2 \qquad (I_2)\ \mathrm{e}^{x^2} > \exp(6 - 5x).$$

4) Fonctions logarithmes

Définition 65

La fonction logarithme népérien est le bijection réciproque de la fonction exponentielle. Elle est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.



Propriété 66

1. $\ln(1) = 0$ **2.** $\ln(e) = 1$ **3.** $\forall a > 0,\quad \mathrm{e}^{\ln(a)} = a$ **4.** $\forall b \in \mathbb{R},\quad \ln(\mathrm{e}^b) = b$.

5. Pour tous réels strictement positifs a et b,

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a).$$

6. Pour tous réels a_1, a_2, ..., a_n strictement positifs,

$$\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n).$$

7. Pour tout réel x et tout réel strictement positif a, $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

Exemple 67. Simplifier l'écriture des nombres suivants.

$$A = \ln(125) - 2\ln(10) + \ln(4) \qquad B = \ln(2-\sqrt{3}) + \ln(2+\sqrt{3}) \qquad C = \ln\left(\frac{1}{e}\right).$$

Propriété 68

Pour tout réel $a > 0$ et tout réel x, $a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$.

Propriété 69

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Corollaire 70

Pour tous réels strictement positifs a et b,

1. $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ **2.** $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$ **3.** $\ln(a) \leqslant \ln(b) \iff a \leqslant b$.

Exemple 71. — Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(E_1) $\ln(x) \geqslant 0$ (E_2) $\ln(x) = \ln(x^2 - 2)$ (I_1) $\ln(2 - x^2) > 5$ (I_2) $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 6 < 0$.

Définition 72

On définit le logarithme décimal d'un nombre réel $x > 0$ par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

Propriété 73

La fonction log : $x \longmapsto \log(x)$ réalise un bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est $x \longmapsto 10^x$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 74. Les propriétés calculatoires du logarithme décimal sont essentiellement les mêmes que celui du logarithme népérien en remplaçant e par 10. Ainsi, $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$, pour tout réel x, $\log(10^x) = x$. De plus, pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et tout réel x,

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$$
$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b) \qquad \log(a^x) = x\log(a).$$

Remarque 75. De manière générale, si $a > 0$ est un réel différent de 1, on peut définir la fonction logarithme de base a, notée $\log_a$ par

$$\log_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{array}$$

Cette fonction réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est $\exp_a$.

5) Fonctions trigonométriques

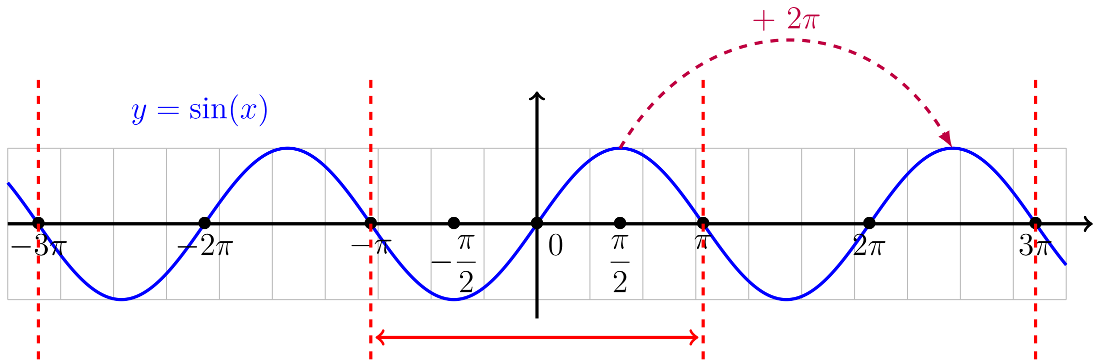
Définition 76

On définit les fonctions sinus et cosinus par

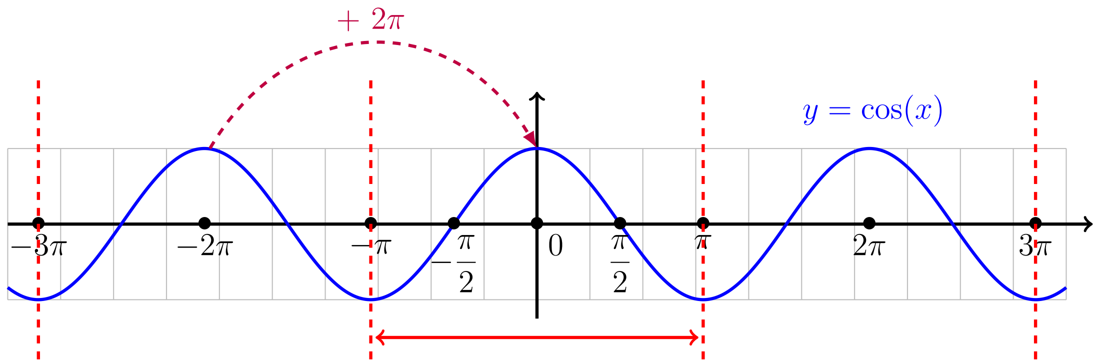
$$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

Propriété 77

1. La fonction sinus est impaire, 2π-périodique et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction cosinus est paire, 2π-périodique et bornée sur $\mathbb{R}$.



Période de 2π



Période de 2π

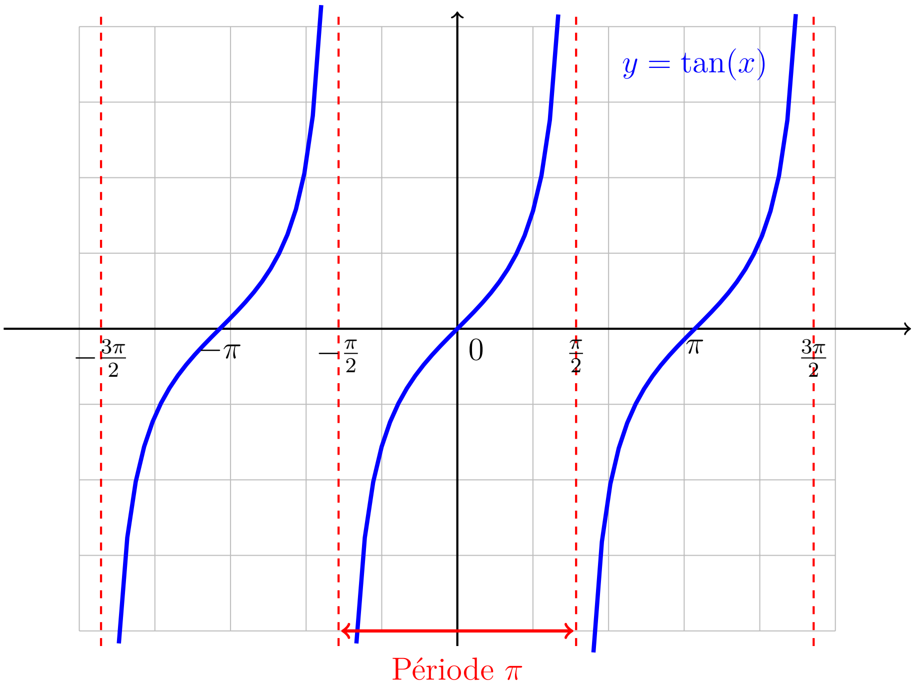
Définition 78

On définit la **fonction tangente** par

$$\tan : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$$

Propriété 79

La fonction tan est impaire et $\pi-$périodique.



V. — Exercices

Exercice 1. Étudier la parité des fonctions suivantes

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^4-1}{x} \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1-\dfrac{1}{x^2} \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & 2^n \end{array}$$

$$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x(x^2+1) \end{array} \qquad j : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2(x+1) \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} [3\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x-3} \end{array}$$

Exercice 2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+3\right)$ est 4π-périodique et que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\cos(2x)+|\sin(3x)|$ est π-périodique.

Exercice 3. Montrer, en utilisant la définition, que la fonction $f : x \longmapsto 5x-3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $g : x \longmapsto 2-3x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

1. Donner un majorant et un minorant de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $[0\,;1]$ par $g(x)=x(1-x)$ est bornée.

Exercice 5. On considère la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{3}\cos(x) - \sin(x)$.

1. En utilisant l'inégalité triangulaire, montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\sqrt{3}+1$.
2. En transformant l'expresion de f, montrer que f est bornée par -2 et par 2 et que ce sont les meilleures bornes possibles.

Exercice 6. Soit un réel a.

1. Soit f une fonction croissante définie sur $[a\,;+\infty[$. Montrer que f est minorée sur $[a\,;+\infty[$.
2. Soit f une fonction décroissante définie sur $[a\,;+\infty[$. Montrer que f est majorée sur $[a\,;+\infty[$.

Exercice 7. On considère les fonctions $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \longmapsto 4x-3$.

1. Donner l'allure de leurs courbes représentatives dans un repère.
2. Étudier par le calcul les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. Montrer que f est paire.
2. Montrer que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est -1.
3. Montrer que f est majorée par 1.
4. Étudier les positions de relative de $\mathscr{C}_f$ et de la droite (D) d'équation $y = x-1$.

Exercice 9. Sans les calculer, comparer, dans chacun des cas suivants, A et B.

$A = 1{,}0001^2$ et $B = 1{,}00001^2$ $\quad$ $A = 0{,}03^3$ et $B = 0{,}02^3$ $\quad$ $A = (-199{,}9)^2$ et $B = (-200)^2$

$A = (-199{,}9)^5$ et $B = (-200)^5$ $\quad$ $A = (3-\pi)^6$ et $B = (-0{,}2)^6$ $\quad$ $A = \dfrac{1}{2{,}01}$ et $B = \dfrac{1}{2}$

$A = \dfrac{1}{3{,}9^5}$ et $B = \dfrac{1}{4^5}$ $\quad$ $A = \dfrac{1}{(-6{,}1)^4}$ et $B = \dfrac{1}{(-6)^4}$ $\quad$ $A = \dfrac{1}{5}$ et $B = \dfrac{1}{-3}$

Exercice 10. Sans les calculer, comparer, dans chacun des cas suivants, A et B.

$A = \sqrt{2}$ et $B = \sqrt{3}$ $\quad$ $A = 2\sqrt{3}$ et $B = 3\sqrt{2}$ $\quad$ $A = \sqrt{101}$ et $B = 10$ $\quad$ $A = 9$ et $B = 4\sqrt{5}$

Exercice 11. Écrire chacune des fonctions homographiques suivantes sous forme réduite et en déduire ses variations.

$$f : x \longmapsto \frac{x+1}{x-2} \qquad g : x \longmapsto \frac{3x}{5-x} \qquad h : x \longmapsto \frac{1-x}{1+2x}$$

Exercice 12. On souhaite comparer, sans les calculer, les deux nombres

$$A = \frac{0{,}99999999}{1{,}99999999} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{0{,}99999998}{1{,}99999998}.$$

Pour cela, on considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{x}{x+1}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Écrire f sous forme réduite et en déduire ses variations.
3. Déterminer deux réels a et b tels que $A = f(a)$ et $B = f(b)$.
4. Conclure.

Exercice 13. Un automobiliste effectue un trajet aller-retour Montargis-Paris. Sa vitesse moyenne à l'aller est 100 km.h^{-1}.

1. On suppose dans cette question que la vitesse moyenne au retour est 80 km.h^{-1}.

a. On note d la distance Montargis-Paris en km. Exprimer en fonction de d le temps mis par l'automobiliste pour faire le retour.

b. En déduire, en fonction de d, le temps mis par l'automobiliste pour faire l'aller-retour.

c. En déduire sa vitesse moyenne sur le trajet aller-retour.

2. On note maintenant x la vitesse moyenne au retour, et $V(x)$ la vitesse moyenne sur le trajet aller-retour, toutes les deux exprimées en km.h^{-1}.

a. Le temps que met l'automobiliste pour faire l'aller a-t-il changé ?

b. Exprimer, en fonction de d et x, le temps mis par l'automobiliste pour faire le retour.

c. En déduire que $V(x) = \dfrac{200x}{x+100}$.

d. À quelle famille de fonctions V appartient-elle ?

Montrer que la forme réduite de V est $V(x) = 200 - \dfrac{20\,000}{x+100}$.

e. Pour quelle vitesse au retour la vitesse moyenne sur l'aller-retour est-elle 90 km.h^{-1} ?

f. Est-il possible d'effectuer l'aller-retour à une vitesse moyenne de 200 km.h^{-1} ?

g. Déterminer un majorant de la vitesse moyenne aller-retour.

Exercice 14. Soit x un nombre réel. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme e^y avec y le plus simple possible :

a) $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^{-x}$; b) $\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-x}$; c) $\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2$; d) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2-x}}$.

Exercice 15. Soit x un nombre réel. Démontrer que $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Exercice 16. Factoriser, pour tout réel x,

$A = 10\mathrm{e}^x - 5x\mathrm{e}^x$ $B = 2x\mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-x}$ $C = \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x$ $D = -3x\mathrm{e}^{0,4x} - 2\mathrm{e}^{0,4x}$

$E = \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 1$ $F = 9\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^x + 1$ $G = \mathrm{e}^{2x} - 16$ $H = \mathrm{e}^{6x} - 25$

Exercice 17. Dans chaque cas, comparer A et B :

$A = \mathrm{e}^2$ et $B = \mathrm{e}^{5,6}$ $A = \mathrm{e}^{-1,3}$ et $B = \mathrm{e}^{-8}$ $A = \mathrm{e}^{0,1}$ et $B = \mathrm{e}^{-10}$ $A = e$ et $B = \mathrm{e}^{2,7}$.

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

1. (E_1) $\mathrm{e}^{3x} = 0$ **2.** (E_2) $\mathrm{e}^{2x} = 0$ **3.** (E_3) $\mathrm{e}^{-3x+6} = e$

4. (E_4) $\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{5x-1}$ **5.** (E_5) $\mathrm{e}^{4x^2} = \mathrm{e}^{36}$ **6.** (I_1) $\mathrm{e}^{-5x} < \mathrm{e}^{6x+3}$

7. (I_2) $\mathrm{e}^{7x-1} \geqslant \mathrm{e}^{3x}$ **8.** (I_3) $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{\exp(x^2)}$ **9.** (I_4) $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^{2-x^2}$.

Exercice 19. Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(3)$:

a) $\ln(27)$; b) $\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$; c) $\ln\left(9\sqrt{3}\right)$.

Exercice 20. Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$\text{a) } A = \ln\left(e^4\right) \ ; \qquad \text{b) } B = \mathrm{e}^{\ln(3)} \ ; \qquad \text{c) } C = \frac{\ln(\sqrt{5}+1)+\ln(\sqrt{5}-1)}{2} \ ;$$

$$\text{d) } D = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{98}{99}\right) + \ln\left(\frac{99}{100}\right).$$

Exercice 21. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$(E_1) : \ln(x) = 3 \qquad (E_2) : \ln(x+1) = 0 \qquad (E_3) : \mathrm{e}^{x+3} = 4$$

$$(E_4) : \ln(x^2) = \ln(x)^2 \qquad (E_5) : \ln(x^2-2) = \ln(x) \qquad (I_1) : \ln(x+2) < 5$$

$$(I_2) : \ln(x+3) + \ln(x-2) > \ln(x+10) \qquad (I_3) : (\ln x)^2 - 5\ln x + 6 > 0.$$

Exercice 22. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation (I) : $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-2017}$.

Exercice 23. Tant qu'un organisme est vivant, il échange du carbone avec son environnement, de sorte qu'on peut considérer que sa concentration en carbone 14 (par rapport à la quantité totale de carbone) est constante, égale à $C_0 \approx 10^{-12}$.

À partir de sa mort, le carbone 14 qu'il contient se désintègre et sa concentration décroît exponentiellement : la concentration t années après la mort de l'organisme est donnée par :

$$(E)\ C(t) = C_0 e^{-\lambda t}$$

où $\lambda > 0$ est une constante.

1. Soit τ le temps de demi-vie du carbone 14, c'est-à-dire le temps après lequel la moitié des noyaux se sont désintégrés. Déterminer la valeur de $C(\tau)$.
2. Vérifier que
$$\lambda = \frac{\ln(2)}{\tau}.$$
3. En déduire, en remplaçant λ par son expression dans (E) que pour tout $t \geqslant 0$,
$$(E_2)\ C(t) = C_0 2^{-\frac{t}{\tau}}.$$
4. Démontrer que l'âge d'un échantillon est donné par
$$t = \frac{\tau}{\ln(2)} \ln\left(\frac{C_0}{C(t)}\right).$$
5. L'homme de Piltdown, découvert en 1908, était présenté par certains comme un chaînon manquant entre le singe et Homo sapiens. Un échantillon de la mâchoire présente une concentration $C \approx 9{,}7 \times 10^{-13}$. Sachant que le temps de demi-vie du carbone 14 est donné par $\tau = 5\,568$ ans, dater l'échantillon et commenter.

Exercice 24. Soit un réel $\omega > 0$. Déterminer, à l'aide des fonctions sin et cos, une f fonction définie sur $\mathbb{R}$, ω-périodique et telle que $f(0) = 1$ et $f(\frac{\omega}{4}) = 1$.

Exercice 25. On définit la fonction cotangente, notée cotan, par

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de cotan.
2. Montrer que cotan est impair et π-périodique.
3. A-t-on, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\operatorname{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$?