⧫ Chapitre 2. Raisonnements

I. — Vocabulaire

1) Proposition

Définition 1

Une **proposition** (ou assertion) est un énoncé qui a une valeur de vérité c'est-à-dire qui peut être vrai ou faux.
Démontrer une proposition, c'est démontrer qu'elle est vraie.

Remarque 2.

1. En mathématiques, une proposition vraie s'appelle un théorème (ou une propriété, un lemme, un corollaire selon l'importance de l'énoncé et son utilité).
2. Une proposition peut dépendre d'une ou plusieurs variables. Dans ce cas, sa valeur de vérité peut dépendre de la valeur des variables.

Exemple 3.

1. L'énoncé « $2 + 2 = 4$ » est une proposition vraie.
2. L'énoncé « $1 > 2$ » est une proposition fausse.
3. L'énoncé « $x^2 \geqslant x$ » où x est un réel est une proposition dont la valeur de vérité dépend de x : par exemple, pour $x = 2$, la proposition est vraie mais pour $x = 0{,}5$ la proposition est fausse.
4. L'énoncé « $x + 2$ » n'est pas une proposition car il n'a pas de valeur de vérité.

2) Quantification

Lorsqu'une proposition dépend d'une (ou plusieurs) variable(s), il est nécessaire, pour pouvoir donner une valeur de vérité à la proposition, de quantifier le(s) variable(s).

On distingue deux types de quantification.

- **La quantification universelle** : dans ce cas, l'énoncé est considéré **pour toute** valeur de la variable dans un certain ensemble.
  Par exemple, « pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ » est une proposition vraie car quelle que soit la valeur du réel x, le nombre x^2 est bien positif.
  En revanche, « pour tout entier naturel n, $\frac{n}{2}$ est un entier naturel » est une proposition fausse car, par exemple, pour $n = 3$, $\frac{3}{2} = 1{,}5$ n'est pas un entier.
  L'expression « pour tout » peut se symboliser par le quantificateur $\forall$. Ainsi, on peut réécrire la première proposition :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geqslant 0.$$
- **La quantification existentielle** : dans ce cas, on s'intéresse seulement à **l'existence d'au moins une valeur** de la variable pour laquelle l'énoncé est vrai.
  Par exemple, « il existe un réel x tel que $x^2 = x$ » est une proposition vraie car pour $x = 1$, l'égalité est vraie.
  En revanche, « il existe un entier naturel n tel que $n < 0$ » est une proposition fausse car tout entier naturel est positif ou nul.

L'expression « il existe » peut se symboliser par le quantificateur $\exists$. Ainsi, on peut réécrire la première proposition :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = x.$$

Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont à employer avec parcimonie et à bon escient. Il ne s'utilise JAMAIS en plein milieu d'une phrase en français et se placent TOUJOURS devant la proposition (JAMAIS APRÈS !) En cas de doute, il vaut mieux écrire en français « pour tout » ou « il existe ».

Méthode 4

- Pour montrer qu'une proposition universelle est vraie, il faut introduire une variable générique (par exemple, en écrivant « Soit $x \in \mathbb{R}$ ») puis montrer que la proposition est vraie pour cette variable générique sans lui donner de valeur particulière.
- Pour montrer qu'une proposition universelle est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple c'est-à-dire une valeur particulière de la variable pour laquelle la proposition est fausse.
- Pour montrer qu'une proposition existentielle est vraie, il suffit de trouver un exemple témoin, c'est-à-dire une valeur de la variable pour laquelle la proposition est vraie.
- Pour montrer qu'une proposition existentielle est fausse, il faut introduire une variable générique (par exemple, en écrivant « Soit $x \in \mathbb{R}$ ») puis montrer que la proposition est fausse pour cette variable générique sans lui donner de valeur particulière.

Exemple 5. Étudier la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

1. P_1 : « pour tout entier naturel n, $n \in \mathbb{Q}$ ».
2. P_2 : « pour tout rationnel x, $x \in \mathbb{Z}$ ».
3. P_3 ; « il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ ».
4. P_4 : « il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x+1)^2 = 2x - 1$ ».

Solution.

1. Soit un entier naturel n. Alors, $n = \frac{n}{1}$ est le quotient de deux entiers donc $n \in \mathbb{Q}$. Ainsi, $\boxed{P_1 \text{ est vraie}}$.
2. Si $x = \frac{1}{2}$ alors x est rationnel mais $x \notin \mathbb{Z}$. Ainsi, $\boxed{P_1 \text{ est fausse}}$.
3. Si $n = 4$ alors $n \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{n} = 2 \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{P_3 \text{ est vraie}}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ et $x^2 \geqslant 0$ donc $(x+1)^2 \geqslant 2x+1$. De plus, $1 > -1$ donc $2x + 1 > 2x - 1$ et ainsi $(x+1)^2 > 2x - 1$. Ainsi, $\boxed{P_4 \text{ est vraie}}$.

3) Implication, réciproque et équivalence

Dans tout ce paragraphe, P et Q désignent des propositions qui peuvent être vraies ou fausses.

Définition 6

Une **implication** est un énoncé de la forme « Si P alors Q » où P et Q sont des propositions (qui peuvent être vraies ou fausses). Cette implication se note « $P \Longrightarrow Q$ » ce qui se lit « P implique Q » ou « si P alors Q ».

Remarque 7. Une implication est une proposition donc elle a une valeur de vérité.

Exemple 8.

1. « Si je suis français alors je suis européen » est une implication et c'est une proposition vraie.
2. « Pour tout réel x, si $x^2 \geqslant 1$ alors $x \geqslant 1$ » est une implication (universellement quantifiée). C'est une proposition fausse.
3. « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 1 \Longrightarrow x \geqslant 0$ » est une implication (universellement quantifiée). C'est une proposition vraie.

L'implication n'est pas synonyme de « donc ». Lorsqu'on écrit $P \Longrightarrow Q$, on ne fait aucune hypothèse sur la valeur de vérité de P. En revanche, lorsqu'on écrit « P donc Q » cela signifie « je sais que P est vraie et j'en déduis que Q est vraie ».

L'implication « $P \Longrightarrow Q$ » donne un lien entre la véracité de P et celle de Q : si P est vraie alors Q aussi. En revanche, si P est fausse, elle ne dit rien de particulier quand à la valeur de vérité de Q, de sorte que, dans ce cas, l'implication est vraie.

Propriété 9

La valeur de vérité d'une implication est donnée par le tableau suivant :

Si P est...	et Q est...	alors $P \Longrightarrow Q$ est...
vraie	vraie	vraie
vraie	fausse	fausse
fausse	vraie	vraie
fausse	fausse	vraie

Remarque 10. Pour démontrer que l'implication « $P \Longrightarrow Q$ » est vraie, il suffit de montrer que si P est vraie alors Q est vraie.

Exemple 11. Déterminer la valeur de vérité des implications suivantes :

1. « $2 > 3 \Longrightarrow 3 > 5$ »
2. « Pour tout réel x, si $x^2 > 4$ alors $x > 2$ »
3. « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4$ »

Solution.

1. Comme la propositon « $2 > 3$ » est fausse, l'implication $\boxed{\text{« } 2 > 3 \Longrightarrow 3 > 5 \text{ » est vraie}}$.
2. Si $x = -3$ alors $x^2 = (-3)^2 = 9 > 4$ mais $x < 2$. On déduit de ce contre-exemple que l'implication $\boxed{\text{« Pour tout réel } x\text{, si } x^2 > 4 \text{ alors } x > 2 \text{ » est fausse}}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x > 2$ alors, par stricte croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$, $x^2 > 4$. Ainsi, l'implication $\boxed{\text{« } \forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4 \text{ » est vraie}}$.

Définition 12

L'implication « $Q \Longrightarrow P$ » est appelée la **réciproque** de l'implication « $P \Longrightarrow Q$ ».

Exemple 13. L'implication réciproque de « Si je suis français alors je suis européen » est « Si je suis européen alors je suis français ».

⚠ Il n'y a aucun lien entre la valeur de vérité de « $P \Longrightarrow Q$ » et celle de « $Q \Longrightarrow P$ ».

Exemple 14. Pour chacune des implications suivantes, dire si elle est vraie, écrire sa réciproque et déterminer si cette réciproque est vraie.

1. « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$ »
2. « $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 = 4 \Longrightarrow n = 2$ »

Solution.

1. Notons P_1 la proposition « $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$ ». Si $x = -1$ alors $x^2 = (-1)^2 = 1$ mais $x \neq 1$ donc P_1 est fausse. La réciproque de P_1 est Q_1 : « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x = 1 \Longrightarrow x^2 = 1$ ». Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 1$ alors $x^2 = 1^2 = 1$ donc Q_1 est vraie.
2. Notons P_2 la proposition « $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 = 4 \Longrightarrow n = 2$ ». Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n^2 = 4$ alors $\sqrt{n^2} = 2$ et, comme $n \geqslant 0$, $\sqrt{n^2} = n$ donc $n = 2$. Ainsi, P_2 est vraie. La réciproque de P_2 est Q_2 : « $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n = 2 \Longrightarrow n^2 = 4$ ». Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 2$ alors $n^2 = 2^2 = 4$ donc Q_2 est vraie.

Définition 15

La proposition « $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$ » se note aussi « $P \Longleftrightarrow Q$ », ce qui se lit « P équivaut à Q » ou « P est équivalente à Q » ou encore « P si et seulement si Q ».
Si cette proposition est vraie, on dit que P et Q sont **équivalentes**.

Exemple 16. D'après l'exemple précédent, l'équivalence « $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = 1$ » est fausse (car l'implication directe est fausse) et l'équivalence « $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2 = 4 \Longleftrightarrow n = 2$ » est vraie.

Propriété 17

L'équivalence « $P \Longleftrightarrow Q$ » est vraie si et seulement si P et Q ont la même valeur de vérité :

Si P est...	et Q est...	alors $P \Longleftrightarrow Q$ est...
vraie	vraie	vraie
vraie	fausse	fausse
fausse	vraie	fausse
fausse	fausse	vraie

⚠ ATTENTION à ne pas confondre l'équivalence et l'égalité. Écrire « $3(x+2) \Longleftrightarrow 3x+6$ » n'a pas de sens car $3(x+2)$ et $3x+6$ ne sont pas des propositions (elles n'ont pas de valeurs de vérité).

Méthode 18

Pour démontrer que P et Q sont deux propositions équivalentes, on peut

- soit raisonner par équivalence successives

$$P \iff R_1 \iff R_2 \iff \cdots \iff R_n \iff Q$$

- soit raisonner par double implication c'est-à-dire montrer séparément que P implique Q et que Q implique P.

Exemple 19.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \neq -1$ et tout réel $y \neq 1$, $\dfrac{x}{x+1} = y$ si et seulement si $x = \dfrac{y}{1-y}$.

2. Démontrer l'équivalence suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R} \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ a2^n + b3^n = 0) \iff (a = b = 0).$$

Solution.

1. On raisonne par équivalence. Soit un réel $x \neq -1$ et un réel $y \neq 1$. Alors,

$$\frac{x}{x+1} = y \underset{x\neq -1}{\iff} x = y(x+1) \iff x = yx+y \iff x-yx = y \iff x(1-y) = y \underset{y\neq 1}{\iff} x = \frac{y}{1-y}.$$

Ainsi, on a montré que, pour tout réel $x \neq -1$ et tout réel $y \neq 1$, $\dfrac{x}{x+1} = y$ si et seulement si $x = \dfrac{y}{1-y}$.

2. On raisonne par double implication en commençant parle sens réciproque.
Soit a et b deux réels. Si $a = b = 0$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a2^n + b3^n = 0 \times 2^n + 0 \times 3^n = 0$.
Réciproquement, supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a2^n + b3^n = 0$. Alors, en particulier, pour $n = 0$, $a2^0 + b3^0 = 0$ i.e. $a + b = 0$ et, pour $n = 1$, $a \times 2 + b \times 3 = 0$ donc $2a + 3b = 0$.
Or, comme $a + b = 0$, $a = -b$ donc $2(-b) + 3b = 0$ i.e. $b = 0$ et, dès lors, $a = -b = -0 = 0$.
Ainsi, $a = b = 0$.
On a donc bien montré que

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R} \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ a2^n + b3^n = 0) \iff (a = b = 0)}.$$

II. — Principes de raisonnements et de démonstrations

1) Démontrer une égalité

Méthode 20

Étant donné deux expressions A et B, pour montrer que $A = B$, on peut :

- Transformer A pour obtenir B ;
- Transformer B pour obtenir A ;
- Transformer A et B pour obtenir la même expression C ;

Dans tous les cas, quand on cherche à montrer que $A = B$, ON NE PEUT PAS PARTIR du résultat c'est-à-dire on ne peut pas commencer par écrire $A = B$...

Exemple 21. Démontrer les égalités suivantes :

1. pour tout réel x, $(x-1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 5$.
2. pour tout entier naturel x, $2^n = 2^{n+1} - 2^n$.
3. pour tous réels a, b, c et d, $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$.

Solution.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $(x-1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 1^2 + 4 = x^2 - 2x + 5$ donc on a montré que, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ (x-1)^2 + 4 = x^2 - 2x + 5}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $2^{n+1} - 2^n = 2^n \times 2^1 - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n \times 1 = 2^n$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 2^n = 2^{n+1} - 2^n}$.
3. Soit des réels a, b, c et d. Alors, d'une part,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 &= (ac)^2 - 2(ac)(bd) + (bd)^2 + (ad)^2 + 2(ad)(bc) + (bc)^2\\ &= (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2\\ &= (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2.\end{aligned}$$

On conclut donc que, $\boxed{\text{pour tous réels } a,\ b,\ c \text{ et } d,\ (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2}$.

2) Raisonnement par disjonction des cas

Méthode 22

Lorsqu'on cherche à démontrer une proposition dépendant d'une variable x, on peut traiter différents cas séparément à condition de s'assurer qu'on traite ainsi tous les cas possibles.

Exemple 23.

1. On rappelle qu'un entier n est pair s'il existe un entier k tel que $n = 2k$ et un entier n est impair s'il existe un entier k tel que $n = 2k+1$.
   Démontrer que, pour tout entier n, n et n^2 ont la même parité.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $a > 0$, $a^n > 0$.

Solution.

1. Soit un entier n. Distinguons deux cas.
   1^er^ cas. Supposons que n est pair. Alors, il existe un entier k tel que $n = 2k$. Dès lors, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et $2k^2$ est un entier donc n^2 est pair. Ainsi, n^2 a la même parité que n.
   2^nd^ cas. Supposons que n est impair. Alors, il existe un entier k tel que $n = 2k+1$. Dès lors, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1$ et $2k^2 + 2k$ est un entier donc n^2 est impair. Ainsi, n^2 a la même parité que n.
   Dans les deux cas, n^2 a la même parité que n.
   On conclut que, $\boxed{\text{pour tout entier } n,\ n \text{ et } n^2 \text{ ont la même parité}}$.

2. Soit un réel $a > 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Distinguons trois cas.
1^er^ cas. Supposons que $n > 0$. Alors, par définition, $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ donc a^n est un produit de réels strictement positifs et ainsi $a^n > 0$.
2^e^ cas. Supposons que $n = 0$. Alors, par définition, $a^n = 1$ donc $a^n > 0$.
3^e^ cas. Supposons que $n < 0$. Alors, par définition, $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$. Or, comme $n < 0$, $-n > 0$ donc, par le 1^er^ cas, $a^{-n} > 0$. Ainsi, a^n est le quotient de deux nombres strictement positifs donc $a^n > 0$.
Dans les trois cas, a^n donc on conclut que, $\boxed{\text{pour tout réel } a > 0 \text{ et tout entier } n,\ a^n > 0}$.

3) Raisonnement par l'absurde

Définition 24

Étant donné une proposition P, la **négation** (ou contraire) de P est une proposition qui est fausse si P est vraie et vraie si P est fausse. On la note non(P).

Exemple 25.

1. Si x est un réel, une formulation de la négation de P : « $x = 0$ » est non(P) : « $x \neq 0$ ».
2. Si n est un entier, une formulation de la négation de P : « n est pair » est non(P) : « n n'est pas pair » et une formulation équivalente est « n est un entier impair ».

Remarque 26. Il n'y a pas qu'une seule façon de formuler la négation d'une proposition mais toutes les formulations sont équivalentes.

Propriété 27

1. Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux propriétés dépendant d'une variable x appartenant à un ensemble E.
   a. La négation de « pour tout $x \in E$, $P(x)$ » est « il existe $x \in E$ tel que non($P(x)$) » ;
   b. la négation de « il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ » est « pour tout $x \in E$, non($P(x)$) » ;
2. Soit P et Q deux propositions. La négation de « $P \Longrightarrow Q$ est « P et non(Q) ».

Exemple 28. Dans chacun des cas suivants, écrire la négation de la proposition.

1. P_1 : « Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 1$. »
2. P_2 : « Il existe un réel x tel que $x^2 = -1$. »
3. P_3 : « Si je veux réussir alors je travaille. »

Solution.

1. Une formulation de non(P_1) est : « Il existe un réel x tel que $x^2 < 1$. »
2. Une formulation de non(P_2) est : « Pour tout réel x, $x^2 \neq -1$. »
3. Une formulation de non(P_2) est : « Je veux réussir et je ne travaille pas. »

Méthode 29 : Raisonnement par l'absurde (ou par contradiciton)

Pour montrer qu'une proposition P est vraie, on peut supposer que non(P) est vraie et montrer que cela conduit à une absurdité.

Exemple 30.

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2. Montrer que, pour tout réel x, si, pour tout réel $a > 0$, $x < a$ alors $x \leqslant 0$.

Solution.

1. Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est rationnel. Alors, il existe une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Ainsi, $b\sqrt{2} = a$ donc, en élevant au carré, $2b^2 = a^2$. Dès lors, a^2 est pair donc (d'après l'exemple **1**) a est pair. Ainsi, il existe un entier k tel que $a = 2k$. On en déduit que $2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ donc, en divisant par 2, $b^2 = 2k^2$. Ainsi, b^2 est pair donc b est pair i.e. il existe un entier ℓ tel que $b = 2\ell$. On en déduit que $\frac{a}{b} = \frac{2k}{2\ell} = \frac{k}{\ell}$ donc $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible. On aboutit à une contradiction donc $\boxed{\sqrt{2} \text{ est irrationnel}}$.
2. Supposons, par l'absurde, qu'il existe un réel x tel que, pour tout réel $a > 0$, $x < a$ et $x > 0$. Alors, comme $x > 0$, $\frac{x}{2} > 0$ donc, en prenant $a = \frac{x}{2}$, on en déduit que $x < \frac{x}{2}$, ce qui est absurde car $x > 0$.
   Ainsi, on en déduit que, $\boxed{\text{pour tout réel } x\text{, si, pour tout réel } a > 0,\ x < a \text{ alors } x \leqslant 0}$.

4) Raisonnement par récurrence

On considère une proposition $P(n)$ dépendant d'un **entier naturel** n. On souhaite montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Pour cela, il suffit de :

- montrer que la proposition est vraie au rang 0 c'est-à-dire que lorsqu'on remplace n par 0 dans $P(0)$ alors la proposition est vraie. Cette étape est appelée *initialisation de la récurrence*.
- montrer que, pour tout entier naturel k, l'implication $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$: c'est ce qu'on appelle *l'hérédité*.

Remarques

1. Il arrivera qu'on souhaite montrer que la proposition $P(n)$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang N. Dans ce cas, dans l'étape d'initialisation, on remplace 0 par N.
2. Le principe de raisonnement par récurrence est ce qu'on appelle un axiome, c'est-à-dire une « vérité première » qui sert de base à la théorie et qu'on admet sans chercher à la démontrer.
3. Le raisonnement par récurrence ne s'applique qu'à des propositions dépendant d'un entier naturel n. Il est hors de question de chercher à faire un tel raisonnement pour une propriété dépendant d'un réel x quelconque.

Exemple 31.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Solution.

1. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: « $2^n > n$ ».
   Initialisation. $2^0 = 1 > 0$ donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.
   Ainsi, on suppose que $2^n > n$ est vraie et on va montrer que $2^{n+1} > n+1$.
   Or, $2^{n+1} = 2 \times 2^n$ donc, comme $2^n > n$ et $2 > 0$, $2 \times 2^n > 2n$ i.e. $2^{n+1} > n + n$.
   Distinguons deux cas.
   <u>1^{er} cas</u>. Supposons que $n = 0$. Alors, $2^{n+1} = 2^1 = 2$ et $n + 1 = 1$ donc $2^{n+1} > 1$.

2nd cas. Supposons que $n \geqslant 1$. Alors, $n+n \geqslant n+1$ donc $2^{n+1} > n+n \geqslant n+1$.
Ainsi, dans les deux cas, $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 2^n > n}$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $P(n)$: « $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. »
Initialisation. $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1$ est vraie. Autrement, on suppose que $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et on veut montrer que $1+2+3+\cdots+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Or,

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+(n+1) = 1+2+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on a donc montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}.$$