⧫ Chapitre 4. Ensembles et applications

I. — Ensembles

1) Vocabulaire

La notion d'ensemble est une notion intuitive qui a longtemps été utilisée sans être formalisée. Entre la fin du XIXe siècle et le début du XXe siècle, différents mathématiciens (Cantor, Russel, Frege) ont tenté de donner un fondement théorique à cette notion. Ils se sont confrontés à différents problèmes dont certains profonds.

On se contentera ici d'une approche intuitive.

Définition 1

Un **ensemble** E est une collection d'objets. Ces objets sont appelés les **éléments** de E. Si x est un élément de E, on dit que x **appartient** à E et on note $x \in E$. Inversement, si x n'est pas un élément de E, on dit que x **n'appartient pas** à E et on note $x \notin E$.

Exemple 2. On a vu dans le chapitre 1 les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et, dans le chapitre 3, les intervalles qui sont des cas particuliers d'ensembles.

Notation 3. Il y a essentiellement deux façons de noter un ensemble E.

- La notation **en extension** (ou par énumération) : dans ce cas, on énumère les éléments de E entre deux accolades en les séparant par des virgules ou des points-virgules.
- La notation **en compréhension** : dans ce cas, on utilise une propriété P ou une expression qui caractérise les éléments de E (parfois parmi les éléments d'un autre ensemble F).

Exemple 4. L'ensemble E des carrés d'entiers compris entre 1 et 20 s'écrit :

- en extension : $E = \{1\,;4\,;9\,;16\}$;
- en compréhension (avec une propriété) : $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 20 \text{ et } (\exists k \in \mathbb{N},\ n = k^2)\}$;
- en compréhension (avec un expression) : $E = \{k^2 \mid k \in \{1, 2, 3, 4\}\}$.

Remarque 5.

1. Dans l'exemple précédent, l'écriture en compréhension n'est pas très pertinente car il est beaucoup plus simple d'énumérer les éléments de E. Cependant, une telle énumération n'est pas toujours possible, en particulier, lorsque l'ensemble considéré est infini. Par exemple, si on souhaite écrire l'ensemble des carrés d'entiers, on ne pourra pas utiliser l'écriture en extension et il faudra utiliser une écriture en compréhension, par exemple $\{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.
2. Un ensemble n'est pas ordonné et ne contient chaque élément qu'une seule fois. Ainsi, $\{2, 3, 4\} = \{4, 3, 2\} = \{2, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 3, 2, 4, 4, 2\}$.

Exemple 6.

1. Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$ alors $[\![a, b]\!]$ est l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre a et b : $[\![a, b]\!] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;
2. L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est défini par $\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$.
3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est défini par $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*\}$.

4. Si a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$ alors les différentes types d'intervalles sont définis par $[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, $[a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$, $]a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, $]a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $[a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$, $]a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, $]-\infty\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$ et $]-\infty\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.

Exemple 7. Écrire les ensembles suivants en compréhension et, lorsque cela est possible, en extension.

1. E est l'ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à leurs carrés ;
2. F est l'ensemble des multiples entiers de 3 ;
3. G est l'ensemble des puissances de 3 comprises entre 1 et 100 ;
4. D est l'ensemble des rationnels dont le dénominateur dans l'écriture sous forme irréductible est une puissance de 2. L'ensemble D s'appelle l'ensemble des nombres dyadiques.

Solution.

1. En compréhension, $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant x^2\}$. On ne peut pas écrire E en extension car E est infini. En fait, $E = [0\,;1]$.
2. En compréhension, $F = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 3k\}$ ou $F = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. On ne peut pas écrire F en extension car F est infini.
3. En extension, $G = \{1\,;3\,;9\,;27\,;81\}$.
   En compréhension, $G = \{n \in \mathbb{N} \mid (1 \leqslant n \leqslant 100) \text{ et } (\exists k \in \mathbb{N},\ n = 3^k)\}$ ou encore $G = \{3^k \mid k \in [\![0, 4]\!]\}$.
4. En compréhension, $D = \{\frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Une fraction $\frac{a}{2^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ n'est pas nécessairement irréductible mais, si elle ne l'est pas, elle ne peut se simplifier que par une puissance de 2 et elle restera donc de la forme $\frac{b}{2^m}$ avec $b \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$.
   On ne peut pas écrire D en extension car D est infini.

Définition 8

Soit E un ensemble. Une **partie** de E (ou un sous-ensemble de E) est un ensemble F tel que tout élément de F est aussi un élément de E. On note alors $F \subset E$.
L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 9. Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alors $\{1, 3, 5\}$ est une partie de E. Ainsi, $\{1, 3, 5\} \subset E$ et $\{1, 3, 5\} \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple 10. Montrer que $\mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{D}$ où D est l'ensemble des nombres dyadiques défini dans l'exemple 7.

solution. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors, $n = \frac{n}{2^0}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \in \mathbb{N}$ donc $n \in D$. Ainsi, $\mathbb{Z} \subset D$.
Soit $x \in D$. Alors, il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x = \frac{a}{2^n}$. Dès lors, $x = \frac{a \times 5^n}{2^n \times 5^n} = \frac{a \times 2^n}{10^n}$ avec $a \times 2^n \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ donc $x \in \mathbb{D}$. Ainsi, $D \subset \mathbb{D}$.
On conclut donc que $\mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{D}$.

Propriété 11. — Principe de double-inclusion

Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Exemple 12. Démontrer l'égalité des deux ensembles E et F suivants :

$$E = \{6k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{et} \qquad F = \{6m + 5 \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

Solution. Montrons que $E \subset F$.
Soit $x \in E$. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 6k - 1$. Ainsi,

$$x = 6k - 1 + 5 - 5 = 6k - 6 + 5 = 6(k-1) + 5.$$

Posons $m = k - 1$. Alors, $x = 6m + 5$ et, comme $k \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$ donc $x \in F$. Ainsi, $E \subset F$.
Montrons $F \subset E$.
Soit $x \in F$. Alors, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 6m + 5$. Ainsi,

$$x = 6m + 5 - 1 + 1 = 6m + 6 - 1 = 6(m+1) - 1.$$

Posons $k = m + 1$. Alors, $x = 6m + 5$ et, comme $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ donc $x \in E$. Ainsi, $F \subset E$.
Par le principe de double-inclusion, $E = F$.

Propriété 13

Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément : il s'agit de l'**ensemble vide**. On le note $\varnothing$.

Remarque 14. L'ensemble vide est une partie de n'importe quel ensemble E.

Exemple 15. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ lorsque $E = \{a, b, c\}$.

Solution. L'ensemble E possède :

- une seule partie à 0 élément : il s'agit de $\varnothing$;
- trois parties à 1 élément : il s'agit de $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c\}$;
- trois parties à 2 éléments : il s'agit de $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{b, c\}$;
- une seule partie 3 éléments : il s'agit de $\{a, b, c\} = E$;

Ainsi, $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Définition 16

1. Un ensemble ne contenant qu'un seul élément est appelé un **singleton**.
2. Un ensemble contenant exactement deux éléments est appelé une **paire**.

Exemple 17. L'ensemble $\{3\}$ est un singleton ne contenant que le nombre 3. L'ensemble $\{3\,;\pi\}$ est une paire.

Exemple 18. Soit x et y des éléments d'un ensemble E. À quelle condition nécessaire et suffisante l'ensemble $\{x, y\}$ est-il une paire ?

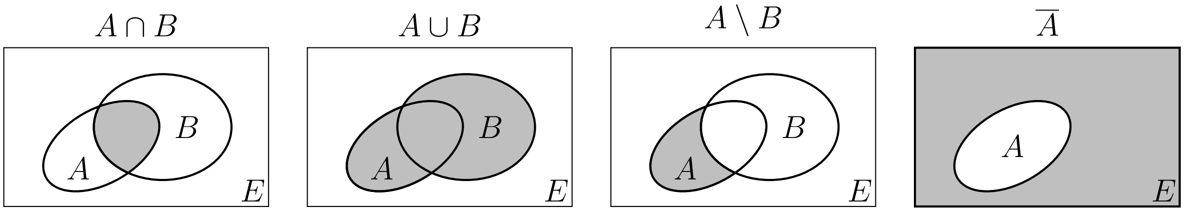
Solution. L'ensemble $\{x, y\}$ est une paire si et seulement si $x \neq y$.

2) Opérations ensemblistes

Définition 19

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On définit :

1. l'**intersection** de A et B par $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$;
2. l'**union** de A et B par $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$;
3. la **différence ensembliste** de A et B par $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$;
4. le **complémentaire** de A, noté $\overline{A}$ ou A^c, comme la différence de E et A. Ainsi, $\overline{A} = A^c = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$.



Remarque 20. $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ est l'ensemble des réels non nuls donc $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$. De manière générale, si A est un ensemble de nombres alors A^* désigne $A \setminus \{0\}$.

Exemple 21.

1. Si $E = \{v, w, x, y, z\}$, $A = \{v, w, x\}$ et $B = \{x, y\}$, déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
2. Soit A et B des parties d'un ensemble E. Montrer que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Solution.

1. $A \cap B = \{x\}$, $A \cup B = \{v, w, x, y\}$, $A \setminus B = \{v, w\}$, $B \setminus A = \{y\}$, $\overline{A} = \{y, z\}$ et $\overline{B} = \{v, w, z\}$.
2. Par définition,

$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\} = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in \overline{B}\} = A \cap \overline{B}.$$

Propriété 22. — commutativité et associativité

Soit A et B des parties d'un ensemble E.

1. $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$ ($\cap$ et $\cup$ sont commutatifs).
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ($\cap$ et $\cup$ sont associatifs).

Démonstration.

1. Soit $x \in E$. Alors,

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B \iff x \in B \text{ et } x \in A \iff x \in B \cap A$$

donc $A \cap B = B \cap A$.
La démonstration est la même pour l'union en remplaçant les « et » par des « ou ».

2. Soit $x \in E$. Alors,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\iff x \in A \text{ et } x \in B \cap C \iff x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \in C \\ &\iff x \in A \cap B \text{ et } x \in C \iff x \in (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

donc $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
La démonstration est la même pour l'union en remplaçant les « et » par des « ou ».

$\square$

Propriété 23. — distributivité

Soit A, B et C des parties d'un ensemble E.

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (distributivité de $\cap$ sur $\cup$).
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributivité de $\cup$ sur $\cap$).

Démonstration.

1. Soit $x \in (A \cup B) \cap C$. Alors, $x \in A \cup B$ et $x \in C$. Comme $x \in A \cup B$ alors $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$ alors $x \in A$ et $x \in C$ i.e. $x \in A \cap C$. Sinon, $x \in B$ donc $x \in B$ et $x \in C$ i.e. $x \in B \cap C$. Ainsi, on a montré que $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap C$ donc $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. On a donc prouvé que $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
   Inversement, soit $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Alors, $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap C$. Si $x \in A \cap C$ alors $x \in A$ et $x \in C$ donc $x \in A \cup B$ et $x \in C$ donc $x \in (A \cup B) \cap C$. Sinon, $x \in B \cap C$ donc $x \in B$ et $x \in C$ donc $x \in A \cup B$ et $x \in C$ donc $x \in (A \cup B) \cap C$. Ainsi, dans tous les cas $x \in (A \cup B) \cap C$ donc $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$.
   Par le principe de double inclusion, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
2. Soit $x \in (A \cap B) \cup C$. Alors, $x \in A \cap B$ ou $x \in C$. Si $x \in A \cap B$ alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$ i.e. $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Sinon, $x \in C$ donc $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$ i.e. $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Ainsi dans tous les cas, $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ donc $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
   Inversement, soit $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Alors, $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$. Comme $x \in A \cup C$, $x \in A$ ou $x \in C$. De même, $x \in B \cup C$ donc $x \in B$ ou $x \in C$. Si $x \in C$ alors $x \in (A \cap B) \cup C$. Sinon, $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B) \cup C$. Ainsi, dans tous les cas, $x \in (A \cap B) \cup C$ donc $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$.
   Par le principe de double inclusion, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

$\square$

Propriété 24. — Lois de De Morgan

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Démonstration.

1. Soit $x \in E$. Alors,

$$x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A \text{ et } x \notin B \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Ainsi, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

2. Soit $x \in E$. Alors,

$$x \in \overline{A \cap B} \Longleftrightarrow x \notin A \cap B \Longleftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \Longleftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Ainsi, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

□

Remarque 25. Les définitions et propriétés précédentes peuvent s'étendre à n parties A_1, A_2, ..., A_n d'un ensemble E. Ainsi, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \in E \mid \exists i \in [\![1, n]\!],\ x \in A_i\}$ et $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ x \in A_i\}$.

On retiendra qu'une union correspond à une quantification existentielle et une intersection à une quantification universelle.

Définition 26

Soit E et F deux ensembles. On définit le **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$ (ce qui se lit « E croix F »), par

$$E \times F = \{(x\,;y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Remarque 27. Si $E = F$, on notera E^2 au lieu de $E \times E$.

Exemple 28.

1. Si $E = \{0\,;1\,;2\}$ et $F = \{a\,;b\}$ alors $E \times F = \{(0\,;a)\ ;(1\,;a)\ ;(2\,;a)\ ;(0\,;b)\ ;(1\,;b)\ ;(2\,;b)\}$.
2. $\mathbb{Z}^2$ désigne l'ensemble des couples d'entiers $(a\,;b)$. Ainsi, $(2\,;-6) \in \mathbb{Z}^2$ car $2 \in \mathbb{Z}$ et $-6 \in \mathbb{Z}$ mais $\left(2\,;\frac{7}{3}\right) \notin \mathbb{Z}^2$ car $\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$.
3. $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ de réels. Par le choix d'un repère, cet ensemble peut s'interpréter graphiquement comme l'ensemble des coordonnées des points du plan.

Remarque 29. De manière plus générale, si n est un entier au moins égal à 2, on peut définir le produit cartésien de n ensembles E_1, E_2, ..., E_n par

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(a_1\,;a_2\,;\ldots\,;a_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!], a_i \in E_i\}.$$

Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, on note E^n le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$.

Par exemple, $\mathbb{R}^3 = \{(x\,;y\,;z) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}\}$.

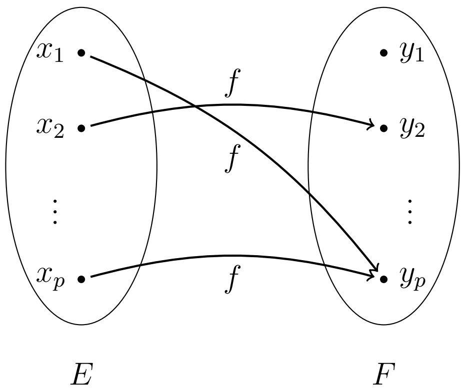
Un élément de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ s'appelle un $n-$uplet. Pour $n = 2$, on parle de couple, pour $n = 3$, on parle de triplet et, pour $n = 4$, on parle de quadruplet.

II. — Applications

1) Définitions et notations

Définition 30

Étant donné deux ensembles E et F, une **application** ou une **fonction** f de E dans F peut se définir comme la donnée d'un procédé qui permet, à tout élément $x \in E$ d'associer un et un seul élément $y \in F$.
L'élément y est alors appelé l'**image** de x par f et on le note $f(x)$.
Si $y \in F$, tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est appelé un **antécédent** de y par f.
Si f est une application de E dans F, on dit que E est l'**ensemble de départ** ou l'**ensemble de définition** de f et que F est l'**ensemble d'arrivée** de f.



Ici,
$f(x_1) = y_p$
$f(x_2) = y_2$
$f(x_p) = y_p$

Exemple 31. Si on considère l'application f de $[\![0, 99]\!]$ dans $[\![0, 9]\!]$ qui à un entier compris entre 0 et 99 associe son chiffre le plus à gauche dans l'écriture décimale alors $f(53) = 5$, $f(98) = 9$, $f(31) = 3$ et $f(0) = 0$. Les antécédents de 1 par f sont les nombres 1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 et 19. En revanche, l'unique antécédent de 0 par f est 0.

Notation 32. Si f est une application de E dans F, on note $f : E \longrightarrow F$. Si on dispose d'une expression explicite de $f(x)$ pour tout $x \in E$, on notera

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Remarque 33. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Un même élément x ne peut pas avoir plusieurs images par f mais un élément y de F peut avoir plusieurs antécédents différents par f.
2. Il ne faut pas confondre f et $f(x)$: f est une fonction, c'est-à-dire une procédé d'association des éléments E et F alors que $f(x)$ est un élément de F.
3. Il existe plusieurs façons de définir une fonction : à l'aide d'une formule, d'un tableau, d'une courbe, d'une situation concrète,...

Exemple 34.

1. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

   a. Déterminer l'image de 10 par f.

   b. Déterminer le(s) antécédent(s) de 9 par f.

c. Donner un élément de $\mathbb{R}$ qui n'admet aucun antécédent par f. Même question avec un unique antécédent.

2. On considère la fonction $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui, à tout entier naturel n, associe la somme des chiffres de n dans son écriture décimale.

a. Déterminer $g(1427)$.

b. Déterminer le(s) antécédent(s) de 0 et de 1 par g.

c. Caractériser l'ensemble des entiers naturels n tels que $g(n)$ soit un multiple de 3.

Solution.

1. a. $f(10) = 10^2 = 100$.

b. Chercher les antécédents de 9 par f revient à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 9$. Or, pour tout réel x,

$$f(x) = 9 \iff x^2 = 9 \iff \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \iff |x| = 3 \iff x = 3 \text{ ou } x = -3.$$

Ainsi, les antécédents de 9 par f sont 3 et -3.

c. Pour tout réel x, ff$(x) = x^2 \geqslant 0$ donc -1 n'a pas d'antécédent par f.
Pour tout réel x,

$$f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

donc 0 admet un unique antécédent par f.

2. a. $g(1427) = 1 + 4 + 2 + 7 = 14$.

b. L'unique antécédent de 0 par g est 0 et les antécédents de 1 par g sont les nombres de la forme 10^n avec $n \in \mathbb{N}$.

c. Un nombre entier est un multiple de 3 si et seulement si la somme de ses chiffres dans l'écriture décimale est aussi un multiple de 3 donc l'ensemble des entiers naturels n tels que $g(n)$ est un multiple de 3 est exactement l'ensemble des multiples de 3.

Définition 35

Deux applications f et g sont **égales** si elles ont le même ensemble de départ E, le même ensemble d'arrivée F et si, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

Notation 36. Soit E et F deux ensembles. L'ensemble des applications de E dans F se note F^E ou $\mathscr{F}(E, F)$.

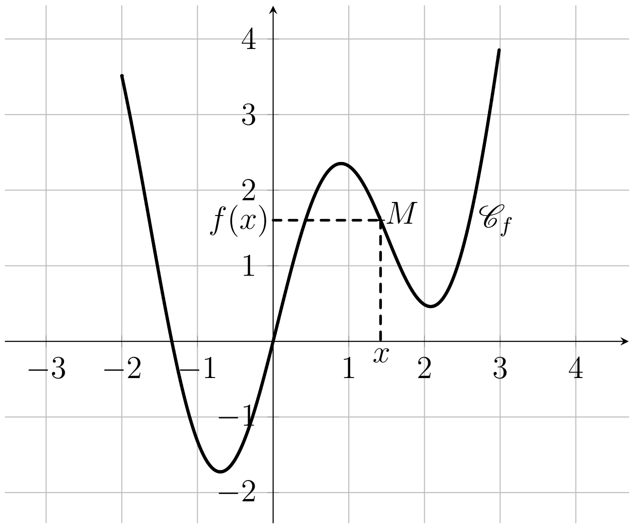
Exemple 37.

1. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

2. $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 38

Si E et F sont des parties de $\mathbb{R}$, la **courbe représentative** d'une fonction $f : E \longrightarrow F$ dans un repère $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,; f(x))$ lorsque x parcourt E. On note cette courbe $\mathscr{C}_f$.



Exemple 39. Considérons la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$$

1. Le point A de coordonnées $(1\,;0{,}5)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
2. Le point B de coordonnées $(2\,;0{,}4)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$?
3. Le point C de coordonnées $(-1\,;a)$ appartient à $\mathscr{C}_f$. Quelle est la valeur de a ?
4. Quelles sont les valeurs du réel b pour lesquelles le point de coordonnées $(b\,;1)$ appartient à $\mathscr{C}_f$?

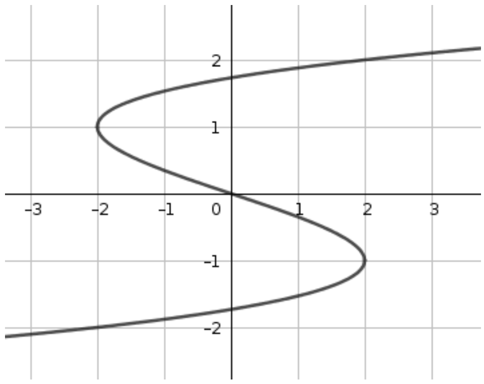
Solution.

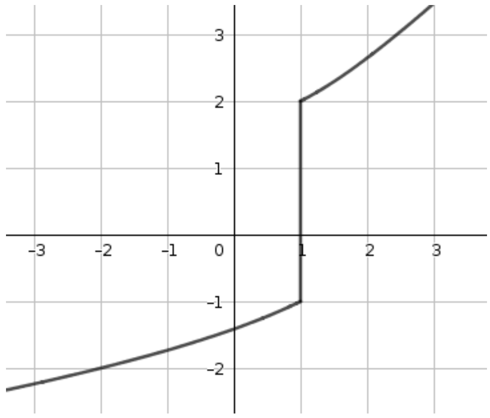
1. Comme $f(x_\mathrm{A}) = \dfrac{1}{1^2+1} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 = y_\mathrm{A}$, $\mathrm{A} \in \mathscr{C}_f$.
2. Comme $f(x_\mathrm{B}) = \dfrac{1}{1^2+1} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2 \neq y_\mathrm{B}$, $\mathrm{B} \notin \mathscr{C}_f$.
3. Comme $\mathrm{C} \in \mathscr{C}_f$, $y_\mathrm{C} = f(x_\mathrm{C})$ i.e. $a = \dfrac{1}{(-1)^2+1} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $a = 0{,}5$.
4. Chercher les réels b tels que le point de coordonnées $(b\,;1)$ appartienne à $\mathscr{C}_f$ revient à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(b) = 1$ d'inconnue b. Or, pour tout réel b,

$$f(b) = 1 \iff \frac{1}{b^2+1} = 1 \iff b^2+1 = 1 \iff b^2 = 0 \iff b = 0.$$

Ainsi, l'unique réel b tel que le point de coordonnées $(b\,;1)$ appartienne à $\mathscr{C}_f$ est $b = 0$.

Remarque 40. Toute fonction peut être représentée par une courbe mais toute courbe n'est pas la représentation graphique d'une fonction. En effet, par définition, tout réel x de l'ensemble de départ doit avoir une image et une seule donc deux points différents ne peuvent pas avoir la même abscisse.





Les courbes ci-dessus ne représentent pas des fonctions. Pour celle de gauche, il y a 3 points de la courbe ayant la même abscisse -1 et pour celle de droite, il y a une infinité de points ayant une abscisse égale à 1.

2) Exemples à connaître

• Soit E un ensemble. La **fonction identité** de E, notée id_E, est l'application

$$\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

• Les **fonctions affines** sont les fonctions de la forme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array}$$

où a et b sont des réels. La courbe représentative d'une fonction affine est une droite $\mathcal{D}$. Le nombre a s'appelle le **coefficient directeur** (ou la pente) de $\mathcal{D}$ et le nombre b s'appelle l'**ordonnée à l'origine** de $\mathcal{D}$.

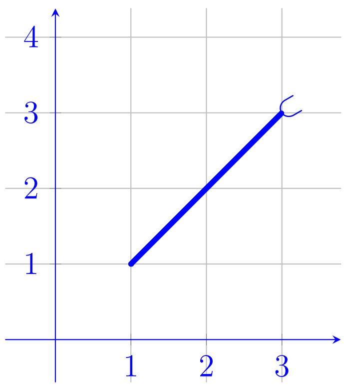
Si $a = 0$, on dit que f est **constante** et si $b = 0$ on dit que f est **linéaire**.

• La **fonction carré** f est l'application

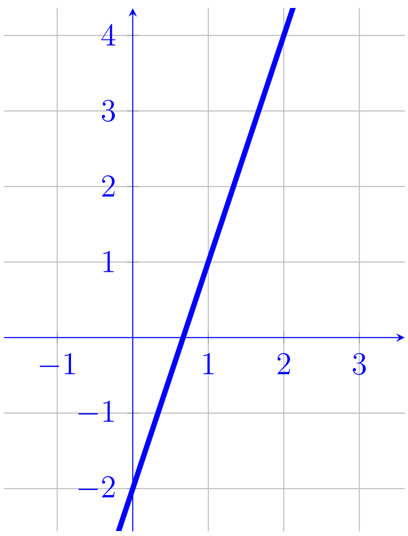
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Exemple 41. Représenter graphiquement la fonction $\mathrm{id}_{[1;3[}$, la fonction $f : x \longmapsto 3x-2$ et la fonction carré.

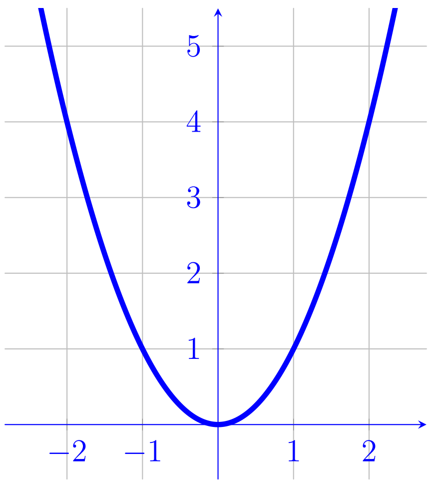
Solution.



Courbe de $\mathrm{id}_{[1;3[}$



Courbe de $f : x \longmapsto 3x-2$



Courbe de la fonction carré

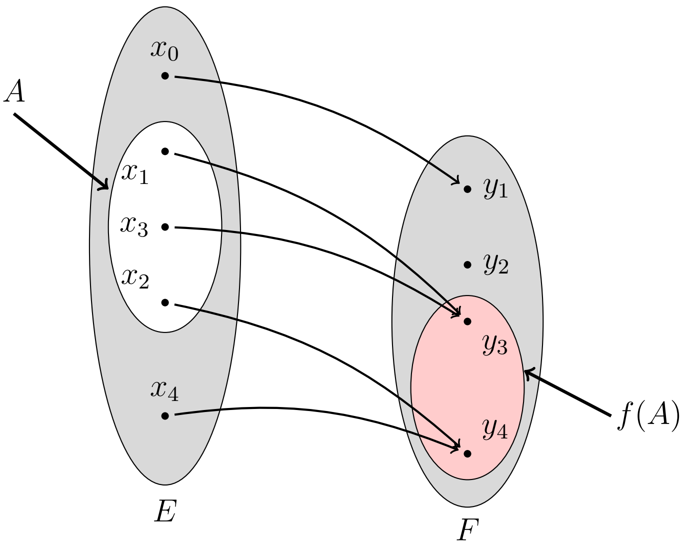
3) Image directe d'un ensemble par une application

Définition 42

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Si A est une partie de E, on appelle **image directe** de A par f, notée $f(A)$, l'ensemble

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) \mid x \in A\} \\ &= \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\} \end{aligned}$$

c'est-à-dire l'ensemble des images des éléments de A par f.
L'image directe de E est appelée l'image de f et on la note $f(E)$ ou $\operatorname{Im} f$.



Remarque 43. Par définition, $f(A)$ est une partie de F donc $f(A) \subset F$. On prendra garde au fait de ne pas confondre $f(x)$ pour $x \in E$ qui est un élément de F et $f(A)$ pour $A \subset E$ qui est une partie de F.

Exemple 44. Soit f la fonction carré définie précédemment. Déterminer $f(A)$ dans chacun des cas suivants. (On pourra s'aider de la courbe représentative de f).

1. $A = \{-3, -2, 0, 1, 3, 4\}$
2. $A = [1\,;5]$
3. $A =]-2\,;3]$.
4. $A = \mathbb{R}$.

Solution.

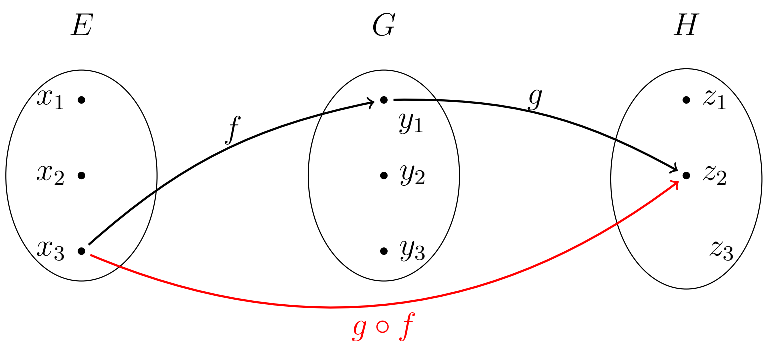
1. $f(A) = \{(-3)^2, (-2)^2, 0^1, 1^2, 3^2, 4^2\} = \{0, 1, 4, 9, 16\}$.
2. Grâce à la courbe de la fonction carré, $f(A) = [1\,;25]$.
3. Grâce à la courbe de la fonction carré, $f(A) = [0\,;9]$.
4. Grâce à la courbe de la fonction carré, $f(A) = \mathbb{R}_+$.

4) Composition

Définition 45

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : G \longrightarrow H$ deux applications telles que $f(E) \subset G$. On définit l'**application composée** de f suivie de g, notée $g \circ f$ (ce qui se lit « g rond f ») par :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$



Ici,
$f(x_3) = y_1$
$g(y_1) = z_2$
$(g \circ f)(x_3) = z_2$

Exemple 46. On suppose que f est la fonction carré. Dans chacun des cas suivants, déterminer si on peut définir $f \circ g$ et $g \circ f$ et, si c'est le cas, déterminer une expression de ces fonctions.

1. g est la fonction affine $x \longmapsto x + 1$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. g est la fonction racine carrée définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$

3. g est la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.

Solution.

1. Les deux fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ donc on peut définir $f \circ g$ et $g \circ f$ et, pour tout réel x,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

et

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1.$$

2. Comme g est à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, on peut définir $f \circ g$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

De même, comme $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+$, on peut définie $g \circ f$ et, pour tout réel x,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|\,.$$

3. Comme g est à valeurs dans $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}$, on peut définir $f \circ g$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

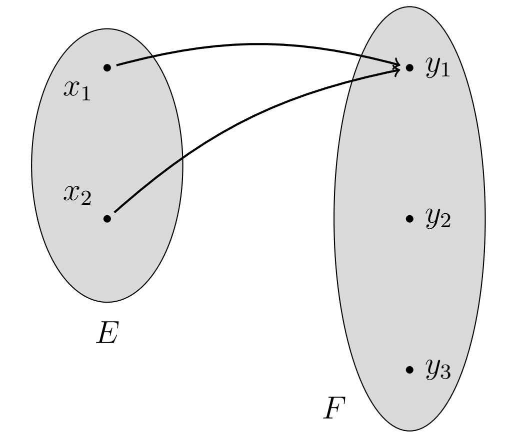
$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}.$$

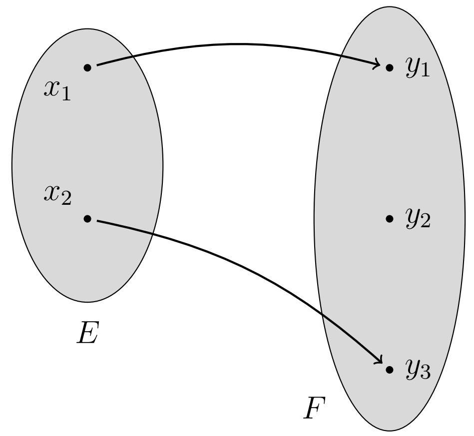
En revanche, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}^*$ donc on ne peut pas définir $g \circ f$.

5) Injection, surjection, bijection

Définition 47

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est **injective** (ou que f est une **injection**) si, pour tout $y \in F$, y possède au plus un antécédent par f.
Autrement dit, la fonction f est injective si, pour tout $(x\,;x') \in E^2$, $f(x) = f(x')$ si et seulement si $x = x'$.





Cette application n'est pas injective. En effet, $f(x_1) = f(x_2) = y_1$ alors que $x_1 \neq x_2$	Cette application est injective.

Exemple 48.

1. Si E est un ensemble, la fonction identité id_E est une injection.
2. La fonction carré f définie précédemment n'est pas injective car 4 possède deux antécédents : 2 et -2.
3. La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est injective : si $y \leqslant 0$ alors y n'a pas d'antécédent par exp et si $y > 0$ alors l'unique antécédent de y par exp est $x = \ln(y)$.

Méthode 49

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
• Pour démontrer que f est injective, on considère deux éléments x et x' de E tels que $f(x) = f(x')$ et on montre que $x = x'$.
• Pour montrer que f n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments différents x et x' de E tels que $f(x) = f(x')$.

Exemple 50. Étudier l'injectivité des applications suivantes.

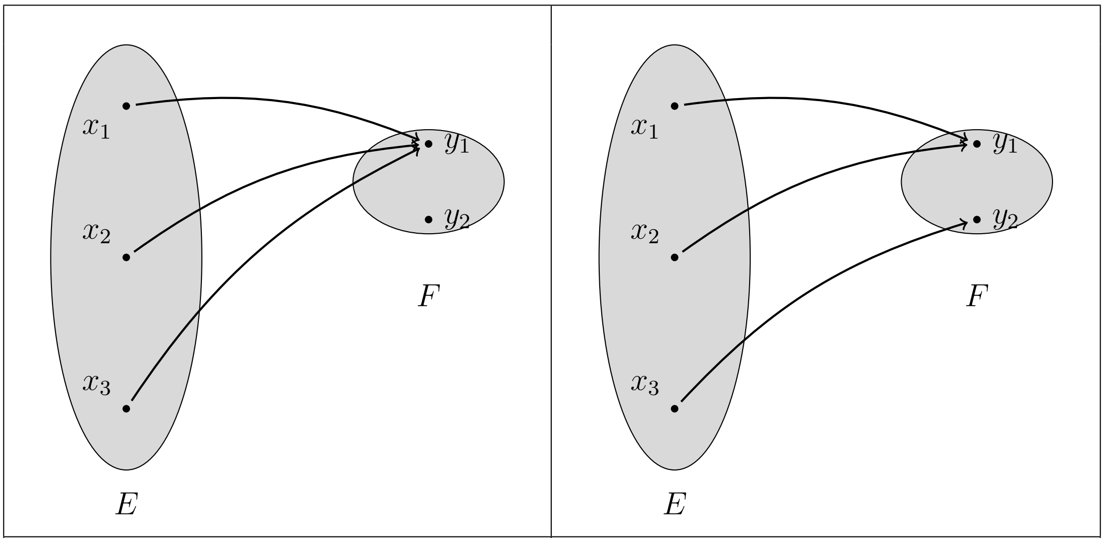
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5-3x \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5-3x^2 \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n^2 \end{array}$$

Solution.
• Soit x et x' deux réels tels que $f(x) = f(x')$. Alors, $5 - 3x = 5 - 3x'$ donc $-3x = -3x'$ et ainsi $x = x'$. On conclut que f est injective.
• On remarque que $g(-1) = 5 - 3(-1)^2 = 5 - 3 = 2$ et $g(1) = 5 - 3 \times 1^2 = 5 - 3 = 2$. Ainsi, $g(-1) = g(1)$ et $-1 \neq 1$ donc g n'est pas injective.

• Soit n et n' deux entiers tels que $h(n) = h(n')$. Alors, $2n^2 = 2n'^2$ donc $n^2 = n'^2$ donc $\sqrt{n^2} = \sqrt{n'^2}$ i.e. $|n| = |n'|$. Or, n et n' sont positifs donc $n = n'$. Ainsi, on conclut que h est injective.

Définition 51

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est **surjective** (ou que f est une **surjection**) si, pour tout $y \in F$, y possède au moins un antécédent par f.
Autrement dit, f est surjective si, pour tout $y \in F$, il existe (au moins) un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Ceci est encore équivalent à dire que $f(E) = F$.



Cette application n'est pas surjective. En effet, y_2 n'a pas d'antécédent	Cette application est surjective. y_1 et y_2 ont (au moins) un antécédent

Exemple 52.

1. Si E est un ensemble, la fonction identité id_E est surjective.
2. La fonction carré $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie précédemment n'est pas surjective car -3 n'a pas d'antécédent par f. Cependant, si on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, alors elle est surjective.
3. Il en est de même de la fonction exp qui n'est pas surjective si on la voit comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais qui le devient si on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 53

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

• Pour montrer que f est surjective, on considère un élément $y \in F$ et on montre qu'il admet au moins un antécédent par f, ce qui revient à montrer que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x possède au moins une solution dans E.

• Pour montrer que f n'est pas surjective, il faut trouver un élément $y \in F$ qui n'admet pas d'antécédent par f, ce qui revient à montrer que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x ne possède pas de solution dans E.

Exemple 54. Étudier la surjectivité des applications de l'exemple 50

Solution.

• Soit un réel y. Alors, pour tout réel x,

$$f(x)=y \Longleftrightarrow 5-3x=y \Longleftrightarrow -3x=y-5 \Longleftrightarrow x=-\frac{y-5}{3}.$$

Ainsi, y possède au moins un antécédent par f et on conclut que f est surjective.

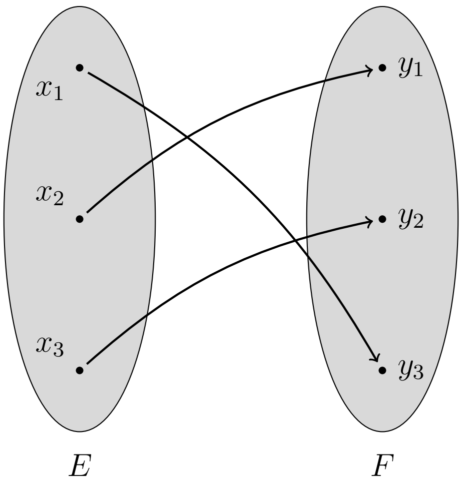
• Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ donc $-3x^2 \leqslant 0$ donc $g(x) \leqslant 5$. Ainsi, par exemple, 6 n'a pas d'antécédent par g donc g n'est pas surjective.

• Pour tout entier naturel n, $2n^2$ est un nombre pair donc, par exemple, 1 n'a pas d'antécédent par h. Ainsi, h n'est pas surjective.

Remarque 55. Par définition, une application $f : E \longrightarrow f(E)$ est toujours surjective. Autrement dit, si une application n'est pas surjective, on peut toujours réduire son ensemble d'arrivée pour qu'elle le devienne. Ainsi, l'application carré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas surjective mais elle le devient si on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.

Définition 56

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est **bijective** (ou que f est une **bijection**) si elle est à la fois injective et surjective.
Autrement dit, f est bijective si, pour tout $y \in F$, y possède exactement un antécédent par f.



Exemple 57.

1. Si E est un ensemble, la fonction identité id_E est une bijection.
2. La fonction racine carrée définie de $[0\,;+\infty[$ dans $[0\,;+\infty[$ est bijective.
3. La fonction carré n'est pas bijective si on la voit comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle le devient si on la voit comme une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Exemple 58. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\}$ définie par $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ est bijective.

Solution. Remarquons que f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ car si $\frac{x+1}{x-1}=1$ alors $x+1=x-1$ donc $1=-1$, ce qui est absurde. Dès lors, $1 \notin \operatorname{Im} f$ et ainsi $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$,

$$\begin{aligned} y=f(x) &\Longleftrightarrow y=\frac{x+1}{x-1} \underset{x\neq 1}{\Longleftrightarrow} y(x-1)=x+1 \Longleftrightarrow yx-y=x+1 \\ &\Longleftrightarrow yx-x=y+1 \Longleftrightarrow x(y-1)=y+1 \underset{y\neq 1}{\Longleftrightarrow} x=\frac{y-1}{y+1}. \end{aligned}$$

De plus, si $\dfrac{y-1}{y+1}=1$ alors $y-1=y+1$ i.e. $-1=1$ ce qui est absurde donc $\dfrac{y+1}{y-1}\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ainsi, on conclut que tout élément $y\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans lui-même.

Remarque 59. Soit une application $f:E\longrightarrow F$. Alors,

- f est injective si, pour tout $y\in F$, l'équation $f(x)=y$ d'inconnue x possède au plus une solution dans E ;
- f est surjective si, pour tout $y\in F$, l'équation $f(x)=y$ d'inconnue x possède au moins une solution dans E ;
- f est bijective si, pour tout $y\in F$, l'équation $f(x)=y$ d'inconnue x possède exactement une solution dans E ;

Théorème 60

Soit une application $f:E\longrightarrow F$. Alors, f est bijective si et seulement s'il existe une application $g:F\longrightarrow E$ telle $f\circ g=\mathrm{id}_F$ et $g\circ f=\mathrm{id}_E$.
De plus, dans ce cas, g est unique et bijective.

Démonstration. Supposons que f est bijective. Soit $y\in F$. Comme f est bijective, y admet un unique antécédent x par f. Considérons alors l'application g qui à y associe x. Elle est bien définie car x existe et est unique. De plus, si $x\in E$ alors x est l'unique antécédent de $f(x)$ par f donc $g(f(x))=x$ donc $g\circ f=\mathrm{id}_E$ et si $y\in F$ alors $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f donc $f(g(y))=y$ et ainsi $f\circ g=\mathrm{id}_F$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une application $g:F\longrightarrow E$ telle que $f\circ g=\mathrm{id}_F$ et $g\circ f=\mathrm{id}_E$. Soit $(x\,;x')\in E^2$. Si $f(x)=f(x')$ alors, comme g est une application $g(f(x))=g(f(x'))$ donc, comme $g\circ f=\mathrm{id}_E$, $x=x'$. Ainsi, f est injective. Soit $y\in F$. Alors, comme $f\circ g=\mathrm{id}_F$, $f(g(y))=y$ donc $g(y)$ est un antécédent de y par f et ainsi f est surjective. On conclut donc que f est bijective.

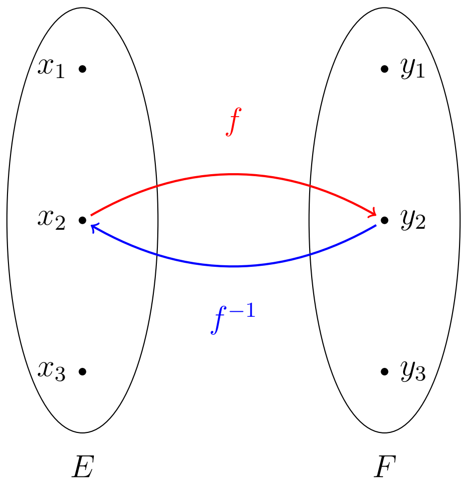
Montrons que g est unique. Supposons qu'il existe deux applications g et g' telles que $f\circ g=f\circ g'=\mathrm{id}_F$ et $g\circ f=g'\circ f=\mathrm{id}_E$. Soit $y\in F$. Comme $f\circ g=\mathrm{id}_F$, $f(g(y))=y$ donc, comme $g'\circ f=\mathrm{id}_E$, $g'(f(g(y)))=g(y)$ i.e. $g'(y)=g(y)$. Ainsi, $g'=g$ donc g est bien unique.

Enfin, g est bijective d'après le sens réciproque car il existe une application $f:E\longrightarrow F$ telle que $g\circ f=\mathrm{id}_E$ et $f\circ g=\mathrm{id}_F$. □

Remarque 61. Une seule des deux égalités $g\circ f=\mathrm{id}_E$ ou $f\circ g=\mathrm{id}_F$ ne suffit pas comme on l'a vu dans les exemples 46, 48 et 52 : si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ est la fonction carré et $g:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ est la fonction racine carrée alors $f\circ g=\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$ mais f n'est pas injective.

Définition 62

Soit $f:E\longrightarrow F$ une application bijective. L'unique application $g:F\longrightarrow E$ telle que $g\circ f=\mathrm{id}_E$ et $f\circ g=\mathrm{id}_F$ est appelée la **bijection réciproque** (ou simplement l'**application réciproque**) de f. On la note f^{-1}.



Exemple 63.

1. Si E est un ensemble, la bijection réciproque de id_E est elle-même : $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$.
2. Si a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$ alors $f : x \longmapsto ax + b$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est $f^{-1} : x \longmapsto \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.
3. La fonction
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
est une bijection et sa bijection réciproque est
$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$
4. La fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une bijection et sa bijection réciproque est la fonction $\exp^{-1} = \ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 64. On reprend la fonction f de l'exercice 58. Calculer, pour tout réel $x \neq 1$, $f(f(x))$ et retrouver ainsi le résultat de l'exercice 58.

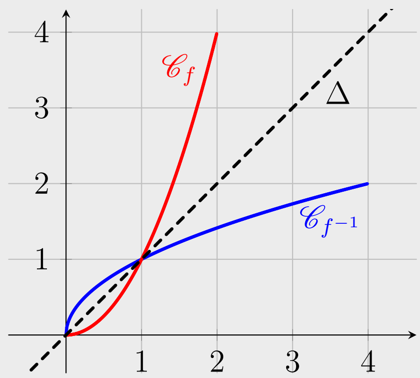
Solution. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Comme $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on peut bien calculer $f(f(x))$ et

$$f(f(x)) = \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-(x-1)}{x-1}} = \frac{2x}{2} = x.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(f(x)) = x$ donc $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$, ce qui permet de conclure que f réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans lui-même et que $f^{-1} = f$.

Propriété 65

Si E et F sont deux parties de $\mathbb{R}$ et si $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective alors les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.



Démonstration. Par définition, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$,

$$M(x,y) \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \iff N(y,x) \in \mathscr{C}_{f^{-1}}.$$

Ainsi, un point M appartient à $\mathscr{C}_f$ si et seulement si son symétrique par rapport Δ appartient à $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à Δ. □

Propriété 66

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections. Alors, $g \circ f$ est une bijection de E dans G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. Posons $u = g \circ f$ et $v = f^{-1} \circ g^{-1}$. Soit $x \in E$. Alors,

$$\begin{aligned}
(v \circ u)(x) &= v(u(x)) \\
&= v((g \circ f)(x)) \\
&= v(g(f(x))) \\
&= (f^{-1} \circ g^{-1})(g(f(x))) \\
&= f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) \\
&= f^{-1}(f(x)) \quad \text{car, pour tout } y \in F,\ g^{-1}(g(y)) = y \\
&= x.
\end{aligned}$$

Ainsi, $v \circ u = \mathrm{id}_E$.

Soit $x \in G$. Alors,

$$\begin{aligned}
(u \circ v)(x) &= u(v(x)) \\
&= u((f^{-1} \circ g^{-1})(x)) \\
&= u(f^{-1}(g^{-1}(x))) \\
&= (g \circ f)(f^{-1}(g^{-1}(x))) \\
&= g(f(f^{-1}(g^{-1}(x)))) \\
&= g(g^{-1}(x)) \quad \text{car, pour tout } y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y \\
&= x.
\end{aligned}$$

Ainsi, $u \circ v = \mathrm{id}_G$.

Dès lors, d'après le théorème 60, u est une bijection de E dans G et $u^{-1} = v$ i.e. $g \circ f$ est une bijection de E dans G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □