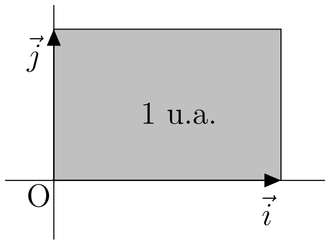
⧫ Chapitre 20. Calcul intégral

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$. Si f est une fonction, on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$. Lorsqu'on parle de l'intervalle $[a\,;b]$, il est sous-entendu que a et b sont deux réels tels que $a < b$.

I. — Intégrale d'une fonction continue

1) Unité d'aire

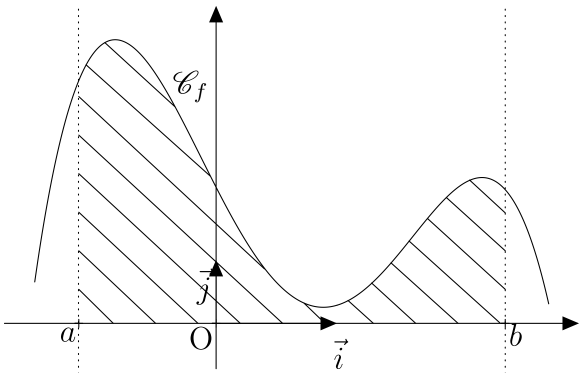
Le plan étant muni d'un repère, une unité est choisie en abscisse ($\|\vec{\imath}\|$) et une unité est choisie en ordonnée ($\|\vec{\jmath}\|$). Dès lors, le plan est naturellement munie d'une unité d'aire (u.a.) : il s'agit de $\|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$.



2) Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 1

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. On définit l'**intégrale de a à b de la fonction f** comme l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ i.e. la valeur, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarque 2.

1. On peut démontrer que l'intégrale ne dépend pas du repère choisi.
2. L'intégrale est le nombre d'unités d'aire que représente l'aire sous la courbe. En particulier, c'est un nombre réel sans unité.
3. La variable x dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est ce qu'on appelle une variable *muette* : on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable sans changer la valeur de l'intégrale. Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s$...

Convention 3. Si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$, on convient de poser, pour tout réel $c \in [a\,;b]$, $\displaystyle\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Exemple 4. Déterminer les intégrales suivantes à l'aide de représentations graphiques :

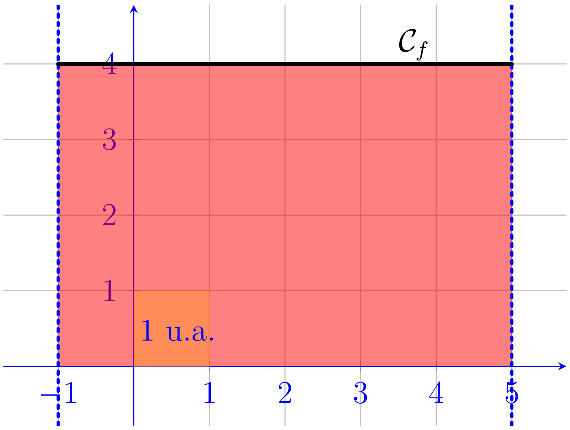
$$I_1 = \int_{-1}^{5} 4\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^3 2t+1\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Solution.

• Détermination de $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{5} 4\,\mathrm{d}x$.

On considère la fonction $f : x \longmapsto 4$ définie et continue sur $[-1\,;5]$.

C'est une fonction constante : sa courbe est un segment de droite horizontale et l'aire sous la courbe est l'aire d'un rectangle.

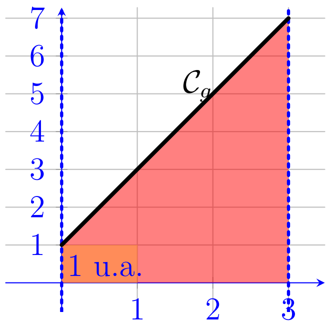


Ainsi, $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{5} 4\,\mathrm{d}x = 6 \times 4$ donc $\boxed{I_1 = 24}$.

• Détermination de $I_2 = \displaystyle\int_{0}^{3} 2t + 1\,\mathrm{d}t$.

On considère la fonction $g : t \longmapsto 2t + 1$ définie et continue sur $[0\,;3]$.

La fonction g est affine donc sa courbe est un segment de droite et l'aire à calculer est celle d'un trapèze rectangle.



Rappel : l'aire d'un trapèze est donné par $\dfrac{(b+B) \times h}{2}$ où b est la petite base, B est la grande base et h est la hauteur.

Ainsi, $I_2 = \displaystyle\int_{0}^{3} 2t + 1\,\mathrm{d}t = \dfrac{(1+7) \times 3}{2}$ soit $\boxed{I_2 = 12}$.

• Détermination de $I_3 = \displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u$.

On considère la fonction $h : u \longmapsto \sqrt{1-u^2}$ définie et continue sur $[0\,;1]$.

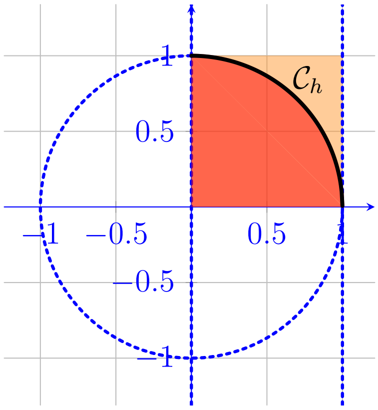
Remarquons que

$$M\,(x\,;y) \in \mathcal{C}_h \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y^2 = 1 - x^2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

On reconnaît l'équation du cercle de centre O et de rayon 1 : $x^2 + y^2 = 1$ dans un repère orthonormé. Mais, avec les conditions supplémentaires $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $y \geqslant 0$, on conclut que la courbe de h est un quart de cercle.

Ainsi, l'aire sous la courbe de h est l'aire d'un quart de disque de rayon 1 :



Ainsi, $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4} \times \pi \times 1^2$ i.e. $\boxed{I_3 = \dfrac{\pi}{4}}$.

3) Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition 5

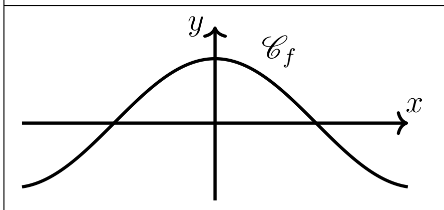
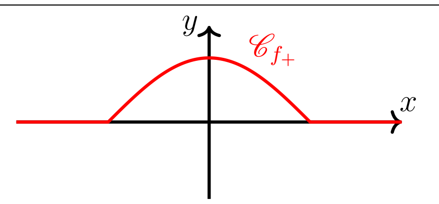
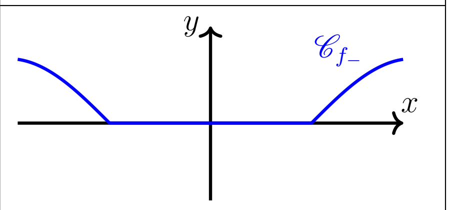
Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On définit

- la partie positive de f, notée f_+ par :

$$\forall x \in E \quad f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

- la partie négative de f, notée f_-, par :

$$\forall x \in E \quad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & \text{sinon} \end{cases} .$$

fonction f	partie positive f_+	partie négative f_-
		

Remarque 6. Si f est positive ou nulle sur E alors $f_+ = f$ et f_- est la fonction nulle sur E et si f est négative ou nulle sur E alors $f_- = -f$ et f_+ est la fonction nulle sur E.

Exemple 7. Déterminer les parties positives et négatives de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 3x + 2$ définie sur $I = [0\,;4]$.

Solution. Le discriminant du trinôme $X^2 - 3X + 2$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$ donc ce trinôme admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2.$$

Comme son coefficient dominant est $1 > 0$, on en déduit que $f(x) \geqslant 0$ si $x \in [0\,;1] \cup [2\,;4]$ et $f(x) < 0$ si $x \in]1\,;2[$. Ainsi, pour tout réel $x \in [0\,;4]$,

$$\boxed{f_+(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \in [0\,;1] \cup [2\,;4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

et

$$\boxed{f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0\,;1] \cup [2\,;4] \\ x^2 - 3x + 2 & \text{sinon} \end{cases}}.$$

Propriété 8

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

1. Les fonctions f_+ et f_- sont continues et positives sur I.
2. $f = f_+ - f_-$.

Démonstration. On vérifie facilement que, pour tout $x \in I$,

$$f_+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \qquad \text{et} \qquad f_-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)).$$

1. Comme f est continue sur I et comme la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, les fonctions $\boxed{f_+ \text{ et } f_- \text{ sont continues sur } I}$ par composition et somme. De plus, pour tout réel $x \in I$, $|f(x)| \geqslant f(x)$ et $|f(x)| \geqslant -f(x)$ donc $\boxed{f_+ \text{ et } f_- \text{ sont positives}}$.
2. Pour tout réel $x \in I$,

$$f_+(-x) - f_-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) + \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) = f(x)$$

donc $\boxed{f = f_+ - f_-}$.

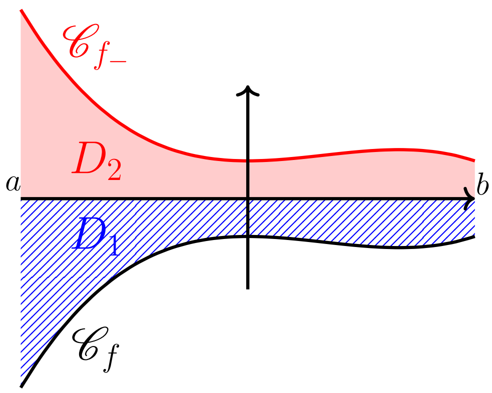
Définition 9

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On définit l'**intégrale de a à b de la fonction f**, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x.$$

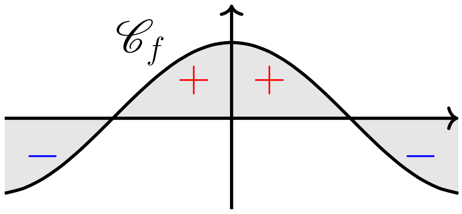
Remarque 10.

1. En particulier, si f est négative ou nulle sur $[a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x$ est l'opposé de l'aire sous la courbe de f_- i.e. l'opposé de l'aire au-dessus de la courbe de f :



$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) &= -\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\text{aire}(D_2) \\ &= -\text{aire}(D_1)\end{aligned}$$

2. Lorsqu'une fonction f change de signe, son intégrale peut s'interpréter graphiquement comme la somme des aires entre la courbe et l'axe des abscisse en comptant l'aire positivement quand la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses et négativement quand la courbe est en-dessous de l'axe des abscisses :



Exemple 11. Déterminer les intégrales suivantes à l'aide de représentations graphiques :

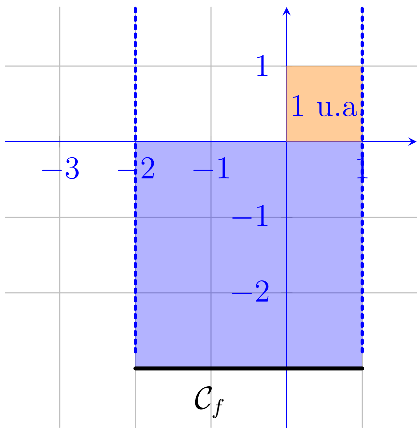
$$I_4 = \int_{-2}^{1} -3 \, \mathrm{d}x \qquad\qquad I_5 = \int_{-1}^{2} 3t - 2 \, \mathrm{d}t$$

Solution.

• Détermination de $I_4 = \displaystyle\int_{-2}^{1} -3 \, \mathrm{d}x$.

On considère la fonction $f : x \longmapsto -3$ définie et continue sur $[-2\,;1]$.

C'est une fonction constante : sa courbe est un segment de droite horizontale et l'aire sur la courbe est l'aire d'un rectangle.

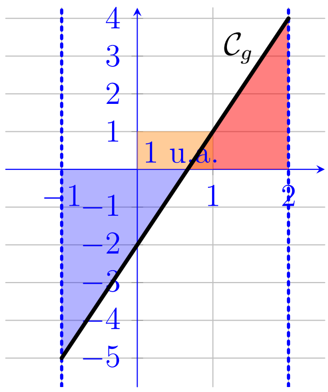


Ainsi, $I_1 = \displaystyle\int_{-2}^{1} -3 \, \mathrm{d}x = -3 \times 3$ donc $\boxed{I_3 = -9}$.

• Détermination de $I_5 = \displaystyle\int_{-1}^{2} 3t - 2 \, \mathrm{d}t$.

On considère la fonction $g : t \longmapsto 3t - 2$ définie et continue sur $[-1\,;2]$.

La fonction g est affine donc sa courbe est un segment de droite et on doit calculer les aires de deux triangles rectangles.



La fonction g change de signe en $\frac{2}{3}$ donc l'aire du triangle bleu est $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} - (-1)\right) \times 5 = \frac{25}{6}$ et l'aire du triangle rouge est $\frac{1}{2} \times \left(2 - \frac{2}{3}\right) \times 4 = \frac{8}{3}$. Ainsi, $I_5 = \int_{-1}^{2} 3t - 2\,\mathrm{d}t = -\frac{25}{6} + \frac{8}{3}$ soit $\boxed{I_5 = -\frac{3}{2}}$.

Remarque 12. On peut généraliser le calcul de I_1 et I_4 : l'intégrale d'une fonction constante égale à m sur un intervalle $[a\,;b]$ est égale à m fois la longueur de l'intervalle i.e. $\int_a^b m\,\mathrm{d}x = m(b-a)$.

Définition 13

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On définit l'**intégrale de b à a de f**, notée $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, par :

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 14. On a vu que $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ donc $\int_1^0 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}$

II. — Théorème fondamental de l'analyse

1) Primitives (Rappels)

a) Généralités

Définition 15

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Propriété 16

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f admet une primitive F sur I. Alors,

1. f admet une infinité de primitives sur I : ce sont toutes les fonctions de la forme $F + c$ où c est une constante réelle ;
2. si x_0 et y_0 sont deux réels tels que $x_0 \in I$, il existe une et une seule primitive G de f sur I telle sur $G(x_0) = y_0$.

Propriété 17

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. On suppose que f admet une primitive F sur I et que g admet une primitive G sur I. Alors, pour tous réel λ et μ, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

b) Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau suivant, a, k et α sont des réels et $n \in \mathbb{N}^*$.

Les primitives de	sont les fonctions	sur
$x \longmapsto a$	$x \longmapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \geqslant 2)$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(\lvert x\rvert) + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$x \longmapsto \mathrm{e}^x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \longmapsto \arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$

c) Formes particulières dont on sait déterminer les primitives

Dans le tableau suivant, u désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, a, b, c et α sont des réels tels que $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Les primitives de	sont les fonctions	sur tout intervalle J
$u'u^n$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	inclus dans I
$\dfrac{u'}{u^n}$ $(n \geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	inclus dans I et sur lequel u ne s'annule pas
$u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+c$	inclus dans I et sur lequel u est strictement positive
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)+c$	inclus dans I et sur lequel u ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	inclus dans I et sur lequel u est strictement positive
$u'\mathrm{e}^u$	e^u+c	inclus dans I
$u'\cos(u)$	$\sin(u)+c$	inclus dans I
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)+c$	inclus dans I
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)+c$	inclus dans I

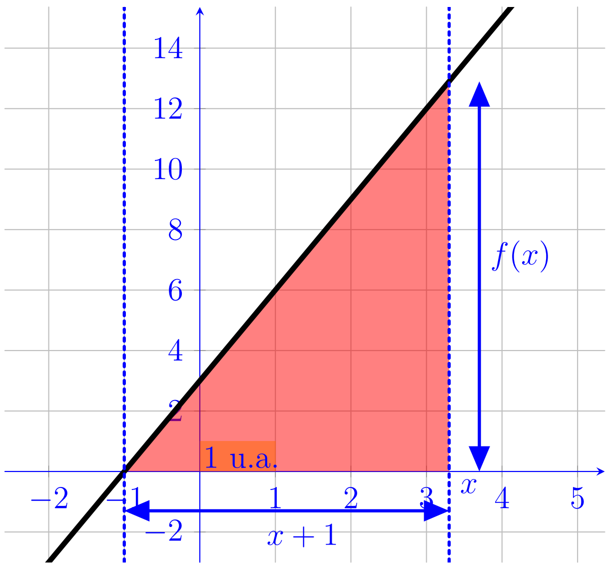
2) Théorème fondamental de l'analyse et conséquences

Exemple 18. Soit f la fonction $f : x \longmapsto 3x+3$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit x un réel. Calculer $I_x = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. On considère la fonction F qui à tout réel x associe I_x. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout réel x, $F'(x)$. Que constate-t-on ?

Solution.

1. La fonction f est une fonction affine. Sa courbe est donc une droite. De plus, f est croissante et s'annule en -1 donc f est négative sur $]-\infty\,;-1]$ et positive sur $[-1\,;+\infty[$. Ainsi, si $x \geqslant -1$, I_x est l'aire d'un triangle rectangle :

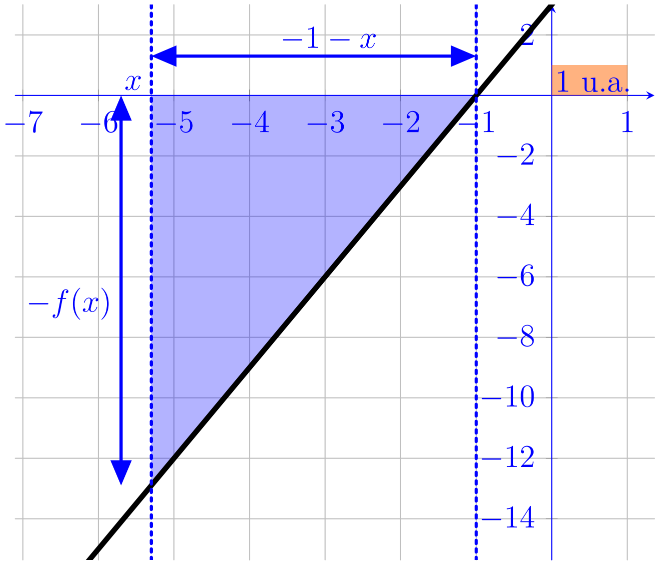


Dans ce cas, l'aire du triangle rouge est

$$\frac{(x+1)\times f(x)}{2} = \frac{(x+1)(3x+3)}{2} = \frac{3}{2}(x+1)^2$$

donc $I_x = \frac{3}{2}(x+1)^2$.

Si $x < -1$ alors $-I_x = -\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'opposé de l'aire d'un triangle rectangle donc I_x est l'aire du ce triangle rectangle :



Dans ce cas, l'aire du triangle bleu est

$$\frac{(-1-x)\times(-f(x))}{2} = \frac{(x+1)(3x+3)}{2} = \frac{3}{2}(x+1)^2$$

donc $I_x = \frac{3}{2}(x+1)^2$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ I_x = \frac{3}{2}(x+1)^2}$.

2. La fonction $F : x \longmapsto \frac{3}{2}(x+1)^2$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$F'(x) = \frac{3}{2}\times 2\times(x+1) = 3x+3.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \geqslant -1,\ F'(x) = f(x) \text{ donc } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Théorème 19. — Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors, la fonction F définie sur I par

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exemple 20. On considère la fonction $F : x \longmapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Que vaut $F(0)$?
2. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le signe de F sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. $F(0) = \int_0^0 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ donc $\boxed{F(0) = 0}$.
2. La fonction $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues donc, par le théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
   Ainsi, pour tout réel x, $F'(x) > 0$ donc $\boxed{F \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.
3. Comme F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0, $\underline{F(x) < 0 \text{ si } x < 0,\ F(0) = 0 \text{ et } F(x) > 0 \text{ si } x > 0}$.

Corollaire 21

Toute fonction continue f sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème fondamental de l'analyse.

Remarque 22. Le corollaire précédent est purement théorique. Ainsi, la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Pour autant, on peut démontrer qu'une telle primitive ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions de référence et des opérations usuelles sur les fonctions (addition, soustraction, multiplication, division et composition).

Corollaire 23

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b des éléments quelconques de I. Si F est une primitive de f sur I alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I et soit $G : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ définie sur I. D'après le théorème fondamental de l'analyse, G est la primitive de f sur I qui s'annule en a, il existe une constante c telle que $G = F + c$. En particulier, $G(a) = F(a) + c$. Or, $G(a) = 0$ donc $c = -F(a)$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) - F(a)$. En particulier, pour $x = b$, $G(b) = F(b) - F(a)$ i.e.

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)}.$$

Notation 24. Pour des raisons pratiques, on note $[F(t)]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$.

Exemple 25. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^{\ln(3)} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_{-1}^{1} u^5 - 2u\,\mathrm{d}u$$

$$I_4 = \int_1^{e} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad I_5 = \int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$I_7 = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\cos(x^3)\,\mathrm{d}x \qquad I_8 = \int_0^{-1} \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^4}\,\mathrm{d}x \qquad I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

Solution.

- $I_1 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) = -(-1) - (-(-1)) = 1 - 1$

donc $\boxed{I_1 = 0}$.

- $I_2 = \displaystyle\int_0^{\ln 3} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 3} 2 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 3} 2 \times \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}_{u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}}\,\mathrm{d}x = \left[2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right]_0^{\ln(3)} = 2\mathrm{e}^{\frac{\ln(3)}{2}} - 2\mathrm{e}^{\frac{0}{2}} =$

$2\mathrm{e}^{\ln(\sqrt{3})} - 2$ donc $\boxed{I_2 = 2\sqrt{3} - 2}$.

- $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^{1} u^5 - 2u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^6}{6} - u^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{6} - 1 - \left(\frac{1}{6} - 1\right)$ donc $\boxed{I_3 = 0}$.

- $I_4 = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}\ln(x)}_{u'(x)u(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^e = \frac{1}{2}(\ln(e))^2 - \frac{1}{2}(\ln(1))^2$

donc $\boxed{I_4 = \dfrac{1}{2}}$.

- $I_5 = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_e^{e^2} \underbrace{\frac{\frac{1}{t}}{\ln t}}_{\frac{u'(x)}{u(x)}}\,\mathrm{d}t = [\ln(|\ln(t)|)]_e^{e^2} = [\ln(\ln(t))]_e^{e^2}$ donc $I_5 =$

$\ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(e))$ i.e. $\boxed{I_5 = \ln(2)}$.

- $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{\frac{u'(x)}{u(x)}}\,\mathrm{d}x \underset{1+x^2>0}{=} \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1$ donc $I_6 =$

$\dfrac{1}{2}(\ln(2) - \ln(1))$ i.e. $\boxed{I_6 = \dfrac{1}{2}\ln(2)}$.

- $I_7 = \displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\cos(x^3)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \frac{1}{3} \times 3x^2\cos(x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \underbrace{3x^2\cos(x^3)}_{u'(x)\cos(u(x))}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\sin(x^3)\right]_0^{\sqrt[3]{\pi}}$

donc $I_7 = \dfrac{1}{3}(\sin(\pi) - \sin(0))$ i.e. $\boxed{I_7 = 0}$.

- $I_8 = \displaystyle\int_0^{-1} \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^{-1} \frac{1}{2}\frac{2(x+1)}{(x^2+2x+2)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{-1} \underbrace{\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^4}}_{\frac{u'(x)}{u^4(x)}}\,\mathrm{d}x$ donc

$I_8 = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{3(x^2+2x+2)^3}\right]_0^{-1} = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{3\times 1^3} - \left(-\dfrac{1}{3\times 2^3}\right)\right] = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{24}\right]$ i.e. $\boxed{I_6 = -\dfrac{7}{48}}$.

- $I_9 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}}_{\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}}\,\mathrm{d}x = [\arctan(\sin(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} = \arctan\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \arctan(\sin(0))$ donc

$I_9 = \arctan(1) - \arctan(0)$ i.e. $\boxed{I_9 = \dfrac{\pi}{4}}$.

III. — Propriétés de l'intégrale

1) Linéarité de l'intégrale

Propriété 26. — Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments quelconques de I et k un réel quelconque. Alors, pour tous réels λ et μ,

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Considérons une primitives F de f sur I et une primitive G de g sur I. Alors, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu f$ sur I donc

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x &= [\lambda F + \mu G]_a^b = (\lambda F + \mu G)(b) - (\lambda F + \mu G)(a) \\ &= \lambda F(b) + \mu G(b) - \lambda F(a) - \mu G(a) = \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a))\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

⚠ Il faut bien s'assurer que λ et μ sont des réels indépendants de la variable d'intégration.

Exemple 27.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u$.
2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^\pi \cos^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Calculer $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Solution.

1. Par linéarité de l'intégrale, on a
$$I = \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u = I = \int_0^1 3\,\mathrm{d}u - 4\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u$$
et donc, grâce à l'exemple 4 et à la remarque 12, $I = 3 \times (1-0) - 4 \times \frac{\pi}{4}$ donc $\boxed{I = 3 - \pi}$.
2. De même,
$$J = \int_0^\pi \cos^2 t\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos^2 t + \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}t = 1 \times (\pi - 0)$$
donc $J = \pi$.
3. Par linéarité de l'intégrale,
$$\begin{aligned}K &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= [\arctan(x)]_0^1 + \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) + \frac{1}{2}(\ln(2) - \ln(1))\end{aligned}$$
et donc $\boxed{K = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln(2)}{2}}$.

2) Intégration et relation d'ordre

Propriété 28

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tels que $a \leqslant b$. Alors,

1. Positivité de l'intégrale
   Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
2. Croissance de l'intégrale
   Si $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Ces inégalités ne sont vraies que si $a \leqslant b$.

Démonstration.

1. 1ère démonstration. Comme f est continue et positive, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est une aire donc c'est un nombre positif.
   2ème démonstration. Soit F est une primitive de f sur I. Alors, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Or, par définition, $F' = f$ est positive donc F est croissante sur I. Ainsi, comme $a \leqslant b$, $F(a) \leqslant F(b)$ et donc $F(b) - F(a) \geqslant 0$.
2. Considérons la fonction $h : x \longmapsto f(x) - g(x)$ définie sur I. Comme f et g sont continues sur I, h est également continue sur I. De plus, comme $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$, $h(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\,;b]$ donc, d'après **1.**, $\displaystyle\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Or, par linéarité,
   $$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
   donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ et ainsi $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$.

Exemple 29.

1. Comparer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. On considère la suite (I_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.
   a. Calculer I_0, I_1, I_2 et I_3.
   b. Démontrer que (I_n) est décroissante et minorée. Que peut-on en déduire ?
   c. Déterminer la limite de (I_n).

1. Comme on intègre deux fonctions sur le même intervalle, il suffit de comparer les fonctions pour comparer les intégrales.
   Or, pour tout $t \in [0\,;1]$, $t^2 \leqslant t$ donc, par croissance de la fonction exp, $\mathrm{e}^{t^2} \leqslant \mathrm{e}^t$. Dès lors, par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ i.e. $\boxed{I_2 \leqslant I_1}$.
2. **a.** $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 1\,\mathrm{d}t = 1 \times \left(\frac{\pi}{3} - 0\right)$ donc $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{3}}$.
   $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - (-\cos(0)) = -\frac{1}{2} + 1$ donc $\boxed{I_1 = \frac{1}{2}}$.

$I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Par calculer cette intégrale, nous allons utiliser les formules de duplication. On sait que, pour tout réel t, $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ donc $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$. Ainsi,

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - 0\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

donc

$$I_2 = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin(0)\right] = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

soit $\boxed{I_2 = \dfrac{\pi - 3\sqrt{3}}{6}}$.

$I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3(t)\,\mathrm{d}t$.

<u>1ère méthode</u>. Pour tout réel t, $\sin^3(t) = \sin(t) \times \sin^2(t) = \sin(t)\left[1 - \cos^2(t)\right]$ donc

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(t)\left[1 - \cos^2(t)\right]\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(t) - \sin(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{(-\sin(t))\cos^2(t)}_{u'(t)u^2(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{1}{3}\cos^3(t)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - (-\cos(0)) + \frac{1}{3}\cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{3}\cos^3(0) \\
&= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{I_3 = \dfrac{5}{24}}$.

<u>2ème méthode</u>. D'après les formules d'Euler, pour tout réel t, $\sin(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}$ donc, en utilisant la formule du binôme de Newton (pour tous complexes a et b, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$),

$$\begin{aligned}
\sin^3(t) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^3}{(2\mathrm{i})^3} = \frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^3 - 3(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^2 - (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^3}{-8\mathrm{i}} \\
&= -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3t)} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(3t)}\right) = -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3t)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(3t)} - 3\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(2\mathrm{i}\sin(3t) - 3 \times 2\mathrm{i}\sin(t)\right)
\end{aligned}$$

soit finalement $\sin^3(t) = \dfrac{3}{4}\sin(t) - \dfrac{1}{4}\sin(3t)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{12}\cos(3t)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= -\frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{12}\cos(\pi) - \left(-\frac{3}{4}\cos(0) + \frac{1}{12}\cos(0)\right) \\
&= -\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{I_3 = \dfrac{5}{24}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^{n+1}(t) - \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(t) \times \sin^n(t) - \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin(t) - 1) \times \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$, $\sin(t) \geqslant 0$ donc $\sin^n(t) \geqslant 0$ et $\sin(t) \leqslant 1$ donc $\sin(t) - 1 \leqslant 0$.
Ainsi, $(\sin(t) - 1) \times \sin^n(t) \leqslant 0$ et donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin(t) - 1) \times \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.
On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ donc $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$.
De plus, on a déjà justifié que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$, $\sin^n(t) \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale, donc $I_n \geqslant 0$. Ainsi, $\boxed{(I_n) \text{ est minorée par } 0}$.
La suite (I_n) est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(I_n) \text{ converge}}$.

c. Comme la fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$, pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$, $\sin(0) \leqslant \sin(t) \leqslant \sin(\frac{\pi}{3})$ i.e. $0 \leqslant \sin(t) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc, pour tout $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \sin^n(t) \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.
Par positivité et croissance de l'intégrale, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Or, $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et ainsi, par le théorème d'encadrement, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

Propriété 30. — Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Pour tout réel $x \in [a\,;b]$, $f(x) \leqslant |f(x)|$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

De plus, pour tout réel $x \in [a\,;b]$, $-f(x) \leqslant |f(x)|$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

i.e., par linéarité,

$$-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Or, $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$ est égal à l'un des deux nombres $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ donc

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}.$$

Exemple 31. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{2024} \frac{\sin(x)}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \left|\int_0^1 \frac{\sin(x)}{n+x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{\sin(x)}{n+x}\right|\mathrm{d}x.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [1\,;2024]$,

$$\left|\frac{\sin(x)}{n+x}\right| = \frac{|\sin(x)|}{|n+x|} \leqslant \frac{1}{n+x} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \left|\int_0^1 \frac{\sin(x)}{n+x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}(1-0) = \frac{1}{n+1}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\int_1^{2024} \frac{\sin(x)}{n+x}\,\mathrm{d}x\right| = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{2024} \frac{\sin(x)}{n+x}\,\mathrm{d}x = 0}$.

3) Valeur moyenne d'une fonction

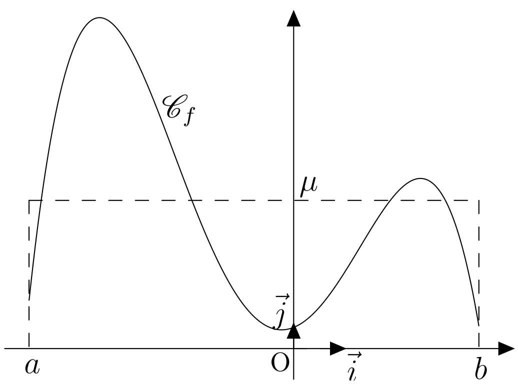
Définition 32

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors, le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est appelé la **valeur moyenne** de f sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Interprétation graphique dans le cas d'une fonction positive

Par définition, $\mu \times (b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ce qui revient à dire que μ est la hauteur du rectangle de base $b-a$ qui a la même aire que l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b. Autrement dit, μ est la constante telle que

$$\int_a^b \mu\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Exemple 33.

1. Calculer la valeur moyenne d'une fonction constante sur un intervalle $[a\,;b]$.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f : x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{x^3}$ sur $[0\,;1]$.

Solution.

1. Soit f une fonction constante égale à m sur $[a\,;b]$. Alors, la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b m\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\times m(b-a)$$

donc $\boxed{\mu = m}$.

2. La valeur moyenne de f sur $[0\,;1]$ est

$$\mu = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 3x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\mathrm{e}^{x^3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{1^3}-\mathrm{e}^{0^3}\right)$$

donc $\boxed{\mu = \dfrac{e-1}{3}}$.

Propriété 34. — Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Si m est un minorant de f sur $[a\,;b]$ et si M est un majorant de f sur $[a\,;b]$ (autrement dit, si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a\,;b]$) alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

En d'autres termes, la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est comprise entre m et M.

⚠ Ces inégalités ne sont vraies que si $a \leqslant b$.

Démonstration. Pour tout $x \in [a\,;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x$$

et donc

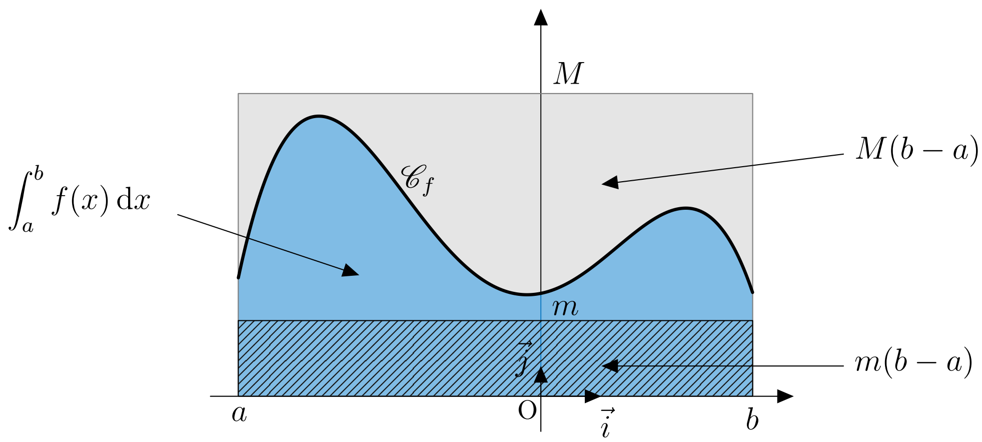
$$\boxed{m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)}.$$

Comme $a < b$, $b-a > 0$ donc en divisant par $b-a$, il vient

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$$

i.e. $\boxed{m \leqslant \mu \leqslant M}$.

Interprétation graphique dans le cas d'une fonction positive



Exemple 35. Démontrer que $\frac{1}{e} \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \leqslant 1$.

Solution. Soit $t \in [0\,;1]$. Alors, $0 \leqslant t \leqslant 1$ donc, par croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$, $0 \leqslant t^2 \leqslant 1$. Dès lors, en multipliant par $-1 < 0$, $-1 \leqslant -t^2 \leqslant 0$ et, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^0$ i.e. $\frac{1}{e} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant 1$. Par les inégalité de la moyenne, on en déduit que

$$\frac{1}{e} \times (1-0) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \leqslant 1 \times (1-0) i.e. \boxed{\frac{1}{e} \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \leqslant 1}.$$

Remarque 36. Si f est une fonction décroissante sur un intervalle $[a\,;b]$ alors les inégalités de la moyenne assurent que

$$(b-a)f(b) \leqslant \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \leqslant (b-a)f(a).$$

4) Relation de Chasles

Propriété 37

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a, b et c trois réels quelconques appartenant à I. Alors,

$$\int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Alors,

$$\int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Remarque 38. On peut généraliser cette propriété par récurrence : si a_1, a_2, ..., a_n sont des éléments de I alors

$$\int_{a_1}^{a_n} f(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Exemple 39. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n \geqslant \ln(n+1)$ puis déterminer la limite de H_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution.

1. Comme la fonction inverse est décroissante sur $[k\,;k+1]$, pour tout $t \in [k\,;k+1]$, $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ donc, d'après les inégalités de la moyenne, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \leqslant (k+1-k) \times \frac{1}{k}$ c'est-à-dire

$$\boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}}.$$

2. On en déduit que

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc, par la relation de Chasles,

$$H_n \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(1)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{H_n \geqslant \ln(n+1)}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on déduit du théorème de comparaison que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty}.$$

IV. — Autres méthodes de calcul d'intégrales

1) Intégration par parties

Propriété 40. — Formule d'intégration par parties

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Alors, pour tous réels a et b appartenant à I,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Solution. Comme u et v sont dérivables sur I, la fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$. Dès lors, on a $uv' = (uv)' - u'v$.

Comme u, v, u' et v' sont continues sur $[a\,;b]$, il en est de même de uv', uv et $u'v$ donc

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x) - u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

et, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or, par définition, uv est une primitive de $(uv)'$ donc

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Remarque 41. La formule d'intégration par parties est intéressante si :

1. on ne sait pas trouver directement une primitive de uv' sur I ;
2. on cherche à intégrer un produit de deux fonctions sur I dont une (au moins) possède une primitive connue sur I ;
3. la dérivée de u est « plus simple » que u et/ou on sait déterminer une primitive de $u'v$ sur I.

Méthode 42 : Choix de la fonction à primitiver et de celle à dériver

Voici quelques pistes pour que la nouvelle intégrale à calculer soit plus simple :

1. Les fonctions ln et arctan ont pour dérivées des fonctions rationnelles (quotients de polynômes), il est donc a priori intéressant de les dériver.
2. Si P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ alors P' est un polynôme de degré $n-1$. On va donc privilégier la dérivation pour les polynômes.
3. Les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}$, $x \longmapsto \cos(ax+b)$, $x \longmapsto \sin(ax+b)$, $x \longmapsto (ax+b)^\alpha$ avec $a \neq 0$ et $\alpha \neq -1$ ont des dérivées ou des primitives de même forme, on peut donc indifféremment les primitiver ou les dériver.

Exemple 43.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.
2. Déterminer une primitive de ln sur $]0\,;+\infty[$.
3. Calculer $J = \displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.
4. Calculer $K = \displaystyle\int_0^{e-1} \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$.

Solution.

1. Posons $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ de telle sorte que $u' : x \longmapsto 1$ et $v' : x \longmapsto \mathrm{e}^x$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;1]$ donc, grâce à la formule d'intégration par parties,
$$\begin{aligned} I = \int_0^1 x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= e - 0 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= e - [\mathrm{e}^x]_0^1 = e - (e-1) \end{aligned}$$
donc $\boxed{I = 1}$.
2. Par le théorème fondamental de l'analyse, l'unique primitive de ln sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1 est
$$F : x \longmapsto \int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$
Soit $x > 0$. On va calculer $F(x)$ par intégration par parties en écrivant
$$F(x) = \int_1^x \ln(t) \times 1 \,\mathrm{d}t$$
On considère les fonctions $u : t \longmapsto \ln(t)$ et $v : t \longmapsto t$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto \frac{1}{t}$ et $v' : t \longmapsto 1$. Ainsi, u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;x]$ donc, grâce à la formule d'intégration par parties :
$$\begin{aligned} F(x) = \int_1^x \ln(t) \times 1 \,\mathrm{d}t &= [\ln(t) \times t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t \,\mathrm{d}t \\ &= \ln(x) \times x - \ln(1) \times 1 - \int_1^x 1 \,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(x) - 1 \times (x-1). \end{aligned}$$
On conclut que la primitive de ln sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1 est $\boxed{F : x \longmapsto x\ln(x) - x + 1}$.
Remarque. Une autre primitive de ln sur $]0\,;+\infty[$ est la fonction $x \longmapsto x\ln(x) - x$.

3. Posons $u : x \longmapsto \sin(x)$ et $v : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ de telle sorte que $u' : x \longmapsto \cos(x)$ et $v' : x \longmapsto \mathrm{e}^x$. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} J = \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= [\sin(x)\mathrm{e}^x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^\pi \cos(x)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

car $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$.

Procédons à une seconde intégration par parties pour cette nouvelle intégrale en considérant $u_1 : x \longmapsto \cos(x)$ et $v_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ de telle sorte que $u' : x \longmapsto -\sin(x)$ et $v' : x \longmapsto \mathrm{e}^x$. Le fonctions u_1 et v_1 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi]$ donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(x)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= [\cos(x)\mathrm{e}^x]_0^\pi - \int_0^\pi -\sin(x)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= \cos(\pi)\mathrm{e}^\pi - \cos(0)\mathrm{e}^0 + \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^\pi - 1 + J \end{aligned}$$

On a donc $J = -(-\mathrm{e}^\pi - 1 + J) = \mathrm{e}^\pi + 1 - J$ i.e. $2J = \mathrm{e}^\pi + 1$ et ainsi $\boxed{J = \dfrac{\mathrm{e}^\pi + 1}{2}}$.

4. Écrivons, comme dans l'exemple 3,

$$K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) \times 1 \,\mathrm{d}t$$

et considérons $u : t \longmapsto \ln(1+t)$ et $v : t \longmapsto t$ de telle sorte que $u' : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t}$ et $v' : t \longmapsto 1$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,; e-1]$ donc , en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} K &= [\ln(1+t) \times t]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{1}{1+t} \times t \,\mathrm{d}t \\ &= \ln(1+e-1) \times (e-1) - \ln(1) \times 0 - \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} \,\mathrm{d}t \quad = e - 1 - \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comment calculer $L = \displaystyle\int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} \,\mathrm{d}t$?

Une astuce consiste à remarquer que

$$L = \int_0^{e-1} \frac{t+1-1}{1+t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{e-1} \frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{e-1} 1 - \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}t = [t - \ln(1+t)]_0^{e-1}$$

donc

$$L = e - 1 - \ln(1+e-1) - (0 - \ln(1)) = e - 1 - 1 = e - 2.$$

Finalement, on conclut que $K = e - 1 - (e-2)$ i.e. $\boxed{K = 1}$.

En fait, on aura pu être plus malin dans l'intégration par parties sur le choix de la primitive de $v' : t \longmapsto 1$. On a choisi $v : t \longmapsto t$ mais on aurait eu intérêt à plutôt prendre $v : t \longmapsto t + 1$. En effet, avec ce choix, l'intégration par parties devient :

$$\begin{aligned} K &= [\ln(1+t) \times (t+1)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{1}{1+t} \times (t+1) \,\mathrm{d}t \\ &= \ln(1+e-1) \times (e-1+1) - \ln(1) \times (0+1) - \int_0^{e-1} 1 \,\mathrm{d}t \\ &= e - 1 \times (e-1) \end{aligned}$$

et on obtient directement $\boxed{K = 1}$.

2) Changement de variable

Propriété 44. — Formule de changement de variable

Soit u une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I telle que, pour tout $t \in I$, $u(t)$ appartient à un intervalle J. Pour toute fonction f continue sur J et pour tous réels a et b appartenant à I,

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit f une fonction continue sur J et a et b deux éléments de J. Par définition, $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ appartiennent à J. De plus, par théorème, f admet une primitive F sur J. Dès lors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a).$$

Mais, comme F et φ sont dérivables respectivement sur J et I, par composition, $F \circ \varphi$ est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$, $(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Dès lors, comme f est continue sur J et φ et φ' sont continues sur I, $(F \circ \varphi)'$ est continue sur I donc

$$(F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, on conclut que

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Remarque 45. Un changement de variable consiste en pratique à poser $x = \varphi(t)$. Lorsque φ est bijective, on peut également le donner sous la forme $t = \varphi^{-1}(x)$, ce qui revient en fait à lire la formule de droite à gauche plutôt que de gauche à droite.

Exemple 46. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$, $x = \sin(t)$.
2. $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x$, $x = \cos(t)$.
3. $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, $t = \sqrt{x}$.

Solution.

1. La fonction $\varphi = \sin$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0\,; \frac{\pi}{2}\right]$ De plus, $\sin(0) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ donc,

par la formule de changement de variable,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)} \times \cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)} \times \cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car, pour tout } t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ \cos(t) \geqslant 0 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin(\pi) - 0 - \frac{1}{2}\sin(0)\right)
\end{aligned}$$

soit $\boxed{I_1 = \frac{\pi}{4}}$.

2. La fonction $\varphi = \cos$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{3}\right]$. De plus, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ donc, par la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\cos(\frac{\pi}{3})}^{\cos(\frac{\pi}{4})} \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{1-\cos^2(t)}} \times (-\sin(t))\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\sin^2(t)}} \times \sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2(t)\sin(t)} \times \sin(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car, pour tout } t \in \left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{3}\right],\ \sin(t) > 0 \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = [\tan(t)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}$$

soit $\boxed{I_2 = \sqrt{3}-1}$.

3. Poser $t = \sqrt{x}$ revient à poser $x = t^2$. Or, la fonction $\varphi : t \longmapsto t^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[1\,;\sqrt{2}\right]$ avec $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(\sqrt{2}) = 2$ donc

$$I_3 = \int_{1^2}^{\sqrt{2}^2} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\ln(t^2)}{t} \times 2t\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{2}} 2\ln(t)\,\mathrm{d}t = 4\int_1^{\sqrt{2}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, on a vu dans l'exemple 43 qu'une primitive de ln sur $[0\,;+\infty[$ est $t \longmapsto t\ln(t) - t$ donc

$$I_3 = 4\,[t\ln(t) - t]_1^{\sqrt{2}} = 4\left(\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}) - \sqrt{2} - (1\ln(1) - 1)\right) = 4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}) - 4\sqrt{2} + 4$$

soit $\boxed{I_4 = 2\sqrt{2}\ln(2) + 4 - 4\sqrt{2}}$.

Corollaire 47

Soit a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $[-a\,;a]$.

1. Si f est une fonction paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Si f est une fonction impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Solution. Par la relation de Chasles,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Considérons la fonction $\varphi : t \longmapsto -t$ définie sur $[-a\,;a]$. Alors, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-a\,;a]$ et, pour tout réel $t \in [-a\,;a]$, $\varphi(t) \in [-a\,;a]$. De plus, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(a) = -a$ donc, par la formule de changement de variable,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(0)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^0 f(-t)\times(-1)\times\mathrm{d}t = -\int_a^0 f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Si f est paire alors, pour tout $x \in [-a\,;a]$, $f(-x) = f(x)$ donc $\displaystyle\int_0^a f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ et l'égalité précédente donne

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

2. Si f est impaire alors, pour tout $x \in [-a\,;a]$, $f(-x) = -f(x)$ donc, par linéarité, $\displaystyle\int_0^a f(-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ et l'égalité précédente donne

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0}.$$

3) Méthode des rectangles

Il n'est pas toujours possible de calculer la valeur d'une intégrale avec les propriétés vues précédemment. À défaut d'une valeur exacte, on peut déterminer des valeurs approchées à l'aide de différentes méthodes. L'une d'entre elles et la méthode des rectangles.

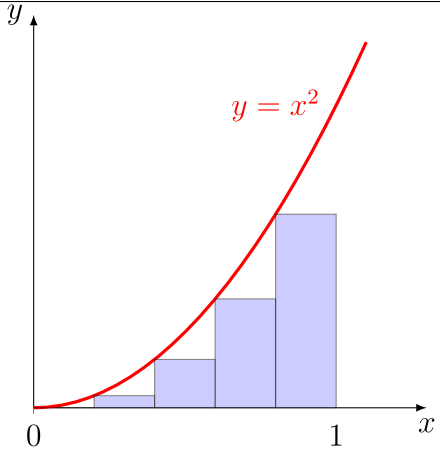
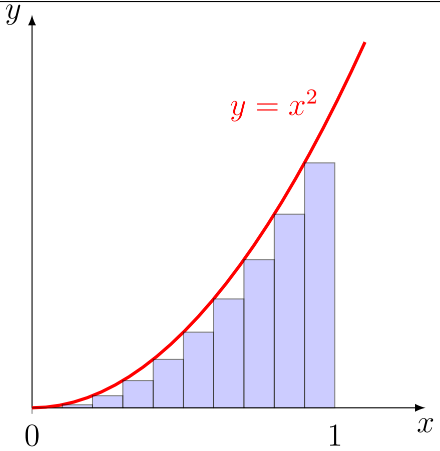
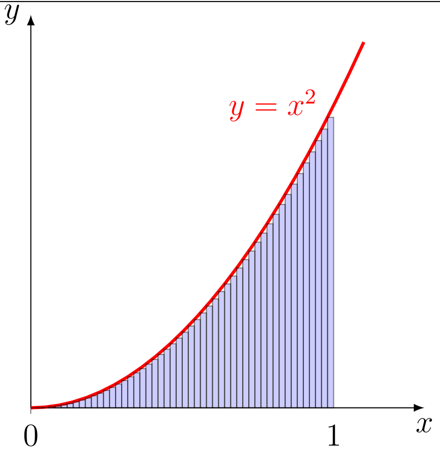
L'idée de cette méthode, dans le cas d'une fonction positive, est d'approcher l'aire sous la courbe par la somme des aires de rectangles que l'on sait facilement calculer. À intervalle régulier, on dessine le rectangle dont la longueur correspond à la « hauteur de la courbe ». On obtient alors une valeur approchée de l'intégrale, en additionnant les aires des tous les rectangles obtenus.

Considérons, par exemple, $I = \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$. Ici, on sait calculer la valeur exacte de I :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0{,}333.$$

Pour approcher la valeur de I par la méthode des rectangle, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on découpe l'intervalle $[0\,;1]$ en n intervalles de longueur $\dfrac{1}{n}$ et, sur chaque intervalle $\left[\dfrac{k}{n}\,;\dfrac{k+1}{n}\right]$, on considère le rectangle de hauteur $\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$. L'aire d'un tel rectangle est $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{k^2}{n^2} = \dfrac{k^2}{n^3}$ donc la somme des aires des rectangles est $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3}$.

Comme on peut le constater sur les figures ci-dessous, plus les rectangles sont nombreux, plus la somme de leurs aires est proche de la valeur de l'intégrale recherchée.

$n = 5$	$n = 10$	$n = 50$
 $S_5 = 0{,}24$	 $S_{10} = 0{,}285$	 $S_{50} = 0{,}3234$

On peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1) \times n \times (2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

donc $S_n \sim \dfrac{2n^2}{6n^2} \sim \dfrac{1}{3}$ et ainsi $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$.