⧫ Chapitre 5. Sommation et suites usuelles

I. — Sommation

1) Notation $\sum$

Définition 1

Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$. Pour tous réels a_m, a_{m+1}, ..., a_n, on note $\sum_{k=m}^{n} a_k$ la somme $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$. Ainsi, par définition, $\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$.

Remarque 2.

1. Dans l'écriture $\sum_{k=m}^{n} a_k$, on dit que a_k est le terme général de la somme et que k est l'indice de sommation. Cet indice est une variable muette dont le nom n'a pas d'importance. Ainsi, $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j$...
2. La valeur de la somme $\sum_{k=m}^{n} a_k$ dépend de m et n mais elle ne dépend pas de k.
3. Par convention, si $m > n$, on pose $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ quels que soient les réels a_k.
4. Souvent m sera égal à 0 ou à 1. On prendre garde au fait que $\sum_{k=1}^{n} a_k$ est une somme de n nombres réels (a_1, a_2, ..., a_n) mais que $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est une somme de $n+1$ nombres réels (a_0, a_1, a_2, ..., a_n). De manière générale, la somme $\sum_{k=m}^{n} a_k$ contient $n-m+1$ termes.

Exemple 3.

1. Calculer les sommes suivantes : $S_1 = \sum_{k=1}^{7} k$, $S_2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i}$, $S_3 = \sum_{j=1}^{3} j^3$ et $S_4 = \sum_{k=10}^{13} (2k-1)$.
2. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les sommes suivantes : $S_5 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$, $S_6 = 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20$ et $S_7 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$

2) Propriétés

Propriété 4. — Linéarité

La somme est linéaire, c'est-à-dire que pour tous entiers naturels m et n, tels que $m \leqslant n$, pour tous réels λ et μ et pour tous réels a_m, a_{m+1}, ..., a_n, b_m, b_{m+1}, ..., b_n,

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k + \mu \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

Exemple 5. Utiliser la valeur de S_1 calculée dans l'exercice 3 pour déterminer la valeur de $S_8 = \sum_{k=1}^{7} (2k+3)$.

Propriété 6. — Relation de Chasles

Pour tous entiers naturels m, n et p tels que $m \leqslant p < n$ et pour tous réels a_m, a_{m+1}, ... , a_n,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k.$$

Remarque 7. En particulier, pour tous entiers naturels m et n tels que $m \leqslant n$ et pour tout réel a_m, a_{m+1}, ..., a_n, a_{n+1},

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + a_{n+1}.$$

Exemple 8. Utiliser la valeur de S_3 calculée dans l'exercice 3 pour déterminer la valeur de

$$S_9 = \sum_{j=1}^{4} j^4.$$

3) Techniques de calcul

Propriété 9. — Changement d'indice par translation

Soit m, n et p des entiers naturels tels que $m \leqslant n$. Alors, pour tous réels a_m, a_{m+1}, ... a_n,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}.$$

Exemple 10. En utilisant les valeurs calculées dans l'exemple 3, déterminer les valeurs des sommes suivantes :

$$S_{10} = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k+1} \qquad S_{11} = \sum_{k=3}^{6} (k-2)^3 \qquad S_{12} = \sum_{j=9}^{12} (2j+1)$$

Propriété 11. — Somme téléscopique

Soit m et n deux entiers naturels tels que $m \leqslant n$ et a_m, a_{m+1}, ..., a_{n+1} des réels. Alors,

$$\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}.$$

Exemple 12.

1. Calculer, pour tout entier $k > 0$, $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

II. — Suites et sommes usuelles

1) Définition

Définition 13

Une suite réelle u est une application définie sur une partie A de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Notation 14. Si u est une suite d'une partie A de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, l'image d'un élément $n \in A$ est noté u_n (« u indice n ») plutôt que $u(n)$.

Exemple 15.

1. La suite des puissances de 2 est la suite $u : n \longmapsto 2^n$ et elle est définie sur $A = \mathbb{N}$. Ainsi, $u_0 = 2^0$, $u_1 = 2^1 = 2$, $u_2 = 2^2 = 4$, $u_3 = 2^3 = 8$, ...
2. La suite des racines carrées des entiers naturels est la suite $v : n \longmapsto \sqrt{n}$ et elle est définie sur $A = \mathbb{N}$. On a alors $v_0 = \sqrt{0} = 0$, $v_1 = \sqrt{1} = 1$, $v_2 = \sqrt{2}$, $v_3 = \sqrt{3}$, $v_4 = \sqrt{4} = 2$, ...
3. La suite des inverses des entiers naturels non nuls est la suite $t : n \longmapsto \frac{1}{n}$ et elle est définie sur $A = \mathbb{N}^*$. On a alors $t_1 = \frac{1}{1} = 1$, $t_2 = \frac{1}{2} = 1$, $t_3 = \frac{1}{3}$, $t_4 = \frac{1}{4}$, ...

Remarque 16. La plupart du temps l'ensemble A est $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$.

Il ne faut pas confondre le rang d'un terme avec sa place dans la suite

rang 0	rang 1	rang 2	rang 3	rang 4	$\cdots$	rang n	$\cdots$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	
u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	$\cdots$	u_n	$\cdots$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\uparrow$	
1^{er} terme	2^{e} terme	3^{e} terme	4^{e} terme	5^{e} terme	$\cdots$	$(n+1)^{e}$ terme	$\cdots$

Notation 17. Pour désigner une suite, on utilise plutôt la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou encore $(u_n)_{n\geqslant 3}$ plutôt que la notation fonctionnelle $u : n \longmapsto u_n$.

Exemple 18. Les trois suites u, v et t définies dans l'exemple 20 peuvent respectivement s'écrire $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Il ne faut pas confondre u_n qui désigne le terme de rang n de la suite (c'est donc une nombre) et (u_n) qui désigne la suite u (c'est donc une fonction ou – si on préfère – une liste de nombres).

2) Suites arithmétiques

a) Définition

Définition 19

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} = u_n + r$. Dans ce cas, le nombre r est appelé la raison de la suite (u_n).

$$u_N \xrightarrow{+r} u_{N+1} \xrightarrow{+r} u_{N+2} \xrightarrow{+r} \ldots$$

⚠ Le nombre réel r doit être indépendant de l'indice n de la suite. Par exemple, une suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2^n$ n'est pas arithmétique car le nombre 2^n dépend de l'indice n.

Exemple 20.

1. La suite (u_n) des entiers naturels définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ est arithmétique de raison 1 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = n + 1 = u_n + 1$.
2. Dans une tirelire, on place 50 euros. Puis, tous les mois, on met 10 euros dans la tirelire. Le nombre u_n d'euros dans la tirelire après n mois est une suite arithmétique de raison 10 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 10$.

Méthode 21 : Comment montrer qu'une suite est arithmétique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est arithmétique de raison r, il suffit de montrer que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} - u_n = r$.
Attention, le résultat r doit être une constante indépendante de n.

Exemple 22. Montrer que la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -5n + 7$ est arithmétique.

Méthode 23 : Comment montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ n'est pas arithmétique, il suffit de déterminer deux indices p et q supérieurs ou égaux à N tels que $u_{p+1} - u_p \neq u_{q+1} - u_q$.

Exemple 24. Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 1$ n'est pas arithmétique.

Définition 25

Une suite constante est une suite arithmétique de raison 0.

Remarque 26. Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est constante, on montre donc que, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} - u_n = 0$;

b) Forme explicite et représentation graphique

Propriété 27

Soit $r \in \mathbb{R}$. Une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est arithmétique de raison r si et seulement si pour tous entiers p et n supérieurs ou égaux à N,

$$u_n = u_p + (n - p)r.$$

Remarque 28. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r définie sur $\mathbb{N}$, on peut prendre $p = 0$ et on obtient alors la formule explicite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

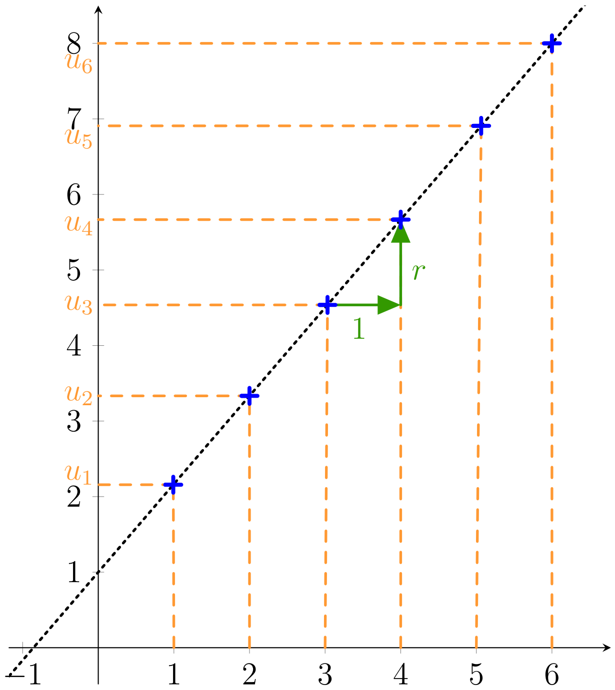
Exemple 29.

1. Si (u_n) est la suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 + 3n$.
2. Si (v_n) est la suite arithmétique de raison $r = -4$ et de premier terme $u_3 = 2$ alors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_n = 2 + (n-3)(-4) = 14 - 4n$.
3. Si (w_n) est la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -\frac{1}{3}n + 2$ alors (w_n) est la suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = 2$.

Exemple 30. Soit $(u_n)_{n \geqslant 5}$ une suite arithmétique telle que $u_{10} = 3$ et $u_{20} = 12$. Déterminer la raison et le premier terme de (u_n).

Propriété 31

Soit $(u_n)_{n \geqslant N}$ une suite arithmétique de raison r. Alors, le nuage de points représentant (u_n) est constitué de points alignés sur une droite dont le coefficient directeur est r.



Remarque 32. Ainsi, les suites arithmétiques sont en quelque sorte l'équivalent pour les suites des fonctions affines.

c) Sommes de termes consécutifs

Propriété 33. — Somme des termes d'une suite constante

Soit a un réel et m et n deux entiers tels que $m \leqslant n$. Alors,

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n - m + 1)a.$$

Remarque 34. En particulier, on a donc, pour tous entiers m et n tels que $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1.$$

Propriété 35

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exemple 36. Calculer la somme des entiers de 1 à 100.

Théorème 37. — Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \geqslant N}$ une suite arithmétique. Alors, pour tous entiers p et n tels que $n \geqslant p \geqslant N$,

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

Remarque 38.

1. La formule précédente ne nécessite pas de connaître la raison de la suite mais seulement le premier terme, le dernier terme et le nombre de termes de la somme.
2. Un moyen mnémotechnique pour retenir la formule générale est : la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par

$$(\text{nombre de termes}) \times \frac{1^{\text{er}}\ \text{terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

   Attention cependant, de u_p à u_n, il y a $n-p+1$ termes et non pas $n-p$.

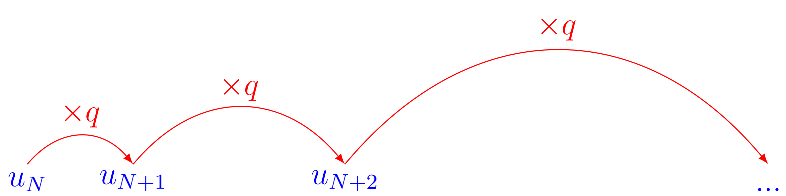
Exemple 39. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_5 = -3$ et $u_{15} = 13$. Calculer $\sum_{k=5}^{15} u_k$.

3) Suites géométriques

a) Définition

Définition 40

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} = q \times u_n$. Dans ce cas, le nombre q est appelé la raison de la suite (u_n).



Comme pour les suites arithmétiques, la raison q ne doit pas dépendre de l'indice n. Par exemple, une suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1) \times u_n$ n'est pas géométrique car le nombre $n+1$ dépend de l'indice n.

Exemple 41.

1. La suite (u_n) des puissances de 2 définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$ est géométrique de raison 2 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2 \times u_n$.

2. Sur un compte en banque, il y a initialement 2000 euros. Ce compte rapporte 2% par an. Le nombre u_n d'euros sur le compte après n années est une suite géométrique de raison 1,02 car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{100}u_n = (1 + 0{,}02)u_n = 1{,}02u_n$.

Méthode 42 : Comment montrer qu'une suite est géométrique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est géométrique de raison q, on transforme, pour tout $n \geqslant N$, u_{n+1} afin de l'écrire sous la forme qu_n.
Attention, le résultat q doit être une constante indépendante de n.

Exemple 43. Montrer que la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2(-3)^{n+2}$ est une suite géométrique.

Méthode 44 : Comment montrer qu'une suite n'est pas géométrique

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ n'est pas géométrique, il suffit de déterminer deux indices p et q supérieurs ou égaux à N tels que $u_p \neq 0$, $u_q \neq 0$ et $\frac{u_{p+1}}{u_p} \neq \frac{u_{q+1}}{u_q}$.

Exemple 45. Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 1$ n'est pas géométrique.

b) Forme explicite

Propriété 46

Soit $q \in \mathbb{R}^*$. Une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ est géométrique de raison q si et seulement si pour tous entiers p et n supérieurs ou égaux à N,

$$u_n = q^{n-p}u_p.$$

Remarque 47. Si (u_n) est une suite géométrique de raison q définie sur $\mathbb{N}$, on peut prendre $p = 0$ et on obtient alors la formule explicite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n.$$

Attention, cependant, si la suite (u_n) est définie seulement à partir du rang 1, on obtient la formule explicite

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 q^{n-1}.$$

Exemple 48.

1. Si (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = 5$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times 3^n$.

2. Si (v_n) est la suite géométrique de raison $q = -4$ et de premier terme $u_3 = 2$ alors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $u_n = 2 \times (-4)^{n-3}$.

3. Si (w_n) est la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 4(-\frac{1}{5})^n$ alors (w_n) est la suite géométrique de raison $-\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_0 = 4$.

Exemple 49. Soit $(u_n)_{n \geqslant 5}$ une suite géométrique telle que $u_{10} = 3$ et $u_{12} = 48$. Quelle sont les valeurs possibles pour la raison q de (u_n) ?

c) Sommes de termes consécutifs

Propriété 50

Soit $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$.

1. Si $q \neq 1$ alors
$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$
2. Si $q = 1$ alors $S_n = n+1$.

Exemple 51. Calculer $\sum_{k=1}^{10} 2^k$.

Théorème 52. — Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \geqslant N}$ une suite géométrique de raison q. Soit m et n des entiers tels que $n \geqslant m \geqslant N$.

1. Si $q \neq 1$ alors
$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.$$
2. Si $q = 1$ alors
$$\sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1)u_m.$$

Remarque 53. Un moyen mnémotechnique pour retenir la formule générale est : la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est donnée par
$$(1^{\text{er}} \text{ terme}) \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}.$$
Attention cependant, de u_m à u_n, il y a $n-m+1$ termes et non pas $n-m$.

Exemple 54. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Calculer $\sum_{k=3}^{10} u_k$.

4) Somme des premiers carrés d'entiers

Propriété 55

Soit n un entier naturel. Alors,
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exemple 56. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer $\sum_{k=1}^{n-1} k^2$.
2. Déterminer $\sum_{k=1}^{n} (2(k-1)^2+1)$.

III. — Formule du binôme de Newton

Définition 57

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la factorielle de n, notée $n!$, par :

$$0! = 1 \qquad \text{et} \qquad n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n \text{ si } n > 0.$$

Exemple 58. On a donc $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ et $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

Définition 59

Soit n et k deux entiers naturels. On définit le coefficient binomial « k parmi n », noté $\binom{n}{k}$, par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$$

Remarque 60. En particulier, on a $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exemple 61. Calculer $\binom{7}{2}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{5}{3}$ et $\binom{6}{4}$.

Remarque 62. Dans la pratique, le calcul des coefficients binomiaux devient vite fastidieux et on utilisera la calculatrice.

Propriété 63. — Symétrie

Soit k un entier compris entre 0 et n. Alors, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Exemple 64. On a donc $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.

Théorème 65. — Formule de Pascal

On suppose ici que $n \geqslant 2$. Soit k un entier strictement compris entre 0 et n. Alors,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Application 66. Le théorème précédent permet de calculer de proche en proche les coefficients binomiaux à l'aide d'un tableau triangulaire appelé « triangle de Pascal » :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1					$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$	
2						$\binom{n}{k}$	
3							
4							
5							
6							

Propriété 67. — Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple 68. Pour tous réels a et b,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Exemple 69. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

IV. — Exercices

Exercice 1. Écrire les sommes suivantes sans symbole $\sum$.

$$S_1 = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i} \qquad S_2 = \sum_{j=0}^{6} 8 \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{3} \sqrt{1+k} \qquad S_4 = \sum_{i=1}^{4} (m+m^2) \qquad S_5 = \sum_{n=1}^{4} 2n.$$

Exercice 2. Écrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$.

1. $S_1 = 1+2+3+4+5+\cdots+10$;
2. $S_2 = 1+2+4+8+16+\cdots+1024$;
3. $S_3 = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \dfrac{1}{3\times 4} + \cdots + \dfrac{1}{9\times 10}$;
4. $S_4 = 0-1+2-3+4-5+\cdots+10.$

Exercice 3. Déterminer si les égalités suivantes sont vraies ou fausses pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels a_0, a_1, ..., a_{n+3}.

1. $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} a_{k-3} = \sum_{k=7}^{n+3} a_k$ **2.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-2} a_k$ **3.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=n}^{0} a_{n-k}.$

Exercice 4. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout réel λ et pour tous réels a_1, a_2, ..., a_n, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda + a_i) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} a_i$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous réels a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous réels a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tous réels a_1, a_2, ..., a_n, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^p = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p$.

Exercice 5.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+2)2^n = (n+1)2^{n+1}$.

2. En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^{k-1} = n2^n$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle S_1 = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^{k+1} - k^k\right)$ et $\displaystyle S_2 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$.

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, déterminer le terme général de la suite (u_n).

1. $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 3$.

2. $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 5$.

3. $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n$.

4. $u_0 = -1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4}$.

5. $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 3u_{n-1}$.

6. $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 1$.

7. $u_2 = 3$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n$.

Exercice 8. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n en fonction de n et en déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 9. On considère une population de 1 000 bactéries dans une boite de pétri. La population double chaque heure, et à la fin de chaque heure on en rajoute 10 000. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre de bactéries après n heures, comptée en milliers d'individus.

1. Quelle est la valeur de u_0 ?

2. Calculer u_1 et u_2.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

4. On pose $v_n = u_n + 10$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de v_n en fonction de n.

6. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 10. On place sur un compte rémunérer à 2% par an la somme de 2000 euros. Combien y a-t-il sur le compte après 10 ans ?

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels impairs.

1. Écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n à l'aide du symbole $\sum$.
2. En utilisant la linéarité de la somme, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de S_n sans le symbole $\sum$.

Exercice 12. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Calculer les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} (-5)^k \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k+1} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k}{n}$$
$$S_5 = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}3^k \qquad S_6 = \sum_{k=2}^{n} 3^k \qquad S_7 = \sum_{k=0}^{n} 1^k \qquad S_8 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k^2 2^k}{2^{k+1}}$$

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} k2^{k-1}$. Le but de l'exercice est de calculer S.

Pour cela, on pose, pour tout réel $x > 1$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i$

1. Justifier que f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et calculer, pour tout réel $x > 1$, $f'(x)$ de deux manières différentes.
2. En déduire la valeur de S.

Exercice 14. Calculer les nombres suivants : **a.** $\binom{10}{9}$ **b.** $\binom{8}{2}$ **c.** $\binom{21}{21}$ **d.** $\binom{50}{48}$.

Exercice 15. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, développer :

a. $(1+x)^5$ **b.** $(1-x)^6$ **c.** $(x-y)^4$.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer l'égalité $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, puis en déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 17. Soit un entier $n \geqslant 2$. Calculer les sommes suivantes.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}3^k \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k \qquad S_3 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^k \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^{n-k}}.$$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right)$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$ et $D_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$.

1. Calculer S_n
2. Exprimer S_n en faisant intervenir T_n et D_n.
3. Rappeler une expression, sans symbole somme, de D_n puis en déduire une expression sans symbole somme, de T_n

Exercice 19. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.