⧫ Chapitre 4. Ensembles et applications

I. — Ensembles

1) Vocabulaire

La notion d'ensemble est une notion intuitive qui a longtemps été utilisée sans être formalisée. Entre la fin du XIXe siècle et le début du XXe siècle, différents mathématiciens (Cantor, Russel, Frege) ont tenté de donner un fondement théorique à cette notion. Ils se sont confrontés à différents problèmes dont certains profonds.

On se contentera ici d'une approche intuitive.

Définition 1

Un **ensemble** E est une collection d'objets. Ces objets sont appelés les **éléments** de E. Si x est un élément de E, on dit que x **appartient** à E et on note $x \in E$. Inversement, si x n'est pas un élément de E, on dit que x **n'appartient pas** à E et on note $x \notin E$.

Exemple 2. On a vu dans le chapitre 1 les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et, dans le chapitre 3, les intervalles qui sont des cas particuliers d'ensembles.

Notation 3. Il y a essentiellement deux façons de noter un ensemble E.

- La notation **en extension** (ou par énumération) : dans ce cas, on énumère les éléments de E entre deux accolades en les séparant par des virgules ou des points-virgules.
- La notation **en compréhension** : dans ce cas, on utilise une propriété P ou une expression qui caractérise les éléments de E (parfois parmi les éléments d'un autre ensemble F).

Exemple 4. L'ensemble E des carrés d'entiers compris entre 1 et 20 s'écrit :

- en extension : $E = \{1\,;4\,;9\,;16\}$;
- en compréhension (avec une propriété) : $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant n \leqslant 20 \text{ et } (\exists k \in \mathbb{N},\ n = k^2)\}$;
- en compréhension (avec un expression) : $E = \{k^2 \mid k \in \{1, 2, 3, 4\}\}$.

Remarque 5.

1. Dans l'exemple précédent, l'écriture en compréhension n'est pas très pertinente car il est beaucoup plus simple d'énumérer les éléments de E. Cependant, une telle énumération n'est pas toujours possible, en particulier, lorsque l'ensemble considéré est infini. Par exemple, si on souhaite écrire l'ensemble des carrés d'entiers, on ne pourra pas utiliser l'écriture en extension et il faudra utiliser une écriture en compréhension, par exemple $\{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$.
2. Un ensemble n'est pas ordonné et ne contient chaque élément qu'une seule fois. Ainsi, $\{2, 3, 4\} = \{4, 3, 2\} = \{2, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 3, 2, 4, 4, 2\}$.

Exemple 6.

1. Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$ alors $[\![a, b]\!]$ est l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre a et b : $[\![a, b]\!] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;
2. L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est défini par $\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^n} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$.
3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est défini par $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*\}$.

4. Si a et b sont deux réels tels que $a \leqslant b$ alors les différentes types d'intervalles sont définis par $[a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, $[a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$, $]a\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, $]a\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, $[a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$, $]a\,;+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, $]-\infty\,;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$ et $]-\infty\,;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$.

Exemple 7. Écrire les ensembles suivants en compréhension et, lorsque cela est possible, en extension.

1. E est l'ensemble des nombres réels supérieurs ou égaux à leurs carrés ;
2. F est l'ensemble des multiples entiers de 3 ;
3. G est l'ensemble des puissances de 3 comprises entre 1 et 100 ;
4. D est l'ensemble des rationnels dont le dénominateur dans l'écriture sous forme irréductible est une puissance de 2. L'ensemble D s'appelle l'ensemble des nombres dyadiques.

Définition 8

Soit E un ensemble. Une **partie** de E (ou un sous-ensemble de E) est un ensemble F tel que tout élément de F est aussi un élément de E. On note alors $F \subset E$.
L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 9. Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alors $\{1, 3, 5\}$ est une partie de E. Ainsi, $\{1, 3, 5\} \subset E$ et $\{1, 3, 5\} \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple 10. Montrer que $\mathbb{Z} \subset D \subset \mathbb{D}$ où D est l'ensemble des nombres dyadiques défini dans l'exemple 7.

Propriété 11. — Principe de double-inclusion

Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Exemple 12. Démontrer l'égalité des deux ensembles E et F suivants :

$$E = \{6k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{et} \qquad F = \{6m + 5 \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

Propriété 13

Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément : il s'agit de l'**ensemble vide**. On le note $\varnothing$.

Remarque 14. L'ensemble vide est une partie de n'importe quel ensemble E.

Exemple 15. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ lorsque $E = \{a, b, c\}$.

Définition 16

1. Un ensemble ne contenant qu'un seul élément est appelé un **singleton**.
2. Un ensemble contenant exactement deux éléments est appelé une **paire**.

Exemple 17. L'ensemble $\{3\}$ est un singleton ne contenant que le nombre 3. L'ensemble $\{3\,;\pi\}$ est une paire.

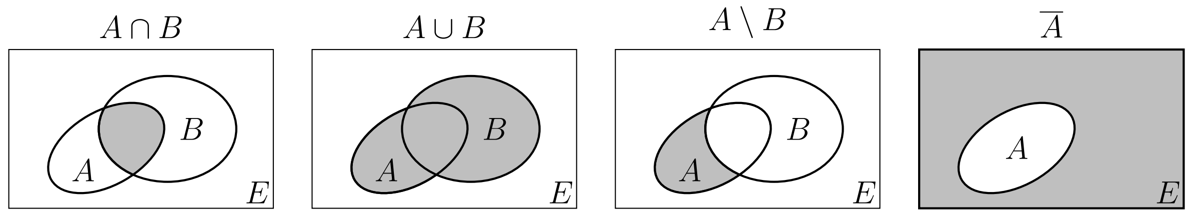
Exemple 18. Soit x et y des éléments d'un ensemble E. À quelle condition nécessaire et suffisante l'ensemble $\{x, y\}$ est-il une paire ?

2) Opérations ensemblistes

Définition 19

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On définit :

1. l'**intersection** de A et B par $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$;
2. l'**union** de A et B par $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$;
3. la **différence ensembliste** de A et B par $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$;
4. le **complémentaire** de A, noté $\overline{A}$ ou A^c, comme la différence de E et A. Ainsi, $\overline{A} = A^c = E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$.



Remarque 20. $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ est l'ensemble des réels non nuls donc $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$. De manière générale, si A est un ensemble de nombres alors A^* désigne $A \setminus \{0\}$.

Exemple 21.

1. Si $E = \{v, w, x, y, z\}$, $A = \{v, w, x\}$ et $B = \{x, y\}$, déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
2. Soit A et B des parties d'un ensemble E. Montrer que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Propriété 22. — commutativité et associativité

Soit A et B des parties d'un ensemble E.

1. $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$ ($\cap$ et $\cup$ sont commutatifs).
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ($\cap$ et $\cup$ sont associatifs).

Propriété 23. — distributivité

Soit A, B et C des parties d'un ensemble E.

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (distributivité de $\cap$ sur $\cup$).
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (distributivité de $\cup$ sur $\cap$).

Propriété 24. — Lois de De Morgan

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Remarque 25. Les définitions et propriétés précédentes peuvent s'étendre à n parties A_1, A_2, ..., A_n d'un ensemble E. Ainsi, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \in E \mid \exists i \in [\![1, n]\!],\ x \in A_i\}$ et $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ x \in A_i\}$.

On retiendra qu'une union correspond à une quantification existentielle et une intersection à une quantification universelle.

Définition 26

Soit E et F deux ensembles. On définit le **produit cartésien** de E et F, noté $E \times F$ (ce qui se lit « E croix F »), par

$$E \times F = \{(x\,;y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Remarque 27. Si $E = F$, on notera E^2 au lieu de $E \times E$.

Exemple 28.

1. Si $E = \{0\,;1\,;2\}$ et $F = \{a\,;b\}$ alors $E \times F = \{(0\,;a)\ ;(1\,;a)\ ;(2\,;a)\ ;(0\,;b)\ ;(1\,;b)\ ;(2\,;b)\}$.
2. $\mathbb{Z}^2$ désigne l'ensemble des couples d'entiers $(a\,;b)$. Ainsi, $(2\,;-6) \in \mathbb{Z}^2$ car $2 \in \mathbb{Z}$ et $-6 \in \mathbb{Z}$ mais $\left(2\,;\frac{7}{3}\right) \notin \mathbb{Z}^2$ car $\frac{7}{3} \notin \mathbb{Z}$.
3. $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ de réels. Par le choix d'un repère, cet ensemble peut s'interpréter graphiquement comme l'ensemble des coordonnées des points du plan.

Remarque 29. De manière plus générale, si n est un entier au moins égal à 2, on peut définir le produit cartésien de n ensembles E_1, E_2, ..., E_n par

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(a_1\,;a_2\,;\ldots\,;a_n) \mid \forall i \in [\![1,n]\!], a_i \in E_i\}.$$

Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, on note E^n le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$.

Par exemple, $\mathbb{R}^3 = \{(x\,;y\,;z) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}\}$.

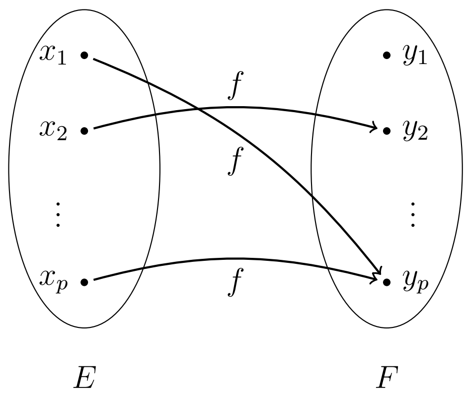
Un élément de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ s'appelle un $n-$uplet. Pour $n = 2$, on parle de couple, pour $n = 3$, on parle de triplet et, pour $n = 4$, on parle de quadruplet.

II. — Applications

1) Définitions et notations

Définition 30

Étant donné deux ensembles E et F, une **application** ou une **fonction** f de E dans F peut se définir comme la donnée d'un procédé qui permet, à tout élément $x \in E$ d'associer un et un seul élément $y \in F$.
L'élément y est alors appelé l'**image** de x par f et on le note $f(x)$.
Si $y \in F$, tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est appelé un **antécédent** de y par f.
Si f est une application de E dans F, on dit que E est l'**ensemble de départ** ou l'**ensemble de définition** de f et que F est l'**ensemble d'arrivée** de f.



Ici,
$f(x_1) = y_p$
$f(x_2) = y_2$
$f(x_p) = y_p$

Exemple 31. Si on considère l'application f de $[\![0, 99]\!]$ dans $[\![0, 9]\!]$ qui à un entier compris entre 0 et 99 associe son chiffre le plus à gauche dans l'écriture décimale alors $f(53) = 5$, $f(98) = 9$, $f(31) = 3$ et $f(0) = 0$. Les antécédents de 1 par f sont les nombres 1, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 et 19. En revanche, l'unique antécédent de 0 par f est 0.

Notation 32. Si f est une application de E dans F, on note $f : E \longrightarrow F$. Si on dispose d'une expression explicite de $f(x)$ pour tout $x \in E$, on notera

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Remarque 33. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Un même élément x ne peut pas avoir plusieurs images par f mais un élément y de F peut avoir plusieurs antécédents différents par f.
2. Il ne faut pas confondre f et $f(x)$: f est une fonction, c'est-à-dire une procédé d'association des éléments E et F alors que $f(x)$ est un élément de F.
3. Il existe plusieurs façons de définir une fonction : à l'aide d'une formule, d'un tableau, d'une courbe, d'une situation concrète,...

Exemple 34.

1. On considère la fonction
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
   - **a.** Déterminer l'image de 10 par f.
   - **b.** Déterminer le(s) antécédent(s) de 9 par f.
   - **c.** Donner un élément de $\mathbb{R}$ qui n'admet aucun antécédent par f. Même question avec un unique antécédent.
2. On considère la fonction $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui, à tout entier naturel n, associe la somme des chiffres de n dans son écriture décimale.
   - **a.** Déterminer $g(1427)$.
   - **b.** Déterminer le(s) antécédent(s) de 0 et de 1 par g.
   - **c.** Caractériser l'ensemble des entiers naturels n tels que $g(n)$ soit un multiple de 3.

Définition 35

Deux applications f et g sont **égales** si elles ont le même ensemble de départ E, le même ensemble d'arrivée F et si, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

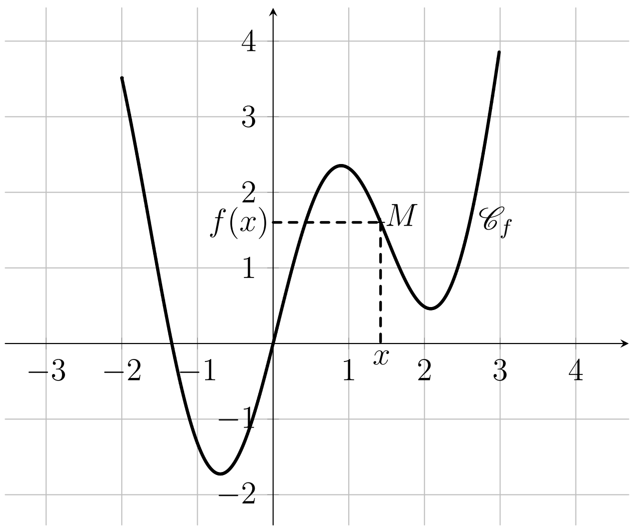
Notation 36. Soit E et F deux ensembles. L'ensemble des applications de E dans F se note F^E ou $\mathscr{F}(E, F)$.

Exemple 37.

1. $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
2. $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 38

Si E et F sont des parties de $\mathbb{R}$, la **courbe représentative** d'une fonction $f : E \longrightarrow F$ dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ du plan est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;f(x))$ lorsque x parcourt E. On note cette courbe $\mathscr{C}_f$.



Exemple 39. Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$$

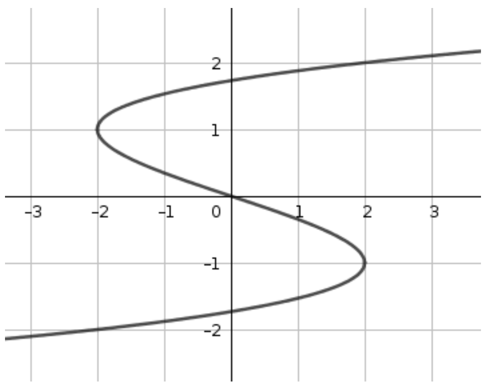
1. Le point A de coordonnées $(1\,;0{,}5)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$?

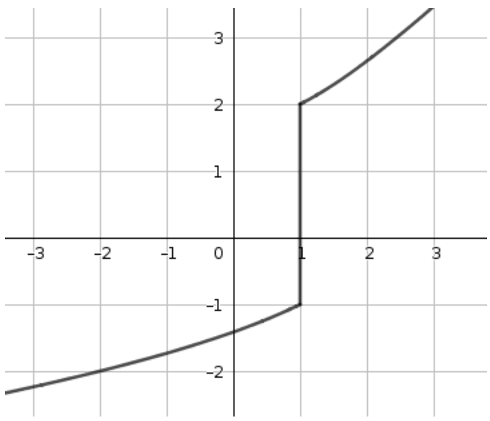
2. Le point B de coordonnées $(2\,;0{,}4)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$?

3. Le point C de coordonnées $(-1\,;a)$ appartient à $\mathscr{C}_f$. Quelle est la valeur de a ?

4. Quelles sont les valeurs du réel b pour lesquelles le point de coordonnées $(b\,;1)$ appartient à $\mathscr{C}_f$?

Remarque 40. Toute fonction peut être représentée par une courbe mais toute courbe n'est pas la représentation graphique d'une fonction. En effet, par définition, tout réel x de l'ensemble de départ doit avoir une image et une seule donc deux points différents ne peuvent pas avoir la même abscisse.





Les courbes ci-dessus ne représentent pas des fonctions. Pour celle de gauche, il y a 3 points de la courbe ayant la même abscisse -1 et pour celle de droite, il y a une infinité de points ayant une abscisse égale à 1.

2) Exemples à connaître

• Soit E un ensemble. La **fonction identité** de E, notée id_E, est l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

• Les **fonctions affines** sont les fonctions de la forme

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax+b \end{array}$$

où a et b sont des réels. La courbe représentative d'une fonction affine est une droite $\mathcal{D}$. Le nombre a s'appelle le **coefficient directeur** (ou la pente) de $\mathcal{D}$ et le nombre b s'appelle l'**ordonnée à l'origine** de $\mathcal{D}$.

Si $a = 0$, on dit que f est **constante** et si $b = 0$ on dit que f est **linéaire**.

• La **fonction carré** f est l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Exemple 41. Représenter graphiquement la fonction $\mathrm{id}_{[1;3[}$, la fonction $f : x \longmapsto 3x-2$ et la fonction carré.

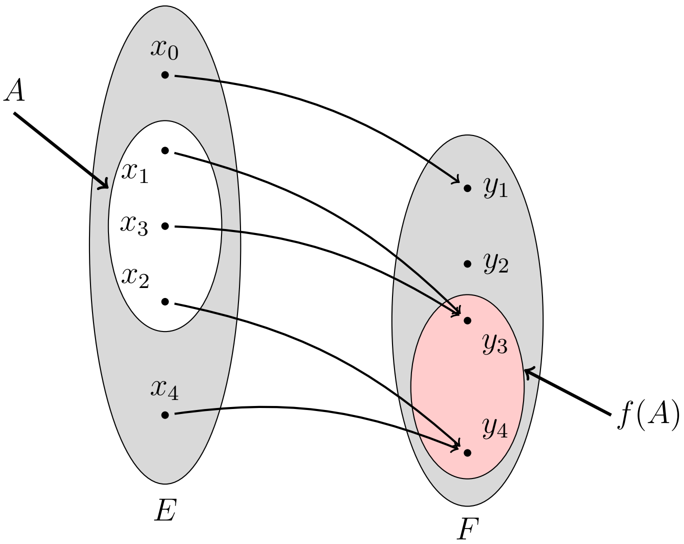
3) Image directe d'un ensemble par une application

Définition 42

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Si A est une partie de E, on appelle **image directe** de A par f, notée $f(A)$, l'ensemble

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) \mid x \in A\} \\ &= \{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\} \end{aligned}$$

c'est-à-dire l'ensemble des images des éléments de A par f.
L'image directe de E est appelée l'image de f et on la note $f(E)$ ou $\mathrm{Im}\, f$.



Remarque 43. Par définition, $f(A)$ est une partie de F donc $f(A) \subset F$. On prendra garde au fait de ne pas confondre $f(x)$ pour $x \in E$ qui est un élément de F et $f(A)$ pour $A \subset E$ qui est une partie de F.

Exemple 44. Soit f la fonction carré définie précédemment. Déterminer $f(A)$ dans chacun des cas suivants. (On pourra s'aider de la courbe représentative de f).

1. $A = \{-3, -2, 0, 1, 3, 4\}$

2. $A = [1\,;5]$

3. $A =]-2\,;3]$.

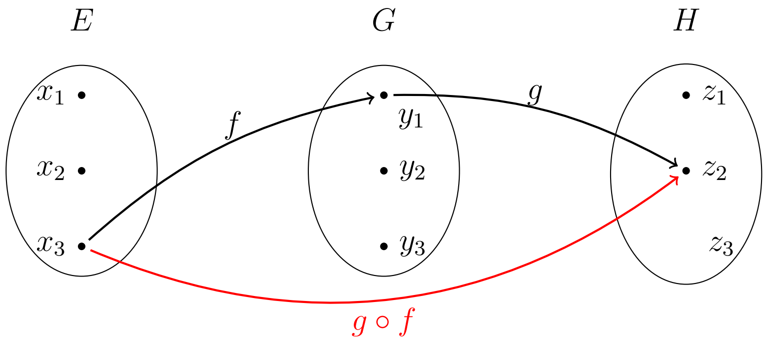
4. $A = \mathbb{R}$.

4) Composition

Définition 45

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : G \longrightarrow H$ deux applications telles que $f(E) \subset G$. On définit l'**application composée** de f suivie de g, notée $g \circ f$ (ce qui se lit « g rond f ») par :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$



Ici,
$f(x_3) = y_1$
$g(y_1) = z_2$
$(g \circ f)(x_3) = z_2$

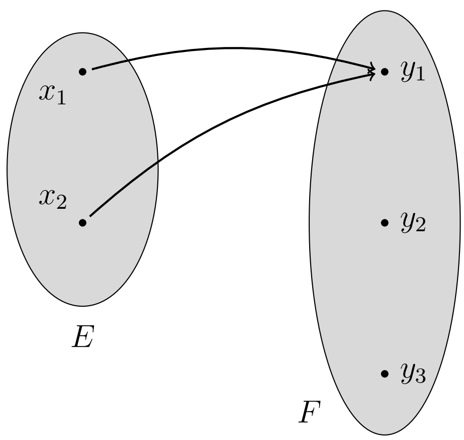
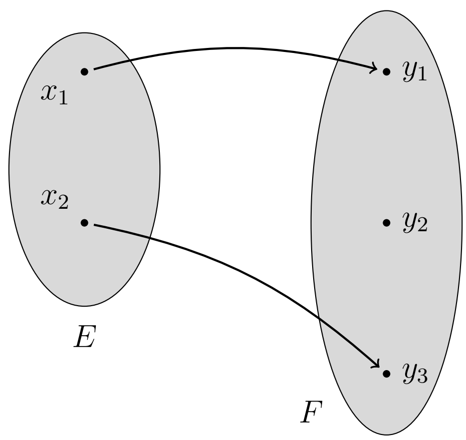
Exemple 46. On suppose que f est la fonction carré. Dans chacun des cas suivants, déterminer si on peut définir $f \circ g$ et $g \circ f$ et, si c'est le cas, déterminer une expression de ces fonctions.

1. g est la fonction affine $x \longmapsto x + 1$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. g est la fonction racine carrée définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$
3. g est la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.

5) Injection, surjection, bijection

Définition 47

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est **injective** (ou que f est une **injection**) si, pour tout $y \in F$, y possède au plus un antécédent par f.
Autrement dit, la fonction f est injective si, pour tout $(x\,;x') \in E^2$, $f(x) = f(x')$ si et seulement si $x = x'$.

	
Cette application n'est pas injective. En effet, $f(x_1) = f(x_2) = y_1$ alors que $x_1 \neq x_2$	Cette application est injective.

Exemple 48.

1. Si E est un ensemble, la fonction identité id_E est une injection.
2. La fonction carré f définie précédemment n'est pas injective car 4 possède deux antécédents : 2 et -2.
3. La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est injective : si $y \leqslant 0$ alors y n'a pas d'antécédent par exp et si $y > 0$ alors l'unique antécédent de y par exp est $x = \ln(y)$.

Méthode 49

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

• Pour démontrer que f est injective, on considère deux éléments x et x' de E tels que $f(x) = f(x')$ et on montre que $x = x'$.

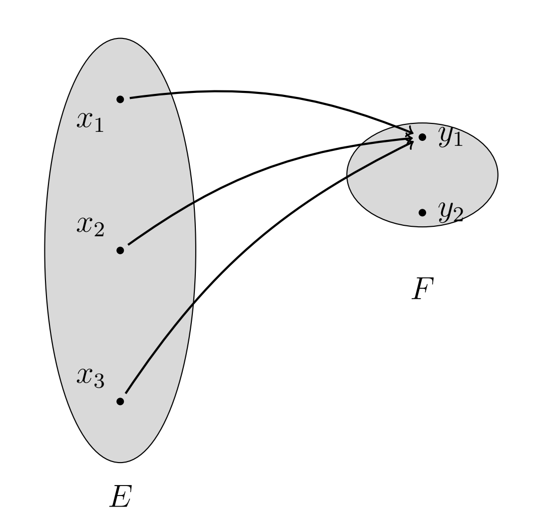
• Pour montrer que f n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments différents x et x' de E tels que $f(x) = f(x')$.

Exemple 50. Étudier l'injectivité des applications suivantes.

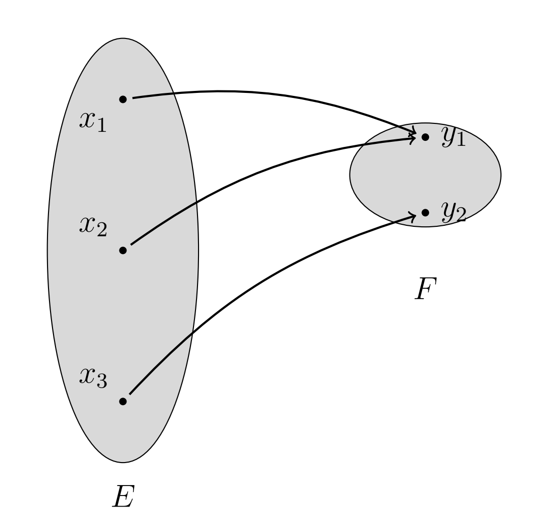
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5-3x \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5-3x^2 \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n^2 \end{array}$$

Définition 51

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est **surjective** (ou que f est une **surjection**) si, pour tout $y \in F$, y possède au moins un antécédent par f.
Autrement dit, f est surjective si, pour tout $y \in F$, il existe (au moins) un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Ceci est encore équivalent à dire que $f(E) = F$.



Cette application n'est pas surjective.
En effet, y_2 n'a pas d'antécédent



Cette application est surjective.
y_1 et y_2 ont (au moins) un antécédent

Exemple 52.

1. Si E est un ensemble, la fonction identité id_E est surjective.
2. La fonction carré $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie précédemment n'est pas surjective car -3 n'a pas d'antécédent par f. Cependant, si on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, alors elle est surjective.
3. Il en est de même de la fonction exp qui n'est pas surjective si on la voit comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais qui le devient si on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 53

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

• Pour montrer que f est surjective, on considère un élément $y \in F$ et on montre qu'il admet au moins un antécédent par f, ce qui revient à montrer que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x possède au moins une solution dans E.

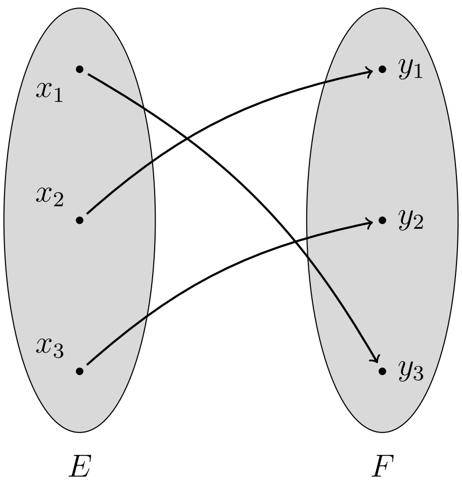
• Pour montrer que f n'est pas surjective, il faut trouver un élément $y \in F$ qui n'admet pas d'antécédent par f, ce qui revient à montrer que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x ne possède pas de solution dans E.

Exemple 54. Étudier la surjectivité des applications de l'exemple 50

Remarque 55. Par définition, une application $f : E \longrightarrow f(E)$ est toujours surjective. Autrement dit, si une application n'est pas surjective, on peut toujours réduire son ensemble d'arrivée pour qu'elle le devienne. Ainsi, l'application carré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas surjective mais elle le devient si on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.

Définition 56

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est **bijective** (ou que f est une **bijection**) si elle est à la fois injective et surjective.
Autrement dit, f est bijective si, pour tout $y \in F$, y possède exactement un antécédent par f.



Exemple 57.

1. Si E est un ensemble, la fonction identité id_E est une bijection.
2. La fonction racine carrée définie de $[0\,;+\infty[$ dans $[0\,;+\infty[$ est bijective.
3. La fonction carré n'est pas bijective si on la voit comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle le devient si on la voit comme une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Exemple 58. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\}$ définie par $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ est bijective.

Remarque 59. Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Alors,

- f est injective si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x possède au plus une solution dans E ;
- f est surjective si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x possède au moins une solution dans E ;
- f est bijective si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x possède exactement une solution dans E ;

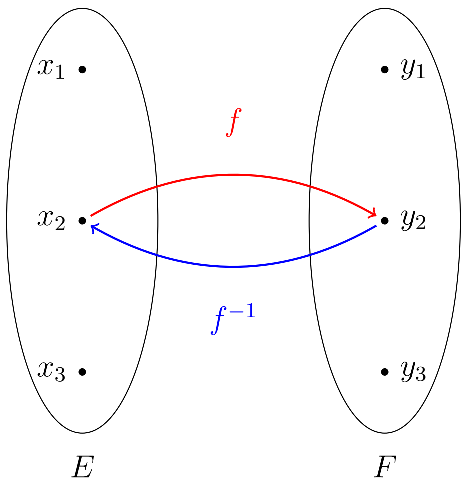
Théorème 60

Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Alors, f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
De plus, dans ce cas, g est unique et bijective.

Remarque 61. Une seule des deux égalités $g \circ f = \mathrm{id}_E$ ou $f \circ g = \mathrm{id}_F$ ne suffit pas comme on l'a vu dans les exemples 46, 48 et 52 : si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction carré et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction racine carrée alors $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$ mais f n'est pas injective.

Définition 62

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. L'unique application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$ est appelée la **bijection réciproque** (ou simplement l'**application réciproque**) de f. On la note f^{-1}.



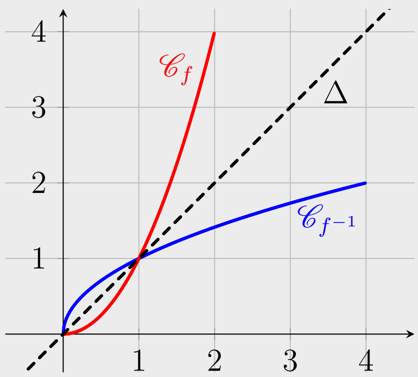
Exemple 63.

1. Si E est un ensemble, la bijection réciproque de id_E est elle-même : $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$.
2. Si a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$ alors $f : x \longmapsto ax + b$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est $f^{-1} : x \longmapsto \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.
3. La fonction
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
est une bijection et sa bijection réciproque est
$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$
4. La fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une bijection et sa bijection réciproque est la fonction $\exp^{-1} = \ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 64. On reprend la fonction f de l'exercice 58. Calculer, pour tout réel $x \neq 1$, $f(f(x))$ et retrouver ainsi le résultat de l'exercice 58.

Propriété 65

Si E et F sont deux parties de $\mathbb{R}$ et si $f : E \longrightarrow F$ est une application bijective alors les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.



Propriété 66

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections. Alors, $g \circ f$ est une bijection de E dans G et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

III. — Exercices

Exercice 1. Écrire les ensembles suivants en compréhension.

1. L'ensemble des entiers naturels qui sont pairs.
2. L'ensemble des inverses des entiers naturels non nuls.
3. L'ensemble des entiers naturels qui sont la somme de deux carrés d'entiers naturels.
4. L'ensemble des fractions d'entiers dont le dénominateur est une puissance de 3.

Exercice 2. On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ et les parties $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{a, c, d, f, g\}$ de E.

Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B}$.

Exercice 3. On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3, 4\}$ et les ensembles $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ et $C = \{a, 3, e, 1\}$.

1. Écrire les ensembles $A \cup B$ et $A \cap B$.

2. Compléter avec le symbole $\in$ ou le symbole $\notin$.

$$a \dots A \cap B \qquad a \dots A \cap C \qquad a \dots B \cup C \qquad 1 \dots A \cup C \qquad 1 \dots A \cap C$$

$$a \dots \overline{A} \qquad a \dots \overline{B} \qquad b \dots B \cap \overline{C} \qquad e \dots \overline{B} \cup \overline{C} \qquad e \dots \overline{B} \cap \overline{C}$$

Exercice 4. On considère deux parties A et B d'un ensemble E. Simplifier les écritures suivantes.

1. $\overline{\overline{A}}$ **2.** $\overline{A \cap \overline{B}}$ 3. $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$.

Exercice 5. Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Est-il vrai ou faux que $A \cap B \subset A \cup B$?

2. Est-il possible que $A \cap B = A \cup B$?

Exercice 6. Soit E un ensemble et A, B et C des parties de E. Montrer que :

1. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

2. $\overline{A \cap B} \setminus C = (\overline{C} \setminus B) \cup (\overline{C} \setminus A)$.

3. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

4. $A \cup B = B \cap C \Longleftrightarrow A \subset B \subset C$.

Exercice 7.

1. Déterminer l'image directe de $[2\,;5]$ par la fonction affine $f : x \longmapsto -2x + 1$.

2. Déterminer l'image directe de $]-3\,;2]$ par la fonction carré $g : x \longmapsto x^2$.

3. Déterminer l'image directe de $]-3\,;2]$ par la fonction cube $h : x \longmapsto x^3$.

4. Déterminer l'image directe de $\mathbb{R}_+^*$ par la fonction exp et par la fonction ln.

Exercice 8 (Croissance de l'image directe)**.** Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Montrer que, pour toutes parties A et A' de E, si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$.

Exercice 9 (Image directe d'union et d'intersection)**.** Soit une application $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que, pour toutes parties A et A' de E, $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

2. Montrer que, pour toutes parties A et A' de E, $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$. Donner un exemple qui montre qu'il n'y a pas toujours égalité.

Exercice 10. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

1. Déterminer les ensembles de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$ et déterminer une expression de ces deux applications.

2. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 11. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

1. Justifier que $f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et calculer, pour tout $x \geqslant 0$, $(f \circ f)(x)$.

2. Même question avec $f \circ f \circ f$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $f^{\circ n}$ puis démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 12. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité des applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;x-y) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \longmapsto & (x+y\,;xy) \end{array}$$

Exercice 13. On considère les fonctions f et g suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } n=0 \\ n-1 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

2. Les fonctions f et g sont-elles bijectives ?

Exercice 14. On considère les fonctions f et g suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array}$$

1. Calculer, pour tout réel $x \neq 2$, $(g \circ f)(x)$ et, pour tout réel $x \neq 1$, $(f \circ g)(x)$.

2. Que peut-on déduire de la question précédente ?

Exercice 15.

1. Montrer que l'application $f : x \longmapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer f^{-1}.

2. Même question avec $g : x \longmapsto x^2 + x$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

3. Même question avec $h : x \longmapsto \frac{x}{x^2+1}$ de $[-1\,;1]$ dans $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$.

Exercice 16. Montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si, pour toutes parties A et A' de E, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

Exercice 17. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f aussi et donner un exemple qui montre que g ne l'est pas forcément.

2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g aussi et donner un exemple qui montre que f ne l'est pas forcément.

3. Que peut-on dire de f et g si $g \circ f$ est bijective ?

Exercice 18. Soit une application $f : E \longrightarrow E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 19. Soit une application $f : E \longrightarrow F$. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.