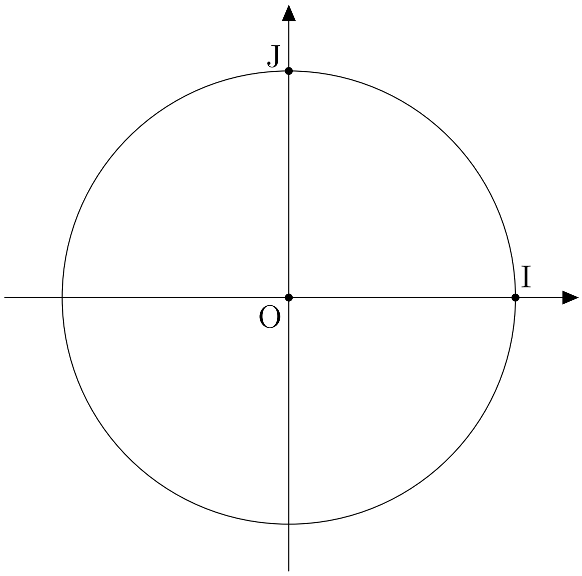
⧫ Chapitre 6. Trigonométrie

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

I. — Le cercle trigonométrique

Définition 1

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On dit alors que le cercle est orienté dans le sens direct (ou sens trigonométrique). Le sens contraire est appelé le sens indirect (ou sens rétrograde).

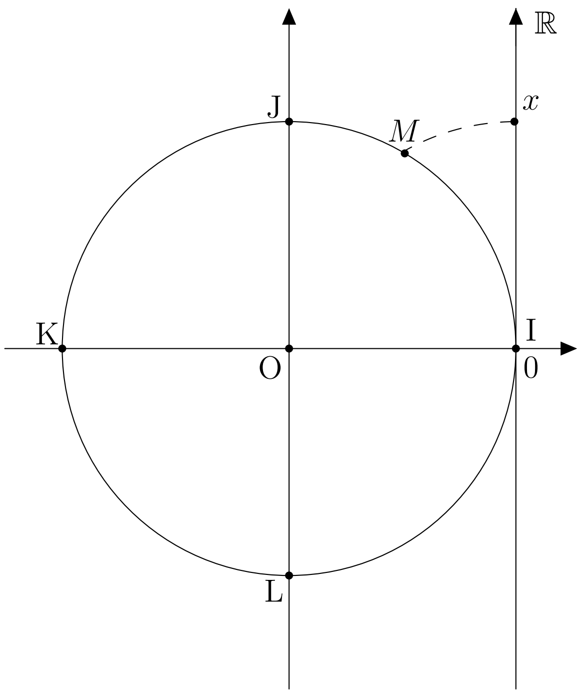


Remarque 2. Quand les points I et J sont disposés comme sur la figure ci-contre, le sens direct est le sens faisant passer de I à J par le plus court chemin. Dans ce cas, on dit que le repère (O, I, J) est direct.

Remarque 3. Comme le rayon du cercle trigonométrique est 1, son périmètre est $2 \times \pi \times 1$ c'est-à-dire 2π. Ainsi, un tour complet de ce cercle correspond à une longueur de 2π et donc un demi-tour à une longueur de π et un quart de tour à une longueur de $\frac{\pi}{2}$.

II. — Image d'un réel sur le cercle trigonométrique

On sait que l'ensemble des nombres réels peut être représenté graphiquement par une droite. Imaginons qu'on « colle » cette droite au cercle trigonométrique de telle façon qu'elle soit perpendiculaire à (OI) et que le nombre 0 de l'axe réel se retrouve sur I.
On peut alors « enrouler » l'axe réel autour du cercle trigonométrique, les réels positifs étant enroulés dans le sens direct et les réels négatifs dans le sens indirect.



Définition 4

À tout réel x, on associe un unique point M sur le cercle trigonométrique par enroulement de l'axe réel autour de ce cercle. On dit alors que M est l'**image** de x sur le cercle.

Exemple 5. Déterminer des réels dont le point I est l'image. Même question avec J, K et L.

Propriété 6

Soit x et y deux nombres réels. Alors, x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $y - x = 2k\pi$. On dit alors que x et y sont égaux modulo 2π et on note $x = y\ [2\pi]$.

Exemple 7. Dans chacun des cas suivants, dire si les nombres x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique.

a) $x = \frac{\pi}{2},\ y = -\frac{3\pi}{2}$ b) $x = \frac{2\pi}{3},\ y = -\frac{\pi}{3}$ c) $x = -\frac{5\pi}{12},\ y = \frac{43\pi}{12}$.

III. — Mesures d'un angle en radian

Définition 8

Soit M un point du cercle trigonométrique. Tout nombre x dont l'image sur le cercle est M est appelé une **mesure en radian** de l'angle $\widehat{\mathrm{IO}M}$.

Remarque 9.

1. Le symbole du radian est rad.
2. Un même angle possède une infinité de mesures en radian différentes. Cependant, deux mesures en radian d'un même angle sont égales modulo 2π.
3. 1 radian est une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{IO}M}$ tel que l'arc $\widehat{\mathrm{I}M}$ mesure 1 unité.
4. Pour convertir des radians en degrés ou inversement, on utilise la proportionnalité partant du fait π rad correspond à 180°.

Exemple 10. Donner une mesure en radian d'un angle mesurant
a) 30° b) 45° c) 60° d) 90° e) 120° f) 180° g) 270° h) 360°.

Définition 11

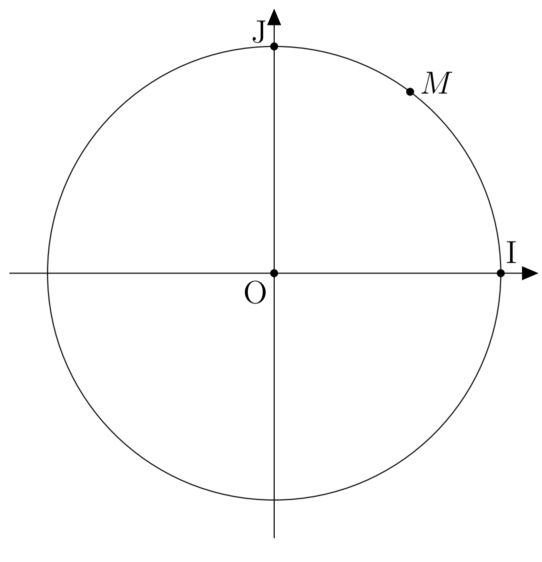
Parmi toutes les mesures en radian d'un angle α, celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ est appelée la **mesure principale** de α.

Exemple 12. Si α mesure 270° alors une mesure en radian de α est $\frac{3\pi}{2}$. Cependant, ce n'est pas la mesure principale car $\frac{3\pi}{2} > \pi$. La mesure principale de α est $-\frac{\pi}{2}$ car $-\frac{\pi}{2} \in\ ]-\pi\,;\pi]$ et $\frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ (puisque $\frac{3\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = 2\pi$.)

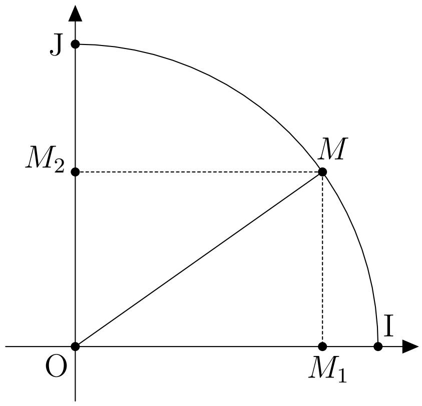
IV. — Cosinus et sinus d'un réel

Définition 13

Soit x un nombre réel et M l'image de x sur le cercle trigonométrique. On définit le nombre $\cos(x)$ comme étant l'abscisse de M et le nombre $\sin(x)$ comme étant l'ordonnée de M. Autrement dit, les coordonnées de M sont $(\cos(x)\,;\sin(x))$.



Lien avec le cosinus et le sinus des angles vus au collège



Considérons un réel x strictement compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. On note M l'image de x sur le cercle trigonométrique, M_1 le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisse et M_2 le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées. Alors, par définition,

$$\cos\left(\widehat{\mathrm{IO}M}\right) =$$

$$\sin\left(\widehat{\mathrm{IO}M}\right) =$$

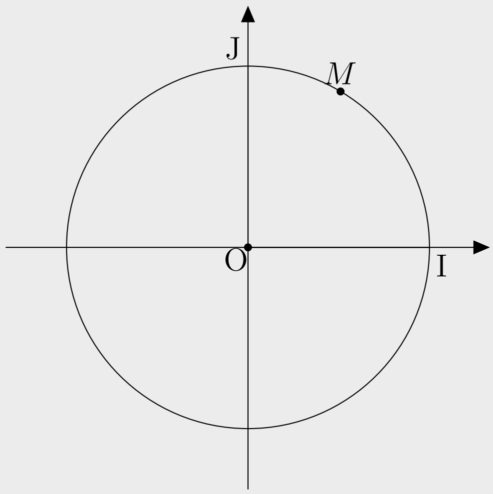
Valeurs remarquables à connaître

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
angle $\widehat{\mathrm{IO}M}$						
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						

Propriété 14

Pour tout nombre réel x et tout entier relatif k,

1. $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$;
2. $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$;
3. $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2 = 1$ ce qui se note également $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$;
4. $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$;
5. $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$;
6. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$;
7. $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$;
8. $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$;



Exemple 15.

1. Déterminer les valeurs exactes des nombres suivants.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) \qquad \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3} - 7\pi\right) \qquad \cos\left(5\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

2. Calculer les valeurs exactes des nombres suivants.

$$\sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) \qquad \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \qquad \cos(2016\pi) \qquad \cos\left(\frac{2017\pi}{2}\right) \qquad \sin\left(\frac{2016\pi}{3}\right).$$

3. Soit x un réel tel que $\cos(x) = -\frac{12}{13}$ et $x \in [-\pi\,;0]$. Déterminer $\sin(x)$.

Propriété 16. — formules d'addition et de duplication

Pour tous réels a et b,

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
2. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
3. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
4. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
5. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
$= 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
6. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Exemple 17.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide des des formules d'addition, retrouver les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{2}+x)$, $\sin(\frac{\pi}{2}+x)$, $\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.
3. Déterminer les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

V. — Équations et inéquations trigonométriques

1) Équations

a) L'équation $\cos(x) = \cos(a)$

Propriété 18

Soit un réel $a \in \,]-\pi\,;\pi]$.
Si $a \notin \{0;\pi\}$ alors l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ possède exactement 2 solutions dans $]-\pi\,;\pi]$ qui sont a et $-a$. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de $\cos(x) = \cos(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ ou $-a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Si $a = 0$ ou $a = \pi$ alors l'équation $\cos(x) = \cos(a)$ admet une unique solution dans $]-\pi\,;\pi]$ qui est a. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de $\cos(x) = \cos(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 19. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $\cos(x) = 0$; 2) $\cos(2x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$.

b) L'équation $\sin(x) = \sin(a)$

Propriété 20

Soit $a \in \,]-\pi\,;\pi]$.
Si $a \notin \{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\}$ alors l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ possède exactement 2 solutions dans $]-\pi\,;\pi]$ qui sont a et $\pi - a$ si $a > 0$ ou $-\pi - a$ si $a < 0$. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de $\sin(x) = \sin(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ ou $\pi - a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Si $a = -\frac{\pi}{2}$ ou $a = \frac{\pi}{2}$ alors l'équation $\sin(x) = \sin(a)$ admet une unique solution dans $]-\pi\,;\pi]$ qui est a. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de $\sin(x) = \sin(a)$ est l'ensemble des réels de la forme $a + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 21. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1) $\sin(x) = 0$; 2) $\cos\left(\dfrac{\pi - x}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

2) Inéquations trigonométriques

Principe général. — Pour résoudre une équation du type $\sin(x) \leqslant \sin(a)$ ou $\cos(x) \leqslant \cos(a)$ sur un intervalle de longueur 2π, on utilise le cercle trigonométrique.

Exemple 22.

1. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $\cos(x) > \dfrac{1}{2}$.
2. Résoudre dans $]0\,;2\pi]$ l'inéquation $2\sin(x) - \sqrt{2} \leq 0$.
3. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $\cos(2x) > \cos x - 1$.

3) Transformation d'écriture du type $A\cos(x) + B\sin(x)$

En mathématiques, mais aussi en physique, il peut être intéressant de transformer une expression de la forme $A\cos(x) + B\sin(x)$ où A et B sont des constantes réelles en une expression de la forme $R\cos(x+\varphi)$.

Pour se faire, on calcule $R = \sqrt{A^2+B^2}$, on factorise l'expression par R et on utilise les formules d'addition.

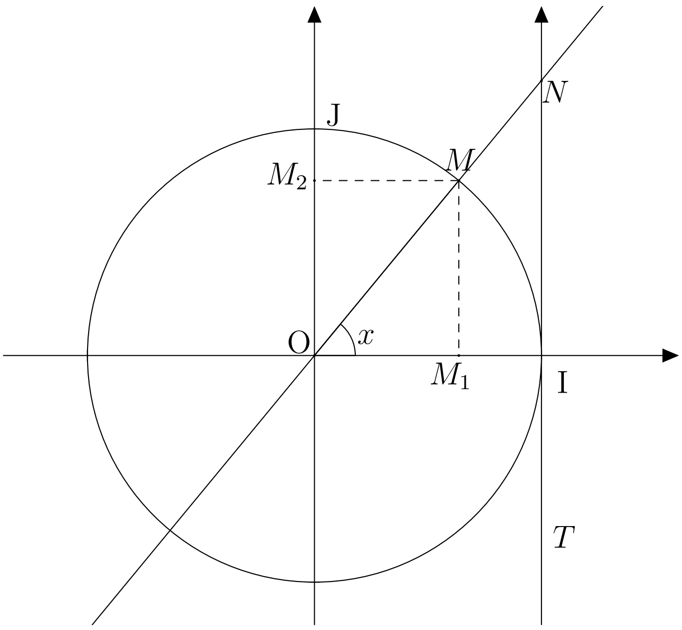
Exemple 23.

1. Déterminer deux constantes R et φ telles que, pour tout réel x,
$$3\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = R\cos(x+\varphi).$$
2. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'inéquation $3\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) \leqslant \sqrt{6}$.

VI. — Tangente d'un réel

1) Définition géométrique

Si x est un réel, on note M l'image de x sur le cercle trigonométrique. On appelle M_1 et M_2 les projetés de M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées. Ainsi, les coordonnées de M_1 sont $(\cos(x)\,;0)$ et celles de M_2 sont $(0\,;\sin(x))$.
Si le réel x n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ pour un certain entier k (c'est-à-dire si $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$) alors la droite $(\mathrm{O}M)$ coupe la droite T en un unique point N.
Comme les droites T et (MM_1) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès,



$$\mathrm{I}N = \frac{\mathrm{I}N}{1} = \frac{\mathrm{I}N}{\mathrm{OI}} = \frac{M_1M}{\mathrm{O}M_1} = \frac{\mathrm{O}M_2}{\mathrm{O}M_1} = \frac{|\sin x|}{|\cos x|} = \left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|.$$

- Si M se trouve dans les quarts de cercle *Nord-Est* ou *Sud-Ouest* alors **sur la droite** T, l'abscisse x_N est positive et ainsi $x_N = \mathrm{I}N$. Or, dans ce cas, $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont de même signe donc $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant 0$ et donc $\mathrm{I}N = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On en conclut que $x_N = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

- Si M se trouve dans les quarts de cercle *Nord-Ouest* ou *Sud-Est* alors **sur la droite** T, l'abscisse x_N est négative et ainsi $x_N = -\mathrm{I}N$. Or, dans ce cas, $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont de signe contraire donc $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \leqslant 0$ et donc $\mathrm{I}N = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On en conclut que, dans ce cas aussi, $x_N = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Ainsi, pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, l'abscisse de N sur la droite T est $x_N = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Définition 24

Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on définit la **tangente** de x, notée $\tan(x)$, par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Valeurs remarquables à connaître

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$\tan(x)$						

Propriété 25

Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$,

1. $-x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\tan(-x) = \tan(x)$;
2. $x + \pi \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\tan(x+\pi) = \tan(x)$. De manière générale, pour tout entier k, $x + k\pi \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\tan(x+k\pi) = \tan(x)$.
3. $\pi - x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$.

Exemple 26.

1. Calculer $\tan(\frac{\pi}{8})$ et $\tan(\frac{\pi}{12})$.
2. Soit $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Justifier que $\tan(\frac{\pi}{2} - x)$ existe et exprimer ce nombre en fonction de $\tan(x)$.

VII. — Exercices

Exercice 1.

1. Convertir en radians les mesures d'angles exprimées en degrés.

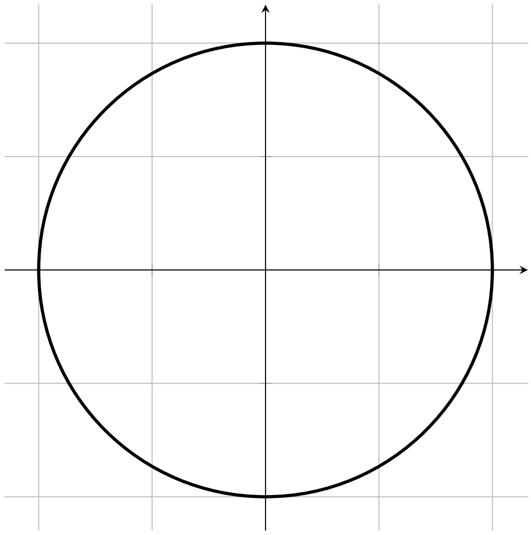
$$180° \qquad 90° \qquad 10° \qquad 135° \qquad 50°.$$

2. Convertir en degrés les mesures d'angles exprimées en radians.

$$\frac{\pi}{3} \qquad \frac{3\pi}{2} \qquad \frac{5\pi}{6} \qquad \frac{11\pi}{6} \qquad \frac{\pi}{12}.$$

Exercice 2. Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les images respectives des réels suivants :

$\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$.



Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, dire si les nombres x et y sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

$$\text{a) } x = \frac{\pi}{12},\ y = -\frac{11\pi}{12} \qquad \text{b) } x = \frac{2\pi}{5},\ y = \frac{22\pi}{5} \qquad \text{c) } x = \frac{\pi}{7},\ y = -\frac{13\pi}{7}.$$

Exercice 4. Déterminer les valeurs exactes de :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \qquad \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) \qquad \cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) \qquad \sin\left(\frac{19\pi}{6}\right) \qquad \cos\left(-\frac{21\pi}{2}\right)$$

Exercice 5.

1. Soit x un réel tel que $\cos(x) = \frac{3}{5}$ et $\sin(x) \leqslant 0$. Déterminer $\sin(x)$.

2. Soit x un réel tel que $\sin(x) = -0{,}8$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$. Déterminer $\cos(x)$.

3. Soit x un réel tel que $\sin(x) = 0$ et $\cos(x) \neq 1$. Déterminer $\cos(x)$.

Exercice 6. En plus des valeurs vues en cours, il est possible de déterminer les valeurs exactes des cosinus et sinus de certains autres nombres. On peut par exemple démontrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. On admettra ce résultat dans tout cet exercice.

1. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$, $\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)$.

2. Démontrer que $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

3. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)$.

Exercice 7. Déterminer, en justifiant sa réponse, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Pour tout réel x, $\sin(2\pi - x) = \sin(x)$.

2. Pour tout réel x, $\cos(2\pi - x) = \cos(x)$.

3. Pour tout réel x, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.

4. Pour tout réel x, $\cos(\pi - x) = \cos(x)$.

Exercice 8. Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

$$(E_1)\ \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (E_2)\ \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (E_3)\ \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad (E_4)\ \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1)\ \cos(x) = \frac{1}{2} \qquad (E_2)\ \cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (E_3)\ \sin(3x+\pi) = \frac{1}{2} \qquad (E_4)\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 10. Dans chaque cas, résoudre l'inéquation sur l'intervalle J.

$$(I_1)\ \cos(x) \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad J =]-\pi\,;\pi] \qquad (I_2)\ \cos(x)+1 \leqslant \frac{1}{2} \quad J =]0\,;2\pi]$$
$$(I_3)\ \sin(2x) > -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad J = \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad (I_4)\ \cos(3x) \geqslant \frac{1}{2} \quad J = \left]0\,;\frac{2\pi}{3}\right]$$
$$(I_5)\ 2\sin^2(x)+3\sin(x)+1 \leqslant 0 \quad J =]-\pi\,;\pi]$$

Exercice 11. On donne $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 12. On considère le réel $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

1. Calculer $\cos(2\alpha)$ et en déduire α.

2. Montrer que $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 13.

1. Résoudre l'équation $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre l'inéquation $\cos(x)-\sin(x) < 1$ sur $]-\pi\,;\pi]$.

3. Démontrer que, pour tout réel x, $\cos(x)+\sin(x) \leqslant \sqrt{2}$.

Exercice 14. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{3}{4}\sin(2x) - 3\sin(x)\cos^2(x)$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x+2\pi) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$.

2. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 3\cos(x)\sin(x)\left(\frac{1}{2}-\cos(x)\right)$.

b. Étudier le signe de $f(x)$ pour tout $x \in [0\,;\pi]$.

Exercice 15. Démontrer que, pour tous réels a et b,

$$\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Exercice 16.

1. Soit $(a\,;b) \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[^2$. Démontrer que

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

2. En déduire, pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$, une expression de $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.

3. On pose $a = \tan(\frac{\pi}{12})$.

a. Calculer $\tan(\frac{\pi}{6})$.

b. À l'aide de la question **2.**, démontrer que $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{1-a^2}$.

c. En déduire que $a^2+2\sqrt{3}a-1 = 0$.

d. Déterminer la valeur de a en résolvant l'équation polynomiale de degré 2 de la question précédente.

4. Soit $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. On pose $t = \tan(\frac{x}{2})$. Montrer que

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$