⧫ Chapitre 5. Sommation et suites usuelles

I. — Sommation

1) Notation $\sum$

Définition 1

Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$. Pour tous réels a_m, a_{m+1}, ..., a_n, on note $\sum_{k=m}^{n} a_k$ la somme $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$. Ainsi, par définition, $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$.

Remarque 2.

1. Dans l'écriture $\sum_{k=m}^{n} a_k$, on dit que a_k est le terme général de la somme et que k est l'indice de sommation. Cet indice est une variable muette dont le nom n'a pas d'importance. Ainsi, $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j$...
2. La valeur de la somme $\sum_{k=m}^{n} a_k$ dépend de m et n mais elle ne dépend pas de k.
3. Par convention, si $m > n$, on pose $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ quels que soient les réels a_k.
4. Souvent m sera égal à 0 ou à 1. On prendra garde au fait que $\sum_{k=1}^{n} a_k$ est une somme de n nombres réels (a_1, a_2, ..., a_n) mais que $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est une somme de $n+1$ nombres réels (a_0, a_1, a_2, ..., a_n). De manière générale, la somme $\sum_{k=m}^{n} a_k$ contient $n - m + 1$ termes.

Exemple 3.

1. Calculer les sommes suivantes : $S_1 = \sum_{k=1}^{7} k$, $S_2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i}$, $S_3 = \sum_{j=1}^{3} j^3$ et $S_4 = \sum_{k=10}^{13} (2k-1)$.
2. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les sommes suivantes : $S_5 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$, $S_6 = 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$ et $S_7 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$.

Solution.

1. $S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$
   $S_2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12 + 6 + 4 + 3}{12} = \frac{25}{12}$
   $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$
   $S_4 = 2 \times 10 - 1 + 2 \times 11 - 1 + 2 \times 12 - 1 + 2 \times 13 - 1 = 19 + 21 + 23 + 25 = 88.$
2. $S_5 = \sum_{k=1}^{5} k^3$, $S_6 = \sum_{k=3}^{10} 2k$ et $S_7 = \sum_{k=0}^{5} 2^k$.

2) Propriétés

Propriété 4. — Linéarité

La somme est linéaire, c'est-à-dire que pour tous entiers naturels m et n, tels que $m \leqslant n$, pour tous réels λ et μ et pour tous réels a_m, a_{m+1}, ..., a_n, b_m, b_{m+1}, ..., b_n,

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k + \mu \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

Démonstration. Soit m et n deux entiers tels que $m \leqslant n$. Soit λ, μ, a_m, a_{m+1}, ..., a_n, b_m, b_{m+1}, ..., b_n des réels. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) &= (\lambda a_1 + \mu b_1) + (\lambda a_2 + \mu b_2) + \cdots + (\lambda a_n + \mu b_n)\\ &= \lambda(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + \mu(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k.\end{aligned}$$

□

Exemple 5. Utiliser la valeur de S_1 calculée dans l'exercice 3 pour déterminer la valeur de $S_8 = \sum_{k=1}^{7} (2k+3)$.

Solution. Par linéarité de la somme

$$S_8 = 2\sum_{k=1}^{7} k + \sum_{k=1}^{7} 3 = 2S_1 + 7 \times 3 = 2 \times 28 + 21 = 77.$$

Propriété 6. — Relation de Chasles

Pour tous entiers naturels m, n et p tels que $m \leqslant p < n$ et pour tous réels a_m, a_{m+1}, ... , a_n,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k.$$

Démonstration. Soit m, n et p des entiers naturels tels que $m \leqslant p < n$. Soit a_m, a_{m+1}, ... , a_n des réels. Alors,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_n = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k.$$

□

Remarque 7. En particulier, pour tous entiers naturels m et n tels que $m \leqslant n$ et pour tout réel a_m, a_{m+1}, ..., a_n, a_{n+1},

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + a_{n+1}.$$

Exemple 8. Utiliser la valeur de S_3 calculée dans l'exercice 3 pour déterminer la valeur de

$$S_9 = \sum_{j=1}^{4} j^3.$$

Solution. Par la relation de Chasles, $S_9 = \sum_{j=1}^{3} j^3 + 4^3 = S_3 + 4^3 = 36 + 64 = 100.$

3) Techniques de calcul

Propriété 9. — Changement d'indice par translation

Soit m, n et p des entiers naturels tels que $m \leqslant n$. Alors, pour tous réels a_m, a_{m+1}, ... a_n,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}.$$

Démonstration. Soit m, n et p des entiers naturels tels que $m \leqslant n$. Soit a_m, a_{m+1}, ... a_n des réels. Alors,

$$\sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = a_{m+p-p} + a_{m+p+1-p} + \cdots + a_{n+p-p} = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

et

$$\sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p} = a_{m-p+p} + a_{m-p+1+p} + \cdots + a_{n-p+p} = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

□

Exemple 10. En utilisant les valeurs calculées dans l'exemple 3, déterminer les valeurs des sommes suivantes :

$$S_{10} = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k+1} \qquad S_{11} = \sum_{k=3}^{5} (k-2)^3 \qquad S_{12} = \sum_{j=9}^{12} (2j+1)$$

Solution.

En posant $i = k+1$, $S_{10} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} = S_2 = \frac{25}{12}$.

En posant $j = k-2$, $S_{11} = \sum_{j=1}^{3} j^3 = S_3 = 36$.

En remarquant que $S_{12} = \sum_{j=9}^{12} (2(j+1)-1)$ et en posant $k = j+1$, $S_{12} = \sum_{k=10}^{13} (2k-1) = 88$.

Propriété 11. — Somme téléscopique

Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$ et a_m, a_{m+1}, ..., a_{n+1} des réels. Alors,

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}.$$

Démonstration. Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$ et a_m. Soit a_{m+1}, ..., a_{n+1} des réels. Alors, par linéarité de la somme

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=m}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=n}^{n} a_k.$$

Ensuite, en posant $j = k+1$, on obtient

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{j=m+1}^{n+1} a_j - \sum_{k=m}^{n} a_k$$

puis, grâce à la relation de Chasles,

$$\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{j=m+1}^{n}a_j+a_{n+1}-\left(a_m+\sum_{k=m+1}^{n}a_k\right)=a_{n+1}-a_m+\sum_{j=m+1}^{n}a_j-\sum_{k=m+1}^{n}a_k=a_{n+1}-a_m$$

car les deux dernières sommes sont égales.

Dès lors,, par linéarité de la somme,

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=m}^{n}(-1)(a_{k+1}-a_k)=(-1)\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k)=(-1)(a_{n+1}-a_m)=a_m-a_{n+1}.$$

□

Exemple 12.

1. Calculer, pour tout entier $k>0$, $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

Solution.

1. Soit un entier $k>0$. Alors, $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{k+1}{k(k+1)}-\dfrac{k}{k(k+1)}=\dfrac{k+1-k}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k(k+1)}$.
2. On déduit de la question précédente que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ et on reconnaît une somme téléscopique donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}$ soit finalement $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$.

II. — Suites et sommes usuelles

1) Définition

Définition 13

Une suite réelle u est une application définie sur une partie A de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Notation 14. Si u est une suite d'une partie A de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, l'image d'un élément $n\in A$ est noté u_n (« u indice n ») plutôt que $u(n)$.

Exemple 15.

1. La suite des puissances de 2 est la suite $u:n\longmapsto 2^n$ et elle est définie sur $A=\mathbb{N}$. Ainsi, $u_0=2^0$, $u_1=2^1=2$, $u_2=2^2=4$, $u_3=2^3=8$, ...
2. La suite des racines carrées des entiers naturels est la suite $v:n\longmapsto\sqrt{n}$ et elle est définie sur $A=\mathbb{N}$. On a alors $v_0=\sqrt{0}=0$, $v_1=\sqrt{1}=1$, $v_2=\sqrt{2}$, $v_3=\sqrt{3}$, $v_4=\sqrt{4}=2$, ...
3. La suite des inverses des entiers naturels non nuls est la suite $t:n\longmapsto\frac{1}{n}$ et elle est définie sur $A=\mathbb{N}^*$. On a alors $t_1=\frac{1}{1}=1$, $t_2=\frac{1}{2}$, $t_3=\frac{1}{3}$, $t_4=\frac{1}{4}$, ...

Remarque 16. La plupart du temps l'ensemble A est $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$.

Il ne faut pas confondre le rang d'un terme avec sa place dans la suite

$$\begin{array}{cccccccc}
\text{rang } 0 & \text{rang } 1 & \text{rang } 2 & \text{rang } 3 & \text{rang } 4 & \cdots & \text{rang } n & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \cdots & u_n & \cdots \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\
1^{\text{er}} \text{ terme} & 2^{\text{e}} \text{ terme} & 3^{\text{e}} \text{ terme} & 4^{\text{e}} \text{ terme} & 5^{\text{e}} \text{ terme} & \cdots & (n+1)^{e} \text{ terme} & \cdots
\end{array}$$

Notation 17. Pour désigner une suite, on utilise plutôt la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou encore $(u_n)_{n\geqslant 3}$ plutôt que la notation fonctionnelle $u : n \longmapsto u_n$.

Exemple 18. Les trois suites u, v et t définies dans l'exemple 15 peuvent respectivement s'écrire $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Il ne faut pas confondre u_n qui désigne le terme de rang n de la suite (c'est donc une nombre) et (u_n) qui désigne la suite u (c'est donc une fonction ou – si on préfère – une liste de nombres).

2) Suites arithmétiques

a) Définition

Définition 19

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} = u_n + r$. Dans ce cas, le nombre r est appelé la raison de la suite (u_n).

$$u_N \xrightarrow{+r} u_{N+1} \xrightarrow{+r} u_{N+2} \xrightarrow{+r} \dots$$

Le nombre réel r doit être indépendant de l'indice n de la suite. Par exemple, une suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2^n$ n'est pas arithmétique car le nombre 2^n dépend de l'indice n.

Exemple 20.

1. La suite (u_n) des entiers naturels définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ est arithmétique de raison 1 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = n + 1 = u_n + 1$.
2. Dans une tirelire, on place 50 euros. Puis, tous les mois, on met 10 euros dans la tirelire. Le nombre u_n d'euros dans la tirelire après n mois est une suite arithmétique de raison 10 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 10$.

Méthode 21 : Comment montrer qu'une suite est arithmétique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est arithmétique de raison r, il suffit de montrer que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} - u_n = r$.
Attention, le résultat r doit être une constante indépendante de n.

Exemple 22. Montrer que la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -5n + 7$ est arithmétique.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = -5(n+1) + 7 - (-5n+7) = -5n - 5 + 7 + 5n - 7 = -5.$$

On en déduit que (u_n) est une suite arithmétique de raison -5.

Méthode 23 : Comment montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ n'est pas arithmétique, il suffit de déterminer deux indices p et q supérieurs ou égaux à N tels que $u_{p+1} - u_p \neq u_{q+1} - u_q$.

Exemple 24. Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 1$ n'est pas arithmétique.

Solution. On a $u_0 = 0^2 + 1 = 1$, $u_1 = 1^1 + 1 = 2$ et $u_2 = 2^2 + 1 = 5$ donc $u_1 - u_0 = 1 \neq 3 = u_2 - u_1$. On conclut que (u_n) n'est pas arithmétique.

Définition 25

Une suite constante est une suite arithmétique de raison 0.

Remarque 26. Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est constante, on montre donc que, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} - u_n = 0$;

b) Forme explicite et représentation graphique

Propriété 27

Soit $r \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est arithmétique de raison r si et seulement si pour tous entiers p et n supérieurs ou égaux à N,

$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

Démonstration. On va commencer par montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant N$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = u_N + (n-N)r$ » est vraie.

Initialisation. $u_N + (N-N)r = u_N + 0 = u_N$ donc $\mathcal{P}(N)$ est vraie.

Hérédité. Soit un entier $n \geqslant N$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $u_n = u_N + (n-N)r$ et, comme (u_n) est une suite arithmétique de raison r,

$$u_{n+1} = u_n + r = u_N + (n-N)r + r = u_N + (n+1-N)r$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n = U_N + (n-N)r$.

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à N. Alors, d'après ce qui précède, $u_n = u_N + (n-N)r$ et $u_p = u_N + (p-N)r$ donc

$$u_n = u_N + (n-p+p-N)r = u_N + (p-N)r + (n-p)r = u_p + (n-p)r.$$

$\square$

Remarque 28. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r définie sur $\mathbb{N}$, on peut prendre $p = 0$ et on obtient alors la formule explicite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

Exemple 29.

1. Si (u_n) est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 + 3n$.
2. Si (v_n) est la suite arithmétique de raison $r = -4$ et de premier terme $u_3 = 2$ alors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_n = 2 + (n-3)(-4) = 14 - 4n$.
3. Si (w_n) est la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -\frac{1}{3}n + 2$ alors (w_n) est la suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

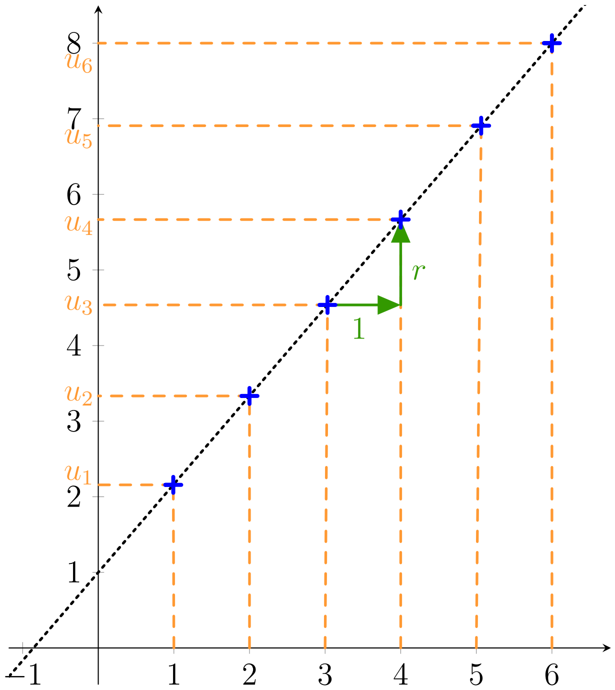
Exemple 30. Soit $(u_n)_{n\geqslant 5}$ une suite arithmétique telle que $u_{10} = 3$ et $u_{20} = 12$. Déterminer la raison et le premier terme de (u_n).

Solution. Notons r la raison de (u_n). Alors, $u_{20} = u_{10} + (20-10)r$ donc $12 = 3 + 10r$ et ainsi $r = \dfrac{9}{10}$. On en déduit que $u_5 = u_{10} + (5-10) \times \dfrac{9}{10} = 3 - 5 \times \dfrac{9}{10} = 3 - \dfrac{9}{2}$ donc $u_5 = -\dfrac{3}{2}$.

Propriété 31

Soit $(u_n)_{n\geqslant N}$ une suite arithmétique de raison r. Alors, le nuage de points représentant (u_n) est constitué de points alignés sur une droite dont le coefficient directeur est r.

Démonstration. Pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n = u_N + (n-N)r = nr + u_N - Nr$. En posant $b = u_N - Nr$, on a donc, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n = rn + b$ donc les points du nuage représentant (u_n) appartiennent à la droite d'équation $y = rx + b$ (dont le coefficient directeur est bien r). $\square$



Remarque 32. Ainsi, les suites arithmétiques sont en quelque sorte l'équivalent pour les suites des fonctions affines.

c) Sommes de termes consécutifs

Propriété 33. — Somme des termes d'une suite constante

Soit a un réel et m et n deux entiers tels que $m \leqslant n$. Alors,

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n-m+1)a.$$

Démonstration. Comme il y a $n-m+1$ entiers entre m et n,

$$\sum_{k=m}^{n} a = \underbrace{a+a+\cdots+a}_{m-m+1 \text{ fois}} = (n-m+1)a.$$

□

Remarque 34. En particulier, on a donc, pour tous entiers m et n tels que $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} 1 = n-m+1.$$

Propriété 35

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$.

On va calculer de deux manière différentes $\sum_{k=0}^{n}(n-k)$.

D'une part, par linéarité de la somme, $\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k = (n+1)n - S_n$.

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(n-k) &= n + (n-1) + \cdots + (n-(n-1)) + (n-n) \\ &= n + (n-1) + \cdots + 1 + 0 \\ &= 0 + 1 + \cdots + (n-1) + n = S_n\end{aligned}$$

Ainsi, $(n+1)n - S_n = S_n$ donc $2S_n = n(n+1)$ et on conclut que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. □

Exemple 36. Calculer la somme des entiers de 1 à 100.

Solution. Dans la somme, le terme d'indice $k=0$ est nul donc

$$\sum_{k=1}^{100} k = \sum_{k=0}^{100} k = \frac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050.$$

Théorème 37. — Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n\geqslant N}$ une suite arithmétique. Alors, pour tous entiers p et n tels que $n \geqslant p \geqslant N$,

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

Démonstration. Soit n et p des entiers tels que $n \geqslant p \geqslant N$.

Notons r la raison de (u_n). Alors, pour tout entier $k \geqslant N$, $u_k = u_p + (k-p)r$ donc, par linéarité de la somme

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{n}(u_p + (k-p)r) = \sum_{k=p}^{n} u_p + r\sum_{k=p}^{n}(k-p).$$

Or, comme u_p est indépendant de k, $\sum\limits_{k=p}^{n} u_p = (n-p+1)u_p$ et, en utilisant le changement d'indice $j = k-p$, $\sum\limits_{k=p}^{n}(k-p) = \sum\limits_{j=0}^{n-p} j = \dfrac{(n-p)(n-p+1)}{2}$ d'après la Propriété 35. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} u_k &= (n-p+1)u_p + r\frac{(n-p)(n-p+1)}{2} = (n-p+1) \times \frac{2u_p + (n-p)r}{2}\\ &= (n-p+1)\frac{u_p + (u_p + (n-p)r)}{2} = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}\end{aligned}$$

car $u_n = u_p + (n-p)r$ d'après la Propriété 27. □

Remarque 38.

1. La formule précédente ne nécessite pas de connaître la raison de la suite mais seulement le premier terme, le dernier terme et le nombre de termes de la somme.
2. Un moyen mnémotechnique pour retenir la formule générale est : la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par

$$(\text{nombre de termes}) \times \frac{1^{\text{er}}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Attention cependant, de u_p à u_n, il y a $n-p+1$ termes et non pas $n-p$.

Exemple 39. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = -3$ et $u_{15} = 13$. Calculer $\sum\limits_{k=5}^{15} u_k$.

Solution. D'après le Théorème 37,

$$\sum_{k=5}^{15} u_k = (15-5+1)\frac{u_5 + u_15}{2} = 11 \times \frac{-3+13}{2} = 11 \times 5 = 55.$$

3) Suites géométriques

a) Définition

Définition 40

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Dans ce cas, le nombre q est appelé la raison de la suite (u_n).

$$u_N \xrightarrow{\times q} u_{N+1} \xrightarrow{\times q} u_{N+2} \xrightarrow{\times q} \dots$$

Comme pour les suites arithmétiques, la raison q ne doit pas dépendre de l'indice n. Par exemple, une suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1) \times u_n$ n'est pas géométrique car le nombre $n+1$ dépend de l'indice n.

Exemple 41.

1. La suite (u_n) des puissances de 2 définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ est géométrique de raison 2 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 \times u_n$.
2. Sur un compte en banque, il y a initialement 2000 euros. Ce compte rapporte 2% par an. Le nombre u_n d'euros sur le compte après n années est une suite géométrique de raison 1,02 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{100}u_n = (1 + 0{,}02)u_n = 1{,}02u_n$.

Méthode 42 : Comment montrer qu'une suite est géométrique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est géométrique de raison q, on transforme, pour tout $n \geqslant N$, u_{n+1} afin de l'écrire sous la forme qu_n.
Attention, le résultat q doit être une constante indépendante de n.

Exemple 43. Montrer que la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2(-3)^{n+2}$ est une suite géométrique.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} = 2(-3)^{n+1+2} = 2(-3)^{n+2+1} = 2(-3)^{n+2} \times (-3)^1 = (-3)u_n.$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison -3.

Méthode 44 : Comment montrer qu'une suite n'est pas géométrique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ n'est pas géométrique, il suffit de déterminer deux indices p et q supérieurs ou égaux à N tels que $u_p \neq 0$, $u_q \neq 0$ et $\frac{u_{p+1}}{u_p} \neq \frac{u_{q+1}}{u_q}$.

Exemple 45. Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 1$ n'est pas géométrique.

Solution. On a vu, dans l'exemple 24 que $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_2 = 5$ donc $\dfrac{u_1}{u_0} = 2 \neq \dfrac{5}{2} = \dfrac{u_2}{u_1}$.
Ainsi, (u_n) n'est pas une suite géométrique.

b) Forme explicite

Propriété 46

Soit $q \in \mathbb{R}^*$. Une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est géométrique de raison q si et seulement si pour tous entiers p et n supérieurs ou égaux à N,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Démonstration. On va commencer par montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant N$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = u_N q^{N-n}$ » est vraie.

Initialisation. $u_N q^{N-N} = u_N q^0 = u_N$ donc $\mathcal{P}(N)$ est vraie.

Hérédité. Soit un entier $n \geqslant N$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $u_n = u_N q^{n-N}$ et, comme (u_n) est une suite géométrique de raison q,

$$u_{n+1} = u_n \times q = u_N q^{n-N} \times q = u_N q^{n+1-N}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n = U_N q^{n-N}$.

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à N. Alors, d'après ce qui précède, $u_n = u_N q^{n-N}$ et $u_p = u_N q^{p-N}$ donc

$$u_n = u_N q^{n-p+p-N} = u_N q^{p-N} q^{n-p} = u_p q^{n-p}.$$

□

Remarque 47. Si (u_n) est une suite géométrique de raison q définie sur $\mathbb{N}$, on peut prendre $p = 0$ et on obtient alors la formule explicite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n.$$

Attention, cependant, si la suite (u_n) est définie seulement à partir du rang 1, on obtient la formule explicite

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Exemple 48.

1. Si (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times 3^n$.
2. Si (v_n) est la suite géométrique de raison $q = -4$ et de premier terme $u_3 = 2$ alors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_n = 2 \times (-4)^{n-3}$.
3. Si (w_n) est la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 4(-\frac{1}{5})^n$ alors (w_n) est la suite géométrique de raison $-\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_0 = 4$.

Exemple 49. Soit $(u_n)_{n \geqslant 5}$ une suite géométrique telle que $u_{10} = 3$ et $u_{12} = 48$. Quelle sont les valeurs possibles pour la raison q de (u_n) ?

Solution. Par la Propriété 46, $u_{12} = u_{10} q^{12-10}$ donc $48 = 3q^2$ c'est-à-dire $q^2 = 16$. On en déduit que les valeurs possibles pour q sont 4 et -4.

c) Sommes de termes consécutifs

Propriété 50

Soit $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$.

1. Si $q \neq 1$ alors
$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
2. Si $q = 1$ alors $S_n = n + 1$.

Démonstration.

1. Supposons que $q \neq 1$. Alors, par linéarité,
$$(1-q)S_n = (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} (1-q)q^k = \sum_{k=0}^{n} (q^k - q^{k+1}).$$
On reconnaît une somme téléscopique donc $(1-q)S_n = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$. Comme $q \neq 1$, $1 - q \neq 0$ et on conclut que $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Si $q = 1$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $q^k = 1^k = 1$ donc $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1) \times 1 = n + 1$.

$\square$

Exemple 51. Calculer $\sum_{k=0}^{10} 2^k$ et $\sum_{k=4}^{10} 2^k$

Solution. Par la Propriété 50, comme $2 \neq 1$,
$$\sum_{k=0}^{10} 2^k = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \frac{1 - 2048}{-1} = 2047.$$
Par la relation de Chasles, $\sum_{k=0}^{10} 2^k = \sum_{k=0}^{3} 2^k + \sum_{k=4}^{10} 2^k$ donc
$$\sum_{k=4}^{10} 2^k = \sum_{k=0}^{10} 2^k - \sum_{k=0}^{3} 2^k = 2047 - \frac{1 - 2^4}{1 - 2} = 2047 - 15 = 2032.$$

Théorème 52. — Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \geqslant N}$ une suite géométrique de raison q. Soit m et n des entiers tels que $n \geqslant m \geqslant N$.

1. Si $q \neq 1$ alors
$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1 - q}.$$
2. Si $q = 1$ alors
$$\sum_{k=m}^{n} u_k = (n - m + 1)u_m.$$

Démonstration.

1. **1.** Supposons que $q \neq 1$. D'après la Propriété 46, pour tout entier $k \geqslant m$, $u_k = u_m q^{m-k}$ donc, par linéarité de la somme,

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} u_m q^{k-m} = u_m \sum_{k=m}^{n} q^{k-m}.$$

Or, en posant $j = k - m$, $\sum_{k=m}^{n} q^{k-m} = \sum_{k=0}^{n-m} q^j$ et, comme $q \neq 1$, on déduit de la Propriété 50 que $\sum_{k=m}^{n} q^{k-m} = \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$. On conclut alors que $\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q}$.

2. **2.** Si $q = 1$ alors, pour tout entier $k \geqslant m$, $u_k = u_m 1^{k-m} = u_m$ donc $\sum_{k=m}^{n} u_m = (n-m+1)u_m$.

□

Remarque 53. Un moyen mnémotechnique pour retenir la formule générale est : la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est donnée par

$$(1^{\text{er}} \text{ terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$

Attention cependant, de u_m à u_n, il y a $n - m + 1$ termes et non pas $n - m$.

Exemple 54. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Calculer $\sum_{k=3}^{10} u_k$.

Solution. D'après le Théorème 52, comme $q \neq 1$,

$$\sum_{k=3}^{10} u_k = u_3 \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10-3+1}}{1-\frac{1}{2}} = u_3 \frac{1-\frac{1}{2^8}}{\frac{1}{2}} = u_3 \times 2 \times \left(1 - \frac{1}{256}\right) u_3 \times 2 \times \frac{255}{256} = u_3 \times \frac{255}{128}.$$

Or, $u_3 = u_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = 5 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8}$ donc

$$\sum_{k=3}^{10} u_k = \frac{5}{8} \times \frac{255}{128} = \frac{1275}{1024}.$$

4) Somme des premiers carrés d'entiers

Propriété 55

Soit n un entier naturel. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démonstration. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

- **Initialisation.** $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2 = 0$ et $\dfrac{0 \times (0+1) \times (2 \times 0 + 1)}{6} = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, on suppose que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et on veut montrer que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Or, par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

Ainsi, pour conclure, il suffit de montrer que $2n^2+7n+6 = (n+2)(2n+3)$. Or,

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2+3n+4n+6 = 2n^2+7n+6$$

donc l'égalité est bien vérifiée et finalement $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2kn+3)}{6}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$.

• **Conclusion.** Ainsi, par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. □

Exemple 56. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer $\sum_{k=1}^{n-1} k^2$.

2. Déterminer $\sum_{k=1}^{n} (2(k-1)^2+1)$.

Solution.

1. Comme le terme de la somme d'indice $k=0$ est nul,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

2. Par linéarité de la somme,

$$\sum_{k=1}^{n} (2(k-1)^2+1) = 2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 + n.$$

De plus, en posant $j = k-1$, il vient $\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} j^2 = \sum_{j=1}^{n-1} j^2$ donc, d'après la question 1, $\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n}(2(k-1)^2+1) = 2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}n = \frac{n(n-1)(2n-1)+3n}{3} = \frac{n\left[(n-1)(2n-1)+3\right]}{3}.$$

III. — Formule du binôme de Newton

Définition 57

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la factorielle de n, notée $n!$, par :

$$0! = 1 \qquad \text{et} \qquad n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n \text{ si } n > 0.$$

Exemple 58. On a donc $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ et $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

Définition 59

Soit n et k deux entiers naturels. On définit le coefficient binomial « k parmi n », noté $\binom{n}{k}$, par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$$

Remarque 60. En particulier, on a $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exemple 61. Calculer $\binom{7}{2}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{5}{3}$ et $\binom{6}{4}$.

Solution. Grâce à la remarque précédent, $\binom{7}{2} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21$ et $\binom{4}{1} = 4$ et, par définition, $\binom{5}{3} = \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ et $\binom{6}{4} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 15$.

Remarque 62. Dans la pratique, le calcul des coefficients binomiaux devient vite fastidieux et on utilisera la calculatrice.

Propriété 63. — Symétrie

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Démonstration. Comme $k \in [\![0, n]\!]$, $0 \leqslant k \leqslant n$ donc $0 \geqslant -k \geqslant -n$ et ainsi $n \geqslant n - k \geqslant 0$. Dès lors, $n - k \in [\![0, n]\!]$ donc, par définition,

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

□

Exemple 64. On a donc $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

Théorème 65. — Formule de Pascal

On suppose ici que $n \geqslant 2$. Soit k un entier strictement compris entre 0 et n. Alors,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Démonstration. Comme k est compris entre 1 et $n-1$, $k-1$ est compris entre 0 et $n-2$ donc

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times k}{(k-1)!(n-k)! \times k} + \frac{(n-1)! \times (n-k)}{k!(n-1-k)! \times (n-k)} \\
&= \frac{(n-1)! \times k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)! \times (n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

$\square$

Application 66. Le théorème précédent permet de calculer de proche en proche les coefficients binomiaux à l'aide d'un tableau triangulaire appelé « triangle de Pascal » :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1			$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$	
2	1	2	1			$\binom{n}{k}$	
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Propriété 67. — Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ »

Si $n = 0$ alors, $(a+b)^n = (a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

• **Initialisation.** Si $n = 1$ alors $(a+b)^n = (a+b)^1 = a + b$ et

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = 1b + 1a = a + b$$

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit un entier $n \geqslant 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, par linéarité de la somme

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

Or, par le changement de variable $j = k + 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-(j-1)} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}$$

donc

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}.$$

Grâce à la relation de Chasles, on en déduit que

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

donc, par linéarité de la somme,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \right) + a^{n+1} \\ &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}\end{aligned}$$

Or, étant donné que $n + 1 \geqslant 2$, on déduit de la la formule de Pascal que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ donc

$$(a+b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}$$

et, sachant que $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$,

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

De plus, on a vu que $\mathcal{P}(0)$ est vraie donc on conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Exemple 68. Pour tous réels a et b,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Exemple 69. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

Solution. On peut remarquer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k}$ donc, par la formule du binôme de Newton, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.

De la même façon, on peut remarquer que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times (-1)^k \times 1^{n-k}$ donc, par la formule du binôme de Newton, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0$ (car $n > 0$).