♦ Chapitre 3. Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

I. — Ordre dans $\mathbb{R}$

1) Définition

On a défini l'ensemble des réels comme l'ensemble des abscisses des points d'un axe gradué (OI). Les abscisses des points de la demi-droite [OI) sont appelés les nombres réels positifs et on note leur ensemble $\mathbb{R}_+$. Les abscisses des points de l'autre demi-droite d'origine O sont appelés les nombres réels négatifs et on note leur ensemble $\mathbb{R}_-$. On remarquera que 0 appartient à la fois à $\mathbb{R}_+$ et à $\mathbb{R}_-$. Les éléments non nuls de $\mathbb{R}_+$ sont appelés les réels strictement positifs et on note leur ensemble $\mathbb{R}_+^*$. Les éléments non nuls de $\mathbb{R}_-$ sont appelés les réels strictement négatifs et on note leur ensemble $\mathbb{R}_-^*$.

Définition 1

Soit a et b deux réels. On dit que :

- a est **inférieur ou égal** à b si $a - b \in \mathbb{R}_-$. On note alors $a \leqslant b$.
- a est **supérieur ou égal** à b si $a - b \in \mathbb{R}_+$. On note alors $a \geqslant b$.
- a est **strictement inférieur** à b si $a - b \in \mathbb{R}_-^*$. On note alors $a < b$.
- a est **strictement supérieur** à b si $a - b \in \mathbb{R}_+^*$. On note alors $a > b$.

Remarque 2.

1. Soit x un réel. En particulier, $x \in \mathbb{R}_+$ si $x \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}_-$ si $x \leqslant 0$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ si $x > 0$ et $x \in \mathbb{R}_-^*$ si $x < 0$.
2. Lorsqu'on dit « a est inférieur à b » cela signifie par défaut que a est inférieur ou égal à b.
3. Si x est un réel alors, par définition, $x \leqslant x$ puisque $x - x = 0 \in \mathbb{R}_+$.

Méthode 3 : Comment comparer deux réels

Pour comparer deux réels a et b, on calcule la différence $a - b$ et on cherche à déterminer son signe.

Exemple 4. Soit x et y deux réels. Comparer $a = (x + y)^2$ et $b = 4xy$.

Solution. Comme

$$a - b = (x + y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geqslant 0,$$

on peut affirmer que $a \geqslant b$ c'est-à-dire $\boxed{(x + y)^2 \geqslant 4xy}$.

2) Ordre et opérations

Propriété 5

Pour tous réels a, b, c et d,

1. si $a \leqslant b$ alors $a + c \leqslant b + c$ et $a - c \leqslant b - c$.

2. si $a \leqslant b$ alors $a \times c \leqslant b \times c$ si $c \geqslant 0$ et $a \times c \geqslant b \times c$ si $c \leqslant 0$.

3. si $a \leqslant b$ alors $\frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{c}$ si $c > 0$ et $\frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{c}$ si $c < 0$.

4. si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $0 \leqslant ac \leqslant bd$.

5. si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d$ alors $0 \leqslant \frac{a}{d} \leqslant \frac{b}{c}$.

Démonstration. Soit a, b, c et d des réels.

1. Supposons que $a \leqslant b$. Alors, par définition, $a - b \leqslant 0$. Or,

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b \leqslant 0$$

donc $a + c \leqslant b + c$. De même,

$$(a - c) - (b - c) = a - c - b + c = a - b \leqslant 0$$

donc $a - c \leqslant b - c$.

2. Comme $a \times c - b \times c = (a - b) \times c$, par la règle des signes, $a \times c - b \times c \leqslant 0$ si $c \geqslant 0$ et $a \times c - b \times c \geqslant 0$ si $c \leqslant 0$. Ainsi, $a \times c \leqslant b \times c$ si $c \geqslant 0$ et $a \times c \geqslant b \times c$ si $c \leqslant 0$.

3. Diviser par c revient à multiplier par $\frac{1}{c}$ donc il suffit d'appliquer le point précédent en remplaçant c par $\frac{1}{c}$ (et en remarquant que c et $\frac{1}{c}$ ont le même signe).

4. Supposons que $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$. D'après **2.**, en multipliant la première inégalité par $c \geqslant$, on obtient $ac \leqslant bc$ et, en multipliant la second inégalité par $b \geqslant 0$, on obtient $bc \leqslant bd$. Ainsi, $ac \leqslant bc \leqslant bd$ donc $ac \leqslant bd$.

5. Supposons que $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d$. Alors, d'après **4.**, $ac \leqslant bd$ donc, en divisant par $cd > 0$, on déduit de **3.** que $\dfrac{ac}{cd} \leqslant \dfrac{bd}{cd}$ c'est-à-dire $\dfrac{a}{d} \leqslant \dfrac{b}{c}$.

□

Dès qu'une multiplication ou une division s'opère sur des inégalités, il y a des questions de signes à prendre en compte.

Remarque 6.

1. On a les implications analogues avec des inégalités strictes (en supposant toutefois $c \neq 0$ dans le point **2.**).

2. Le fait que les mêmes règles soient valables pour une opération et son opération contraire (addition/soustraction d'une part et multiplication/division d'autre part) permettront d'écrire des équivalences dans la résolution d'inéquation.

Exemple 7. Soit x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y < \frac{4}{5}$. Comparer $\frac{2+3x}{4-5x}$ et $\frac{2+3y}{4-5y}$.

Solution. Comme $0 < x \leqslant y$ et $3 \geqslant 0$, $0 \leqslant 3x \leqslant 3y$ donc $2 \leqslant 2 + 3x \leqslant 2 + 3y$.
De même, comme $x \leqslant y < \frac{4}{5}$ et $-5 < 0$, $-5x \geqslant -5y > -4$ donc $4 - 5x \geqslant 4 - 5y > 0$.
Ainsi, $2 \leqslant 2 + 3x \leqslant 2 + 3y$ et $0 < 4 - 5y \leqslant 4 - 5x$ donc, par propriété, $\dfrac{2 + 3x}{4 - 5x} \leqslant \dfrac{2 + 3y}{4 - 5y}$.

II. — Intervalles réels

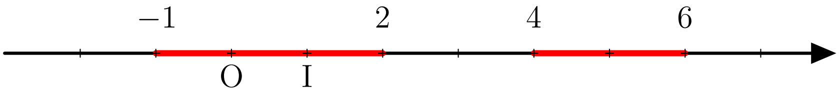
1) Définition

Définition 8

Un **intervalle** réel est une partie I de $\mathbb{R}$ possédant la propriété suivante : pour tous réels x et y, si x et y appartiennent à I alors tout réel z compris entre x et y appartient aussi à I.

De façon imagée, un intervalle réel est une partie de $\mathbb{R}$ « sans trou ». Autrement dit, lorsqu'on représente un intervalle sur l'axe réel, on peut le faire sans lever le stylo.

Ainsi, l'ensemble représenté en rouge ci-dessous n'est pas un intervalle :



En effet, 1 et 5 appartiennent à cet ensemble mais pas 3 qui est pourtant compris entre les 2.

On distingue 9 types différents d'intervalles réels. Dans ce qui suit, a et b désignent des réels.

L'intervalle noté :	est l'ensemble des réels x tels que :	et on peut le représenter sur la droite réelle par :
$[a, b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]a, b[$	$a < x < b$	
$[a, b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a, b]$	$a < x \leqslant b$	
$[a\,;+\infty[$	$x \geqslant a$	
$]a\,;+\infty[$	$x > a$	
$]-\infty\,; b]$	$x \leqslant b$	
$]-\infty\,; b[$	$x < b$	
$]-\infty\,;+\infty[= \mathbb{R}$	pas de condition	

Les nombres a et b sont appelés les **bornes** de l'intervalle.

$[a\,; b]$ est un intervalle **fermé** ; les crochets sont fermés c'est-à-dire qu'ils sont tournés vers l'intérieur de l'intervalle. Dans ce cas, les bornes appartiennent à l'intervalle.

$]a\,; b[$ est un intervalle **ouvert** ; les crochets sont ouverts c'est-à-dire qu'ils sont tournés vers l'extérieur de l'intervalle. Dans ce cas, les bornes n'appartiennent pas à l'intervalle.

Les intervalles $]-\infty\,; b]$ et $[a\,;+\infty[$ sont également appelés intervalles fermés et les intervalles $]-\infty\,; b[$ et $]a\,;+\infty[$ sont également appelés intervalles ouverts. Les autres intervalles ne sont ni ouverts ni fermés (sauf $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$ qui est à la fois ouvert et fermé).

Le symbole $+\infty$ se lit « plus l'infini » et le symbole $-\infty$ se lit « moins l'infini ». Ce ne sont pas des réels et les crochets sont toujours ouverts en $+\infty$ et $-\infty$.

On peut remarquer que $\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$, $\mathbb{R}_- =]-\infty\,; 0]$, $\mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[$ et $\mathbb{R}_-^* =]-\infty\,; 0[$ sont des intervalles.

Exemple 9.

1. L'ensemble des réels x tels que $-1 \leqslant x < 2$ est $[-1\,;2[$.
2. $[2\,;5]$ désigne l'ensemble des réels x tels que $2 \leqslant x \leqslant 5$.
3. L'ensemble des réels x tels que $x > -5$ est $]-5\,;+\infty[$.
4. $]-\infty\,;4]$ est l'ensemble des réels x tels que $x \leqslant 4$.
5. L'ensemble des réels x tels que $1 \geqslant x > -4$ est $]-4\,;1]$.
6. L'ensemble des réels x tels que $10 > x$ est $]-\infty\,;10[$.

2) Union et intersection d'intervalles

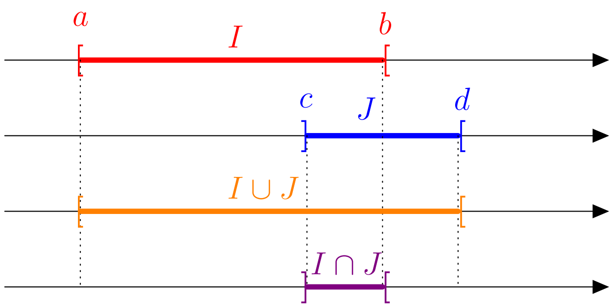
Dans tout ce paragraphe, I et J désignent des intervalles réels.

Définition 10

1. On appelle **union** (ou **réunion**) de I et J l'ensemble des réels x qui appartiennent à au moins un des deux intervalles I ou J. Cet ensemble se note $I \cup J$, ce qui se lit « I union J ».
   Ainsi, $x \in I \cup J$ si et seulement si $x \in I$ OU $x \in J$.
2. On appelle **intersection** de I et J l'ensemble des réels x qui appartiennent à la fois aux deux intervalles I et J. Cet ensemble se note $I \cap J$, ce qui se lit « I inter J ».
   Ainsi, $x \in I \cap J$ si et seulement si $x \in I$ ET $x \in J$.

Remarque 11. Dans la définition de l'union, le « OU » n'est pas exclusif c'est-à-dire que lorsqu'on dit $x \in I$ OU $x \in J$, x peut très bien appartenir à la fois à I et à J.

Interprétation graphique



Dans cet exemple, $I = [a\,;b[$, $J =]c\,;d[$, $I \cup J = [a\,;d[$ et $I \cap J =]c\,;b[$.

Exemple 12.

1. Considérons $E = [-1\,;2] \cup [3\,;7[$. Alors, $10 \notin E$, $0 \in E$, $2 \in E$, $7 \notin E$, $5 \in E$ et $-5 \notin E$.
2. Considérons $F = [-2\,;5] \cap]0\,;7[$. Alors, $3 \in F$, $-2 \notin F$, $2 \in F$, $7 \notin F$, et $0 \notin F$.
   On peut remarquer que $F =]0\,;5]$.

Remarque 13.

1. Il se peut que $I \cap J$ soit vide. Dans ce cas, on dit que I et J sont **disjoints**.
2. Si $I \cap J$ n'est pas vide alors $I \cap J$ et $I \cup J$ sont des intervalles. En revanche, si $I \cap J$ est vide alors $I \cup J$ n'est pas un intervalle.

III. — Valeur absolue d'un nombre réel

1) Définition et propriétés

Définition 14

Pour tout réel x, on définit la **valeur absolue** de x, notée $|x|$, par :
- $|x| = x$ si $x \geqslant 0$;
- $|x| = -x$ si $x < 0$.

Exemple 15. Calculer $|3|$, $|-2|$, $|0|$, $|10^{-2}|$ et $\left|\sqrt{2}-2\right|$.

Solution. Comme $3 \geqslant 0$, $|3| = 3$. Comme $-2 < 0$, $|2| = -(-2) = 2$. Comme $0 \geqslant 0$, $|0| = 0$. Comme $10^{-2} \geqslant 0$, $|10^{-2}| = 10^{-2}$. Comme $\sqrt{2}-2 < 0$, $\left|\sqrt{2}-2\right| = -(\sqrt{2}-2) = 2-\sqrt{2}$.

Interprétation graphique. Soit x un réel et M le point de la droite réelle d'abscisse x. Alors, $|x| = \mathrm{O}M$ car $\mathrm{O}M = x$ si $x \geqslant 0$ et $\mathrm{O}M = -x$ si $x < 0$.

Propriété 16

Pour tout réel x, $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On raisonne par disjonction de cas.

1er cas. Supposons que $x \geqslant 0$. Alors, $|x| = x$. Or, comme $x \geqslant 0$, $-x \leqslant 0$ donc $-x \leqslant x$ et donc $-|x| \leqslant x = |x|$. Ainsi, la proposition est vraie dans ce cas.

2d cas. Supposons que $x < 0$. Alors, $|x| = -x$. Or, comme $x \leqslant 0$, $-x \geqslant 0$ donc $x \leqslant -x$ et donc $-|x| = x \leqslant |x|$. Ainsi, la proposition est vraie dans ce cas.

On conclut que, dans tous les cas, $-|x| \leqslant x \leqslant x$. □

Propriété 17

Pour tous réels x et y et pour tout entier naturel n,

1. $|xy| = |x|\,|y|$ **2.** $|x^n| = |x|^n$ **3.** si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ **4.** $\sqrt{x^2} = |x|$.

Démonstration.

1. On distingue 4 cas.

1er cas. Supposons que x et y soient positifs. Alors, $|x| = x$ et $|y| = y$. Or, comme x et y sont positifs, xy est positif donc $|xy| = xy = |x|\,|y|$.

2e cas. Supposons que x et y soient strictement négatifs. Alors, $|x| = -x$ et $|y| = -y$. Or, comme x et y sont strictement négatifs, xy est positif donc $|xy| = xy$. De plus, $|x|\,|y| = (-x)(-y) = xy$ donc $|xy| = |x|\,|y|$.

3e cas. Supposons $x \geqslant 0$ et $y < 0$. Alors, $|x| = x$ et $|y| = -y$. Or, comme x et y sont de signes contraires, $xy \leqslant 0$ donc $|xy| = -xy$. De plus, $|x|\,|y| = x(-y) = -xy$ donc $|xy| = |x|\,|y|$.

4e cas. Supposons $x < 0$ et $y \leqslant 0$. Alors, $|x| = -x$ et $|y| = y$. Or, comme x et y sont de signes contraires, $xy \leqslant 0$ donc $|xy| = -xy$. De plus, $|x|\,|y| = (-x)y = -xy$ donc $|xy| = |x|\,|y|$.

Dans tous les cas, $|xy| = |x|\,|y|$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On raisonne par récurrence.
Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $|x^n| = |x|^n$ ».
Initialisation. Par définition, $x^0 = 1$ donc $|x^0| = |1| = 1$ et $|x|^0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie. D'après **1.**, $|x^{n+1}| = |x^n \times x| = |x^n| \times |x|$. Or, comme $P(n)$ est vraie, $|x^n| = |x|^n$ donc $|x^{n+1}| = |x|^n \times |x| = |x|^{n+1}$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout entier naturel n, $|x^n| = |x|^n$.

3. On suppose $y \neq 0$. Alors, d'après **1.**, $|x| = \left|y \times \dfrac{x}{y}\right| = |y| \times \left|\dfrac{x}{y}\right|$ donc, en divisant par $|y| \neq 0$, $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$.

4. Supposons que $x \geqslant 0$. Alors, x est un nombre positif tel que $x^2 = x^2$ donc, par définition, $\sqrt{x^2} = x$.
Supposons que $x < 0$. Alors, $-x$ est un nombre positif tel que $(-x)^2 = x^2$ donc $\sqrt{x^2} = -x$.
Ainsi, $\sqrt{x^2} = x$ si $x \geqslant 0$ et $\sqrt{x^2} = -x$ si $x < 0$ donc, par définition, $\sqrt{x^2} = |x|$.

□

Propriété 18. — Inégalité triangulaire

Pour tous réels x et y,
$$|x+y| \leqslant |x| + |y|\,.$$
De plus, l'inégalité précédente est une égalité si et seulement s'il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que $x = ky$ ou $y = kx$.

Démonstration. Soit x et y deux réels. Alors,
$$|x+y|^2 = \sqrt{(x+y)^2}^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = \sqrt{x^2}^2 + 2xy + \sqrt{y^2}^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2\,.$$
Or, $xy \leqslant |xy| = |x|\,|y|$ donc
$$[*] \quad |x+y|^2 \leqslant |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$
Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit que $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si $[*]$ est une égalité, ce qui est le cas si et seulement si $xy = |xy|$. Or, cette dernière égalité équivaut à dire que x et y sont de même signe c'est-à-dire qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que $x = ky$ ou $y = kx$.

□

⚠ En général, $|x+y| \neq |x| + |y|$

2) Distance entre deux nombres

Propriété 19

Si M et N sont deux points de l'axe réel d'abscisses respectives x_M et x_M alors
$$MN = |x_M - x_N|\,.$$

Remarque 20.

1. Pour tout réel x, $|x| \geqslant 0$ car, si on note M le point d'abscisse x alors $|x| = \mathrm{O}M \geqslant 0$.
2. Si x est un réel alors $|-x| = |x|$. En effet, si on note M le point d'abscisse x alors $|x| = \mathrm{O}M = |0 - x| = |-x|$.

Définition 21

Pour tous réels x et y, le nombre réel positif $|x - y|$ est appelé la distance entre x et y.

Exemple 22. Calculer la distance de $-1{,}6$ à 2 et la distance de 1 à $\sqrt{5}$.

Solution. La distance de $-1{,}6$ à 2 est $|-1{,}6 - 2| = |-3{,}6| = 3{,}6$ et la distance de 1 à $\sqrt{5}$ est $\left|1 - \sqrt{5}\right| = -(1 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 1$.

Remarque 23. D'après la propriété 19, la distance entre deux nombres réels x et y est la distance entre les points d'abscisses respectives x et y sur l'axe réel.

IV. — Équations et inéquations

1) Généralités

Définition 24

Une **équation** (resp. une **inéquation**) est une égalité (resp. une inégalité) dans laquelle figure une (ou plusieurs) quantité(s) inconnue(s) traditionnellement notées x (y, z, t, X,...).

Dans la suite, on ne considère que des (in)équations ayant une seule inconnue.

Définition 25

On dit qu'un nombre réel est **solution** d'une (in)équation si, lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre dans l'(in)équation, on obtient une (in)égalité vraie.

Exemple 26. Par exemple, -1 est solution de $x^2 + 3x = -2$ car l'égalité $(-1)^2 + 3 \times (-1) = -2$ est vraie. En revanche, 1 n'est pas solution de cette équation car l'égalité $1^2 + 3 \times 1 = -2$ est fausse puisque $1^2 + 3 \times 1 = 4$.

Définition 27

Résoudre une (in)équation dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.

Remarque 28. Il se peut qu'une (in)équation n'ait pas de solution dans $\mathbb{R}$. C'est le cas par exemple de l'équation $x^2 = -1$ ou l'inéquation $x^2 < 0$ car, pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est vide. On note cet ensemble $\varnothing$.

Méthode 29

Pour résoudre une (in)équation, on raisonne par (in)égalités équivalentes afin d'isoler la variable. Plus précisément, on obtient :

1. une égalité équivalente si on ajoute ou on soustrait un même nombre aux deux membres d'une égalité ou si on multiplie ou divise les deux membres d'une égalité par un même nombre non nul ;
2. une inégalité équivalente si on ajoute ou on soustrait un même nombre aux deux membres d'une inégalité ou si on multiplie ou divise les deux membres d'une égalité par un même nombre non nul à condition de changer le sens de l'inégalité si ce nombre est négatif.

Exemple 30.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) : $\dfrac{x+3}{5} = 2 - x$ d'inconnue x.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_1) : $x - \sqrt{2}(x-3) > 2$ d'inconnue x.

Solution.

1.

$$\begin{aligned}
(E_1) &\iff \left(\frac{x+3}{5}\right) \times 5 = (2-x) \times 5 && \text{(on multiplie les deux membres par } 5 \neq 0) \\
&\iff x + 3 = 10 - 5x \\
&\iff x + 3 + 5x = 10 - 5x + 5x && \text{(on ajoute } 5x \text{ aux deux membres)} \\
&\iff 6x + 3 = 10 \\
&\iff 6x + 3 - 3 = 10 - 3 && \text{(on soustrait 3 aux deux membres)} \\
&\iff 6x = 7 \\
&\iff \frac{6x}{6} = \frac{7}{6} && \text{(on divise les deux membres par } 6 \neq 0) \\
&\iff x = \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_1) est $\left\{\dfrac{7}{6}\right\}$.

2.

$$\begin{aligned}
(I_1) &\iff x-\sqrt{2}x+3\sqrt{2}>2\\
&\iff (1-\sqrt{2})x+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}>2-3\sqrt{2} && \text{(on soustrait } 3\sqrt{2} \text{ aux deux membres)}\\
&\iff (1-\sqrt{2})x>2-3\sqrt{2}\\
&\iff \frac{(1-\sqrt{2})x}{1-\sqrt{2}}<\frac{2-3\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} && \text{(on divise les deux membres par } 1-\sqrt{2}<0\text{)}\\
&\iff x<\frac{2-3\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\\
&\iff x<\frac{(2-3\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}\\
&\iff x<\frac{2+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-6}{1^2-\sqrt{2}^2}\\
&\iff x<\frac{-4-\sqrt{2}}{-1}\\
&\iff x<4+\sqrt{2}
\end{aligned}$$

On conclut que l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_2) est $\left]-\infty\,;4+\sqrt{2}\right[$.

Propriété 31. — Cas particulier du premier degré

Soit a et b sont deux réels tels que $a\neq 0$.

1. L'ensemble des solutions de l'équation $ax+b=0$ est $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $ax+b>0$ est $\left]-\infty\,;-\frac{b}{a}\right[$ si $a<0$ et $\left]-\frac{b}{a}\,;+\infty\right[$ si $a>0$.
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation $ax+b<0$ est $\left]-\frac{b}{a}\,;+\infty\right[$ si $a<0$ et $\left]-\infty\,;-\frac{b}{a}\right[$ si $a>0$.

On peut résumer tout cela par le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

Exemple 32. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(E_2) : 6x-3=0$ d'inconnue x est $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ car ici $a=6$ et $b=-3$ donc $-\frac{b}{a}=-\frac{-3}{6}=\frac{1}{2}$.

De même, l'ensemble de solutions de l'inéquation $(I_2) : 1-3x>0$ d'inconnue x est $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[$ car ici $a=-3<0$ et $b=1$ donc $-\frac{b}{a}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$.

2) Équations « produit » et équations « quotient »

Propriété 33. — Règle du produit nul

Un produit de réels est nul si et seulement si un des facteurs du produit est nul.

Remarque 34. Cette règle reste vraie pour un produit d'autant de facteurs qu'on veut.

Exemple 35. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_3) : (3x-6)(7x+2)=0$.

Solution.
On a

$$(E_3) \iff 3x-6=0 \text{ ou } 7x+2=0 \iff x=2 \text{ ou } x=-\frac{2}{7}.$$

L'ensemble des solutions de (E_3) est $\left\{2; -\frac{2}{7}\right\}$.

Méthode 36

Pour résoudre une équation, on peut essayer de se ramener à un produit nul en factorisant grâce aux identités remarquables ou à un facteur commun.

Exemple 37.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_4) : (3t+5)^2 = 4$ d'inconnue t.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_5) : 3x^2 = 5x$ d'inconnue x.

Solution.

1. On a

$$\begin{aligned}
(E_4) &\iff (3t+5)^2 - 4 = 4 - 4 && \text{(On soustrait 4 aux deux membres)}\\
&\iff (\underbrace{3t+5}_{a})^2 - \underbrace{2}_{b}{}^2 = 0 && \text{(On reconnait une identité remarquable)}\\
&\iff \left[(\underbrace{3t+5}_{a}) - \underbrace{2}_{b}\right]\left[(\underbrace{3t+5}_{a}) + \underbrace{2}_{b}\right] = 0 && \text{(On factorise } a^2-b^2 \text{ en } (a-b)(a+b))\\
&\iff (3t+3)(3t+7) = 0 &&\\
&\iff 3t+3=0 \text{ ou } 3t+7=0 && \text{(On utilise la règle du produit nul)}\\
&\iff t=-1 \text{ ou } t=-\frac{7}{2} && \text{(Ce sont deux équations affines)}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_4) est $\left\{-1, -\frac{7}{2}\right\}$.

2. De même

$$\begin{aligned}
(E_5) &\iff 3x^2 - 5x = 0 && \text{(On a soustrait } 5x \text{ aux deux membres)}\\
&\iff 3x \times x - 5 \times x = 0 && \text{(On reconnaît le facteur commun } x)\\
&\iff x(3x-5) = 0 && \text{(On factorise pour obtenir un produit nul)}\\
&\iff x=0 \text{ ou } 3x-5=0 && \text{(On utilise la règle du produit nul)}\\
&\iff x=0 \text{ ou } x=\frac{5}{3} && \text{(On reconnaît une équation affine)}
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_5) est $\left\{0, \frac{5}{3}\right\}$.

Propriété 38. — Règle du quotient nul

Un quotient est nul si et seulement si le numérateur est nul et le dénominateur est non nul.

Exemple 39.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_6) : \frac{5x-3}{x+3} = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_7) : \frac{x^2-25}{x-5} = 0$.

Solution.

1. L'équation (E_6) a un sens si et seulement si $x + 3 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq -3$ et, pour tout $x \neq -3$,

$$(E_6) \iff 5x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{5}.$$

Comme $\frac{3}{5} \neq -3$, l'ensemble des solutions de (E_6) est $\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

2. L'équation (E_7) a un sens si et seulement si $x - 5 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 5$. On a alors, pour tout réel $x \neq 5$,

$$(E_6) \iff x^2-25 = 0 \iff (x-5)(x+5) \iff x-5 = 0 \text{ ou } x+5 = 0 \iff x = 5 \text{ ou } x = -5$$

Comme on doit avoir $x \neq 5$, on conclut que l'ensemble des solutions de (E_7) est $\{-5\}$.

3) Étude de signe

Définition 40

Étudier le signe d'une expression $A(x)$ dépendant d'un réel x, c'est déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $A(x) \leqslant 0$ et l'ensemble de valeurs de x pour lesquelles $A(x) \geqslant 0$.

Méthode 41

Pour étudier le signe d'une expression, on a toujours intérêt à la factoriser ou à la réduire au même dénominateur (lorsque cela est possible). Dans ces cas, on peut utiliser la « règle des signes » pour un produit ou un quotient à l'aide d'un tableau de signe.

Exemple 42.

1. Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ de $A(x) = (-3x + 2)(x + 4)$.

2. Étudier le signe de $B(x) = \frac{2x+4}{5x-1}$

Solution.

1. On voit que $A(x)$ est le produit de deux facteurs affines : $-3x + 2$ et $x + 4$.

Signe de $-3x + 2$

Ici, $a = -3$ et $b = 2$ donc $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$. Comme $a < 0$, on en déduit que $-3x + 2 \geqslant 0$ si $x \leqslant \frac{2}{3}$ et $-3x + 2 \leqslant 0$ si $x \geqslant \frac{2}{3}$.

Signe de $x + 4$

Ici, $a = 1$ et $b = 4$ donc $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4$. Comme $a > 0$, on en déduit que $x + 4 \leqslant 0$ si $x \leqslant -4$ et $x + 4 \geqslant 0$ si $x \geqslant -4$.

Signe de $A(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe. Comme $A(x)$ est le produit de $-3x+2$ et de $x+4$, la dernière ligne du tableau est obtenue en utilisant la règle des signes dans chaque colonne.

x	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $-3x+2$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $A(x) \geqslant 0$ si $x \in \left[-4\,;\frac{2}{3}\right]$ et $A(x) \leqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;-4\right] \cup \left[\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

2. On voit que $B(x)$ est le quotient de deux termes affines : $2x+4$ et $5x-1$.

Signe de $2x+4$

Ici, $a=2$ et $b=4$ donc $-\frac{b}{a} = -\frac{4}{2} = -2$. Comme $a>0$, on en déduit que $2x+4 \leqslant 0$ si $x \leqslant -2$ et $2x+4 \geqslant 0$ si $x \geqslant -2$.

Signe de $5x-1$

Ici, $a=5$ et $b=-1$ donc $-\frac{b}{a} = -\frac{-1}{5} = \frac{1}{5}$. Comme $a>0$, on en déduit que $5x-1 \leqslant 0$ si $x \leqslant \frac{1}{5}$ et $5x-1 \geqslant 0$ si $x \geqslant \frac{1}{5}$.

Signe de $B(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
signe de $2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $5x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $B(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Dans ce tableau, la double-barre sur la dernière ligne en dessous de $\frac{1}{5}$ signifie que $B(x)$ n'est pas défini si $x = \frac{1}{5}$ (car alors son dénominateur s'annule).

Ainsi, $B(x) \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;-2\right] \cup \left]\frac{1}{5}\,;+\infty\right[$ et $B(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[-2\,;\frac{1}{5}\right[$.

On peut remarquer que le crochet est nécessairement ouvert en $\frac{1}{5}$ car $B(x)$ n'existe pas si $x = \frac{1}{5}$.

Il n'y a pas de règle des signes pour la somme et la différence. La seule chose qu'on peut dire est que la somme de deux nombres positifs est positive et la somme de deux nombres négatifs est négative.

Méthode 43

Pour résoudre une inéquation, on peut se ramener à une étude de signe.

Exemple 44.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_2) : $(2x+3)(x+1) \geqslant (2x+3)(2-2x)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_3) : (2x+3)^2 > (3x+2)^2$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I_4) : \frac{x+2}{x} < \frac{x}{x+1}$.

Solution.

1. On commence par soustraire $(2x+3)(2-2x)$ aux deux membres de l'inéquation. On obtient :

$$(I_2) \iff \underline{(2x+3)}(x+1) - \underline{(2x+3)}(2-2x) \geqslant 0$$

On reconnaît le facteur commun $2x+3$. On peut donc factoriser le membre de gauche :

$$\begin{aligned}
(I_2) &\iff \underline{(2x+3)}\left[(x+1)-(2-2x)\right] \geqslant 0\\
(I_2) &\iff (2x+3)(x+1-2+2x) \geqslant 0\\
(I_2) &\iff (2x+3)(3x-1) \geqslant 0
\end{aligned}$$

On est donc amené à étudier le signe de $A(x) = (2x+3)(3x-1)$ qui est un produit de deux facteurs affines. On peut dès lors utiliser un tableau de signe.

Signe de $2x+3$

Ici, $a = 2$ et $b = 3$ donc $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$. Comme $a > 0$, on en déduit que $2x+3 \leqslant 0$ si $x \leqslant -\frac{3}{2}$ et $2x+3 \geqslant 0$ si $x \geqslant -\frac{3}{2}$.

Signe de $3x-1$

Ici, $a = 3$ et $b = -1$ donc $-\frac{b}{a} = -\frac{-1}{3} = \frac{1}{3}$. Comme $a > 0$, on en déduit que $3x-1 \leqslant 0$ si $x \leqslant \frac{1}{3}$ et $3x-1 \geqslant 0$ si $x \geqslant \frac{1}{3}$.

Signe de $A(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
signe de $2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $A(x) \geqslant 0$ si $x \in \left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et $A(x) \leqslant 0$ si $x \in \left[-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{3}\right]$.

Or, on a vu que (I_2) est équivalente à $A(x) \geqslant 0$ donc l'ensemble des solutions de (I_2) est $\left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

2. On commence par soustraire $(3x+2)^2$ aux deux membres de l'inéquation. On obtient :

$$(I_3) \iff (2x+3)^2 - (3x+2)^2 > 0.$$

On reconnaît une identité remarquable (de la forme $a^2 - b^2$). On peut donc factoriser le membre de gauche :

$$\begin{aligned}
(I_3) &\iff \left[(2x+3)-(3x+2)\right]\left[(2x+3)+(3x+2)\right] > 0\\
(I_3) &\iff (2x+3-3x-2)(2x+3+3x+2) > 0\\
(I_3) &\iff (-x+1)(5x+5) > 0
\end{aligned}$$

On est donc amené à étudier le signe de $B(x) = (-x+1)(5x+5)$ qui est un produit de deux facteurs affines. On peut dès lors utiliser un tableau de signe.

Signe de $-x+1$

Ici, $a=-1$ et $b=1$ donc $-\frac{b}{a}=-\frac{1}{-1}=1$. Comme $a<0$, on en déduit que $-x+1 \geqslant 0$ si $x \leqslant 1$ et $-x+1 \leqslant 0$ si $x \geqslant 1$.

Signe de $5x+5$

Ici, $a=5$ et $b=5$ donc $-\frac{b}{a}=-\frac{5}{5}=-1$. Comme $a>0$, on en déduit que $5x+5 \leqslant 0$ si $x \leqslant -1$ et $5x+5 \geqslant 0$ si $x \geqslant -1$.

Signe de $B(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $5x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $B(x) \geqslant 0$ si $x \in [-1\,;1]$ et $B(x) \leqslant 0$ si $x \in]-\infty\,;-1] \cup [1\,;+\infty[$.
Or, on a vu que (I_3) est équivalente à $B(x)>0$ donc l'ensemble des solutions de (I_3) est $]-1\,;1[$. Ici, l'intervalle est ouvert car l'inégalité cherchée est stricte.

3. Pour tout réel $x \notin \{0\,;-1\}$,

$$(I_4) \iff \frac{x+2}{x}-\frac{x}{x+1}<0 \iff \frac{(x+2)(x+1)-x^2}{x(x+1)}<0$$
$$\iff \frac{x^2+x+2x+2-x^2}{x(x+1)}<0 \iff \frac{3x+2}{x(x+1)}<0$$

On est donc ramené à étudier le signe de $C(x)=\dfrac{3x+2}{x(x+1)}$ qui est le quotient d'un terme affine et d'un produit de facteurs affines :

Signe de $3x+2$

Ici, $a=3$ et $b=2$ donc $-\frac{b}{a}=-\frac{2}{3}$. Comme $a>0$, on en déduit que $3x+2 \leqslant 0$ si $x \leqslant -\frac{2}{3}$ et $3x+2 \geqslant 0$ si $x \geqslant -\frac{2}{3}$.

Signe de $5x+1$

Ici, $a=1$ et $b=1$ donc $-\frac{b}{a}=-\frac{1}{1}=-1$. Comme $a>0$, on en déduit que $x+1 \leqslant 0$ si $x \leqslant -1$ et $x+1 \geqslant 1$ si $x \geqslant -1$.

Signe de $C(x)$

On rassemble les résultats précédents dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
signe de $3x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de x		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $C(x)$		$-$	$\Vert$	$+$		$-$	$\Vert$	$+$	

On conclut que l'ensemble des solutions de (I_4) est $]-\infty\,;-1[\cup \left]-\frac{2}{3}\,;0\right[$.

4) Équations et inéquations avec des valeurs absolues

Propriété 45

Soit a un réel positif. Alors,

1. $|x| = a$ si et seulement si $x = a$ ou $x = -a$;
2. $|x| < a$ si et seulement si $-a < x < a$;
3. $|x| > a$ si et seulement si $x < -a$ ou $x > a$.

Démonstration.

1. Pour tout réel x,

$$|x| = a \iff (x \geqslant 0 \text{ et } x = a) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } -x = a) \iff x = a \text{ ou } x = -a.$$

2. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} |x| < a &\iff (x \geqslant 0 \text{ et } x < a) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } -x < a) \\ &\iff 0 \leqslant x < a \text{ ou } -a < x < 0 \\ &\iff -a < x < a. \end{aligned}$$

3. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} |x| > a &\iff (x \geqslant 0 \text{ et } x > a) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } -x > a) \\ &\iff x > a \text{ ou } x < -a. \end{aligned}$$

□

Exemple 46.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_8) : $|x-2| = 3$ d'inconnue x.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_5) : $|2t+1| > 7$ d'inconnue t.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I_6) : $|3-5y| \leqslant 2$ d'inconnue y.

Solution.

1. Pour tout réel x,

$$(E_8) \iff x-2 = 3 \text{ ou } x-2 = -3 \iff x = 5 \text{ ou } x = -1.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_8) est $\{5\,;-1\}$.

2. Pour tout réel t,

$$(I_5) \iff 2t+1 > 7 \text{ ou } 2t+1 < -7 \iff 2t > 6 \text{ ou } 2t < -8 \underset{2>0}{\iff} t > 3 \text{ ou } t < -4$$

L'ensemble des solutions de (I_5) est $]-\infty\,;-4[\,\cup\,]3\,;+\infty[$.

3. Pour tout réel y,

$$(I_6) \iff -2 \leqslant 3-5y \leqslant 2 \iff -5 \leqslant -5y \leqslant -1 \underset{-5<0}{\iff} 1 \geqslant y \geqslant \frac{1}{5}$$

L'ensemble des solutions de (I_6) est $\left[\frac{1}{5}\,;1\right]$.

5) Équations et inéquations du second degré

Définition 47

1. Un trinôme du second degré est une expression de la forme ax^2+bx+c où a, b et c sont des réels tels que $a \neq 0$. Les trois nombres a, b et c sont appelés les coefficients du trinôme et le nombre a est appelé son coefficient dominant.
2. Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels tels que $a \neq 0$.
3. Une inéquation du second degré est une inéquation de la forme $ax^2+bx+c \geqslant 0$ ou $ax^2+bx+c \leqslant 0$ ou $ax^2+bx+c > 0$ ou $ax^2+bx+c < 0$ où a, b et c sont des réels tels que $a \neq 0$.

Remarque 48. Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont aussi appelées les racines du trinôme ax^2+bx+c.

Méthode 49 : Résolution des équations du second degré

On souhaite résoudre l'équation du second degré $(E) : ax^2+bx+c=0$.

- **Premier cas favorable** : lorsque $c=0$, on peut se ramener à une équation produit en factorisant par x.
- **Second cas favorable** : si $b=0$ alors, en divisant par a, (E) est équivalente à une équation de la forme $x^2+d=0$ et la résolution de cette équation dépend du signe de d.
- **Cas général**
  - on calcule le discriminant du trinôme ax^2+bx+c défini par $\Delta = b^2-4ac$;
  - si $\Delta > 0$ alors l'équation (E) possède deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
  - si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) possède une unique solution réelle : $x_0 = \frac{-b}{2a}$;
  - si $\Delta < 0$ alors l'équation (E) ne possède pas de solutions réelles.

Exemple 50. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_{10}) : -x^2+4x=0 \qquad (E_{11}) : 16x^2-9=0 \qquad (E_{12}) : 3x^2+2x-1=0$$

$$(E_{13}) : x^2+x+1 \qquad (E_{14}) : x^2-x-3=0.$$

Solution.

$$(E_{10}) \iff -x\times x+4\times x=0 \iff x(-x+4)=0 \iff x=0 \text{ ou } -x+4=0 \iff x=0 \text{ ou } x=4$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_{10}) dans $\mathbb{R}$ est $\{0,4\}$.

$$(E_{11}) \iff x^2-\frac{9}{16}=0 \iff x^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2=0 \iff \left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)=0$$
$$\iff x+\frac{3}{4}=0 \text{ ou } x-\frac{3}{4}=0 \iff x=-\frac{3}{4} \text{ ou } x=-\frac{3}{4}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_{11}) est $\{-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\}$.

Le discriminant de $3x^2+2x-1$ est $\Delta = 2^2 - 4\times 3\times(-1) = 4+12 = 16 > 0$ donc l'équation a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 3} = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 3} = -1.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_{12}) est $\left\{\frac{1}{3}, -1\right\}$.

Le discriminant de x^2+x+1 est $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = -3 < 0$ donc l'équation n'a pas de solution réelle. Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_{13}) est $\varnothing$.

Le discriminant de x^2-x-3 est $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-3) = 1+12 = 13 > 0$ donc l'équation a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{13}}{2\times 1} = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{13}}{2\times 1} = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de (E_{14}) est $\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$.

⚠ Tout ce qui précède ne s'applique qu'aux équations de la forme $ax^2+bx+c = \boxed{0}$. Si, par exemple, on doit résoudre l'équation $3x^2-2x+7 = 9$, il faut s'y ramener en soustrayant 9 aux deux membres de l'équation pour obtenir l'équation équivalente $3x^2-2x-2 = 0$.

Théorème 51

On considère un trinôme ax^2+bx+c et on note $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

1. On suppose $\Delta > 0$ et on note x_1 et x_2 les deux racines du trinôme (avec $x_1 < x_2$). Alors, ax^2+bx+c est du signe de a pour tout $x \in \left]-\infty\,;x_1\right[\cup \left]x_2\,;+\infty\right[$ et du signe contraire de a pour tout $x \in \left]x_1\,;x_2\right[$.
2. Si $\Delta = 0$ alors ax^2+bx+c est du signe de a pour tout $x \neq -\frac{b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$ alors ax^2+bx+c est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 52. Étudier les signes des trinômes suivants.

$$P_1(x) = x^2+x+1 \qquad P_2(x) = 2x^2-3x+1 \qquad P_3(x) = -x^2+x+1 \qquad P_4(x) = \frac{1}{4}x^2-x+1.$$

Solution.

1. Le discriminant de $P_1(x)$ est $\Delta = 1^2-4\times 1\times 1 = -3 < 0$ donc, comme $a = 1 > 0$, pour tout réel x, $x^2+x+1 > 0$.
2. Le discriminant de $P_2(x)$ est $\Delta = (-3)^2-4\times 2\times 1 = 1 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles qui sont :
$$x_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2} = 1.$$
Comme $a = 2 > 0$, on conclut que $P_2(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right] \cup \left[1\,;+\infty\right[$ et $P_2(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.
3. Le discriminant de $P_3(x)$ est $\Delta = 1^2-4\times(-1)\times 1 = 5 > 0$ donc ce trinôme possède deux racines réelles qui sont :
$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2\times(-1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
Comme $a = -1 < 0$, on conclut que $P_3(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \left]-\infty\,;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,;+\infty\right[$ et $P_3(x) \geqslant 0$ pour tout réel $x \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,;\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$.

4. Le discriminant de $P_4(x)$ est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 1 = 0$ donc, comme $a = \frac{1}{4} > 0$, $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x et $P_4(x)$ ne s'annule qu'en $x = -\frac{-1}{2\times\frac{1}{4}} = 2$.

Exemple 53. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$$(I_7) : x^2 > 3x + 1 \qquad (I_8) : 5x^2 - 7x + 3 < 0 \qquad (I_9) : x^4 - 3x^2 + 2 \geqslant 0.$$

Solution.

• Commençons par remarquer que (I_7) équivaut à $x^2 - 3x - 1 > 0$ et étudions le signe du $P(x) = x^2 - 3x - 1$. Son discriminant est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13$ donc f possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Ainsi, comme $a = 1 > 0$, $P(x) > 0$ si et seulement si $x \in \left]\infty\,; \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{13}}{2}\,; +\infty\right[$.

On conclut que l'ensemble des solutions de (I_1) est $\left]\infty\,; \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{13}}{2}\,; +\infty\right[$.

• Considérons le trinôme $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$. Le discriminant de P est $(-7)^2 - 4 \times 5 \times 3 = -11 < 0$ donc, comme $a = 5 > 0$, pour tout réel x, $P(x) \geqslant 0$. On conclut que l'ensemble des solutions de (I_8) est $\varnothing$.

• On se ramène à une inéquation du second degré par le changement d'inconnue $X = x^2$. L'inéquation (I_9) se réécrit alors $X^2 - 3X + 2 \geqslant 0$.

Considérons le trinôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$. Le discriminant de $P(X)$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$ donc $P(X)$ a deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2.$$

Ainsi, comme $a = 1 > 0$, $P(X) \geqslant 0$ si et seulement si $X \in \left]-\infty\,; 1\right] \cup \left[2\,; +\infty\right[$.

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(I_9) &\iff X \leqslant 1 \text{ ou } X \geqslant 2 \iff x^2 \leqslant 1 \text{ ou } x^2 \geqslant 2 \\ &\iff x^2 - 1 \leqslant 0 \text{ ou } x^2 - 2 \geqslant 0 \iff x \in [-1\,; 1] \text{ ou } x \in \left]-\infty\,; \sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}\,; +\infty\right[\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions de (I_9) est $\left]-\infty\,; -\sqrt{2}\right] \cup [-1\,; 1] \cup \left[\sqrt{2}\,; +\infty\right[$.