⧫ Chapitre 7. Systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, n et p désignent des entiers supérieurs ou égaux à 2.

I. — Définitions

Définition 1

Un **système linéaire de n équations à p inconnues** est un système de la forme

$$(S)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}.$$

où x_1, x_2, ..., x_p sont des inconnues et $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, ..., $a_{n,n}$, b_1, b_2, ..., b_n sont des constantes réels.

Les nombres $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, ..., $a_{n,p}$ sont appelés les **coefficients** du système (S) et les nombres b_1, b_2, ..., b_n sont appelés les **seconds membres** de (S).

Si les b_i sont tous nuls, on dit que le système est **homogène**.

Exemple 2.

1. $(S_1)\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases}$ est un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.
2. $(S_2)\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$ est un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues. Ses seconds membres sont nuls. On dit que c'est le système homogène associé à (S_1).
3. $(S_3) : \begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ x + y - z + t = 2 \\ x + y + z - t = 3 \end{cases}$ est un système linéaire de 3 équations à 4 inconnues.
4. $(S_4) : \begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ n'est pas un système linéaire.

Définition 3

Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues.

1. Une **solution** de (S) est un p-uplet $(u_1, u_2, ..., u_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que si on remplace x_1 par u_1, x_2 par u_2, ..., x_p par u_p alors les n égalités de (S) sont vraies.
2. **Résoudre** (S), c'est déterminer l'ensemble des solutions de (S).

Exemple 4.

1. Le couple $(2\,;-1)$ est une solution de (S_1).
2. Le couple $(0\,;0)$ est une solution de (S_2). De manière générale, le p-uplet nul est toujours solution d'un système homogène à p inconnues.
3. Les quadruplets $(\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0)$ et $(2, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ sont des solutions de (S_3).

Définition 5

1. On dit qu'un système linéaire est **compatible** s'il admet au moins une solution. Dans le cas contraire, on dit qu'il est **incompatible**.
2. On dit que deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Remarque 6. Si deux systèmes sont formés d'équations deux à deux équivalentes alors ils sont équivalents.

1. Les systèmes (S_1), (S_2) et (S_3) ci-dessus sont compatibles.
2. Le système $\begin{cases} x+2y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ est incompatible.
3. Les systèmes $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ x-y=1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+2y=3 \\ -x+y=-1 \end{cases}$ sont équivalents.

II. — Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

On considère un système linéaire de deux équations à deux inconnues (S) $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels tels que $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ et $(a'\,;b') \neq (0\,;0)$.

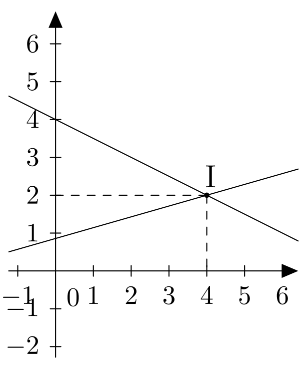
1) Interprétation géométrique

La donnée du système (S) équivaut à la donnée de deux équations cartésiennes de droites (d) : $ax+by=c$ et (d') : $a'x+b'y=c'$. Résoudre le système revient alors à chercher les points M dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient les équations des deux droites c'est-à-dire les points communs à (d) et (d'). Il y a trois cas possibles :

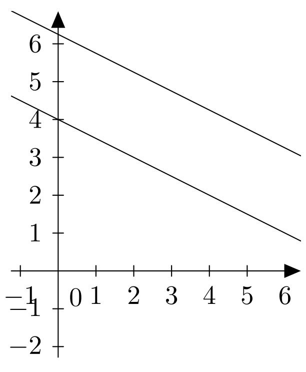
1^er^ cas : si (d) et (d') sont sécantes. Alors, elles ont un unique point commun I donc le système (S) a une unique solution qui est le couple des coordonnées de I.

2ème cas : si (d) et (d') sont strictement parallèles. Alors, elles n'ont aucun point commun donc le système (S) n'a aucune solution. L'ensemble des solutions est donc vide.

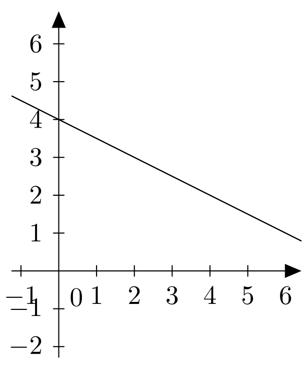
3ème cas : si (d) et (d') sont confondues. Alors, elles ont une infinité de points communs donc le système (S) a une infinité de solutions : c'est l'ensemble des coordonnées des points de $(d) = (d')$.



1er cas :
(d) et (d') sécantes



2ème cas :
(d) et (d') strictement parallèles



3ème cas :
(d) et (d') confondues

Exemple 7. Résoudre graphiquement le système $(S_5)\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-y=-5 \end{cases}$.

2) Méthodes calculatoires de résolution

Méthode 8 : Résolution d'un système par substitution

La résolution d'un système par substitution consiste à isoler une des inconnues dans une des équations puis à la substituer (c'est-à-dire la remplacer) dans l'autre équation.

Exemple 9. Résoudre par substitution le système $(S_5)\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-y=-5 \end{cases}$.

Méthode 10 : Résolution d'un système par combinaisons linéaires

La résolution par combinaisons linéaires consiste à multiplier chaque ligne par un coefficient adapté de telle sorte qu'en ajoutant (ou en retranchant) une ligne à l'autre, on supprime une des deux inconnues.

Exemple 11. Résoudre par combinaisons linéaires le système $(S_5)\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-y=-5 \end{cases}$.

III. — Systèmes échelonnés et algorithme du pivot de Gauss

Les méthodes calculatoires vues précédemment pour les systèmes de deux équations à deux inconnues peuvent se généraliser à des systèmes quelconques. Elles deviennent cependant rapidement très lourdes à mettre en œuvre.

On va voir une méthode systématique de résolution basée sur la notion de système échelonné.

1) Systèmes échelonnés

Définition 12

On dit qu'un système linéaire (S) de n équations est **échelonné** si, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, la i-ème ligne de (S) commence par au moins $i-1$ coefficients nuls (en respectant l'ordre initial des inconnues).

Remarque 13.

1. Avec les notations de la définition 1, le système (S) est échelonné si, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $a_{1,1} = a_{i,2} = \cdots = a_{i,i-1} = 0$.
   Ceci revient à dire qu'à chaque nouvelle ligne, il y a au moins une nouvelle inconnue qui disparaît (dans l'ordre initial des inconnues).
2. Si $n > p$ (c'est-à-dire si le système a strictement plus d'équations que d'inconnues) alors les membres de gauche des équations sont nuls à partir de la $(p+1)$-ième équation.

Exemple 14. Les systèmes suivants sont échelonnés :

$$(S_6)\begin{cases}3x+y=2\\ \phantom{3x+{}}y=1\end{cases}\qquad (S_7)\begin{cases}-x+y-z=1\\ 3y+z=0\\ 5z=1\end{cases}\qquad (S_8)\begin{cases}4x-z=0\\ 2y+z=0\end{cases}\qquad (S_9)\begin{cases}x+y+z=2\\ y-z=1\\ 2z=5\\ 0=0\\ 0=1\end{cases}$$

En revanche, le système suivant n'est pas échelonné :

$$\begin{cases}x-2y+z=2\\ 5x+z=1\\ y=-1\end{cases}$$

Définition 15

Dans un système linéaire, une équation du type $0=b$ où $b\in\mathbb{R}$ s'appelle une **équation de compatibilité**.

Exemple 16. Le système (S_9) contient deux équations de compatibilité : $0=0$ et $0=1$.

Définition 17

Si (S) est un système échelonné alors les **pivots** de (S) sont les coefficients apparaissant en tête des lignes autres que les équations de compatibilité.

Exemple 18. Ainsi, les pivots de (S_6) sont 3 et 1, les pivots de (S_7) sont -1, 3 et 5, les pivots de (S_8) sont 4 et 2 et les pivots de (S_9) sont 1, 1 et 2.

Méthode 19 : Résolution d'un système échelonné

On considère un système échelonné (S).

1. Si (S) contient une équation de compatibilité de la forme $0=b$ avec $b\neq 0$ alors l'ensemble des solutions de (S) est vide.
2. Sinon, on élimine du système toutes les équations de compatibilité $0=0$ puis on résout le système par substitution en commençant par la dernière ligne et en remontant jusqu'à la première.

Exemple 20. Résoudre les systèmes (S_6), (S_7) et (S_8).

2) Algorithme du pivot de Gauss

On a vu dans le paragraphe précédent que la résolution des systèmes échelonnés est particulièrement simple.

On va à présent voir un algorithme permettant d'obtenir, à partir de n'importe quel système (S), un système échelonné (S') équivalent à (S).

Notation 21. Si (S) est un système linéaire de n équations, on note, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, L_i la i-ème ligne de (S).

Propriété 22

Soit (S) un système linéaire de n équations et i et j deux éléments de $[\![1, n]\!]$. On obtient un système équivalent à (S) si :

- on échange les lignes L_i et L_j, ce qu'on notera $L_i \leftrightarrow L_j$;
- on remplace la ligne L_i par kL_i où $k \in \mathbb{R}^*$, ce qu'on notera $L_i \leftarrow kL_i$;
- on remplace la ligne L_i par $L_i + kL_j$ où $k \in \mathbb{R}$, ce qu'on notera $L_i \leftarrow L_i + kL_j$.

Remarque 23. Les opérations décrites dans la proposition précédente s'appellent les opérations élémentaires sur les lignes d'un système.

Méthode 24 : Algorithme du pivot de Gauss

Tout système peut être transformé en un système échelonné équivalent par opérations élémentaires sur les lignes de la manière suivante :

- on note L_i la première du système dans laquelle le coefficient α de x_1 est non nul et on échange L_1 et L_i (si le coefficient de x_1 dans L_1 est non nul, il n'y a donc rien à faire) ;
- on utilise le coefficient α (qui est le pivot de la première ligne) pour éliminer x_1 dans toutes les autres équations du système grâce aux opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{\beta_i}{\alpha} L_1$ où β_i est le coefficient de x_1 dans L_i (si $\beta_i = 0$, il n'y a donc rien à faire) pour tout $i \in [\![2, n]\!]$;
- On réitère le procédé sur le système formé par le $n-1$ dernières équations avec x_2 (ou à défaut x_3, x_4...) et ainsi de suite.

Remarque 25.

1. On a en fait utilisé seulement deux des trois opérations élémentaires. La troisième peut être utilisée si l'on souhaite de plus que les pivots soient tous égaux à 1. Pour cela, il suffit de réaliser l'opération $L_i \leftarrow \frac{1}{\alpha_i} L_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ où α_i est le pivot de la i-ème ligne. On dit que le système ainsi obtenu est échelonné et réduit.
2. Pour simplifier les calculs, il est souvent pratique d'échanger la première ligne avec une ligne dans laquelle le coefficient de la première inconnue est 1 ou -1.

Exemple 26. Dans chacun des cas suivants, échelonner le système par la méthode du pivot de Gauss puis résoudre le système.

$$(S_{10}) \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases} \qquad (S_{11}) \begin{cases} 2x - 3y + 4z = -3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 4x - 5y + 14z = 1 \end{cases} \qquad (S_{12}) \begin{cases} x - y - z = 4 \\ 2x - 3y + 2z = 1 \\ 5x - 8y + 7z = 1 \end{cases}$$

Définition 27

Soit (S) un système linéaire et (S') le système échelonné obtenu à partir de (S) grâce à l'algorithme du pivot de Gauss.
Le nombre de pivots de (S') est appelé le **rang** de (S) et on le note $\mathrm{rg}(S)$.

Exemple 28. Déterminer les rangs des systèmes (S_6), (S_7), (S_8), (S_9), (S_{10}), (S_{11}) et (S_{12}).

Remarque 29. Si (S) est un système de n équations à p inconnues alors $\mathrm{rg}(S) \leqslant n$ et $\mathrm{rg}(S) \leqslant p$.

Propriété 30. — (admise)

Un système linéaire de n équations à p inconnues possède soit aucune solution soit une unique solution soit une infinité de solution. De plus, si $n = p$ alors il possède une unique solution si et seulement si $n = \mathrm{rg}(S)$ et dans ce cas, on dit que (S) est un **système de Cramer**.

IV. — Exercices

Exercice 1. Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases}5x - y = 8\\ -3x + 2y = 12\end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases}2x + y = -10\\ -1{,}5x + 2y = 13\end{cases}$$

Exercice 2. Résoudre chacun des systèmes suivants en utilisant la méthode qui vous semble la plus adaptée.

$$(S_1)\begin{cases}x - 3y = 6\\ y = 2\end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases}4x - 2y = 3\\ x = 3\end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases}x + y = 4\\ x - y = -5\end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases}3x + 4y = 1\\ 2x + 3y = 0\end{cases} \qquad (S_5)\begin{cases}2x + y = 1\\ 6x + 3y = 9\end{cases} \qquad (S_6)\begin{cases}x + y = 1\\ -3x - 3y = -3\end{cases}$$

Exercice 3. Résoudre chacun des systèmes suivants.

$$(S_1)\begin{cases}3x - y + 4z = 5\\ \qquad\ 5y - z = 1\\ \qquad\qquad 2z = 3\end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases}x + y + z = 0\\ \qquad\quad 2z = 1\end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases}-x + 2y + -z = 5\\ \qquad\quad 2y - z = 7\\ \qquad\qquad\ 0 = 3\end{cases}$$

Exercice 4. Échelonner puis résoudre les systèmes linéaires suivants.

$$(S_1)\begin{cases}-x + 3y = 5\\ x - 3y = 13\end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases}-2x - 3y = -7\\ -6x + 9y = 2\end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases}\frac{1}{5}x + 6y = 3\\ \frac{1}{3}x + 15y = 5\end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases}\quad\ - y + z = 1\\ x - y - 2z = 7\end{cases} \qquad (S_5)\begin{cases}2x + 2y + 3z = 4\\ x + y + z = 5\end{cases}$$

Exercice 5. Résoudre les systèmes suivants

$$(S_1)\begin{cases}2x + y - 2z = 10\\ x + y + 4z = -9\\ 7x + 5y + z = 14\end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases}x + 2y - 3z = -1\\ 3x - y + 2z = 7\\ 8x + 2y - 2z = 9\end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases}x - 3y + 7z = -4\\ x + 2y - 3z = 6\\ 7x + 4y - z = 22\end{cases}$$

Exercice 6. Déterminer le rang et le nombre de solutions des systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x-y+2z=3\\ 2x-y+z=1\\ 2y+z=4\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases} x+y+z=1\\ y+z+t=2\\ x+z+t=3\end{cases}\qquad (S_3)\begin{cases} x+2y-6z=2\\ 2x-2y+3z=2\\ x+8y-21z=4\end{cases}$$

$$(S_4)\begin{cases} x-y=1\\ 2x-y=1\\ -2x+3y=-3\\ x+y=-1\end{cases}\qquad (S_5)\begin{cases} x+y+z+t=1\\ 2x-y+2z-t=3\\ x-2y+z-2t=2\\ 4x-2y+4z-2t=6\end{cases}\qquad (S_6)\begin{cases} x+\frac{3}{2}y-z=1\\ 4x-3y+z=4\\ 2x+12y-7z=34\end{cases}$$

$$(S_7)\begin{cases} 2x-3y+z-4t=7\\ x+2y-z+3t=2\end{cases}\qquad (S_8)\begin{cases} x+y+z+t=1\\ x-y+z-4t=0\\ x+y-z+t=2\end{cases}$$

Exercice 7. Soit a un nombre réel. Déterminer, en fonction de la valeur de a, le rang des systèmes suivants.

$$(S_1)\begin{cases} x+y+az=0\\ 2x+y+az=0\\ 2x-y+5z=0\end{cases}\qquad (S_2)\begin{cases} (2-a)x+4z=0\\ 3x-(4+a)y+12z=0\\ x-2y+(5-a)z=0\end{cases}$$

Exercice 8. Lors d'un spectacle, on a vendu des places à 16 euros (tarif plein) et des places à 10 euros (tarif réduit). Il y a eu 852 spectateurs pour une recette de 11 160 euros.

Déterminer le nombre de places à tarif plein et le nombre de places à tarif réduit.

Exercice 9. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ où a, b et c sont des réels. Sachant que la courbe de f dans un repère du plan passe par les points $\mathrm{A}(1\,;2)$, $\mathrm{B}(-1\,;3)$ et $\mathrm{C}(3\,;-2)$, déterminer f.

Exercice 10. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme $f : x \longmapsto ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont des réels. Sachant que la courbe de f dans un repère du plan passe par les points $\mathrm{A}(0\,;1)$, $\mathrm{B}(-1\,;1)$, $\mathrm{C}(1\,;2)$ et $\mathrm{D}(2\,;-1)$, déterminer f.

Exercice 11. Un cycliste s'entraîne chaque dimanche en faisant l'aller-retour d'Issy à Labat. Le trajet Issy-Labat n'est pas entièrement plat : il y a des montées, des descentes et du plat. En montée, notre cycliste fait du quinze kilomètres par heure, en plat du vingt, en descente du trente. L'aller lui prend deux heures et le retour trois. Sur la portion du trajet qui n'est pas plate, la pente moyenne est de cinq pour cent.

1. Quelle est la distance d'Issy à Labat ? Quelle est la plus haute de ces deux villes ? Quelle est leur différence d ?altitude ?
2. Un autre cycliste, plus sportif, fait du vingt kilomètres par heure en montée, trente en plat et quarante en descente. Sachant que l'aller-retour Issy-Labat lui prend seulement trois heures quarante, déterminer les longueurs de la partie du trajet qui monte, de celle qui descend, de celle qui est plate.

Exercice 12. Résoudre le système de n équations à n inconnues x_1, x_2, ..., x_n :

$$(S)\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=1\\ x_1+2x_1+x_3+\cdots+x_n=2\\ x_1+x_2+2x_3+\cdots+x_n=3\\ \vdots\\ x_1+x_2+x_3+\cdots+2x_n=n\end{cases}$$