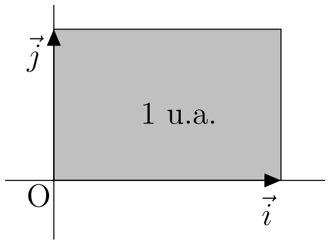
♦ Chapitre 20. Calcul intégral

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$. Si f est une fonction, on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$. Lorsqu'on parle de l'intervalle $[a\,;b]$, il est sous-entendu que a et b sont deux réels tels que $a < b$.

I. — Intégrale d'une fonction continue

1) Unité d'aire

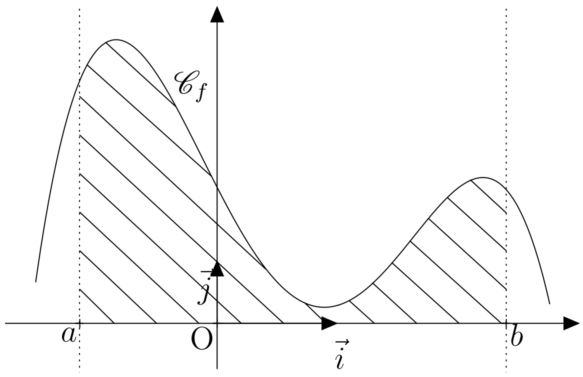
Le plan étant muni d'un repère, une unité est choisie en abscisse ($\|\vec{i}\|$) et une unité est choisie en ordonnée ($\|\vec{j}\|$). Dès lors, le plan est naturellement munie d'une unité d'aire (u.a.) : il s'agit de $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$.



2) Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 1

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. On définit l'**intégrale de a à b de la fonction f** comme l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ i.e. la valeur, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarque 2.

1. On peut démontrer que l'intégrale ne dépend pas du repère choisi.
2. L'intégrale est le nombre d'unités d'aire que représente l'aire sous la courbe. En particulier, c'est un nombre réel sans unité.
3. La variable x dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est ce qu'on appelle une variable *muette* : on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable sans changer la valeur de l'intégrale. Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s$...

Convention 3. Si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$, on convient de poser, pour tout réel $c \in [a\,;b]$, $\displaystyle\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Exemple 4. Déterminer les intégrales suivantes à l'aide de représentations graphiques :

$$I_1 = \int_{-1}^{5} 4\,\mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^3 2t + 1\,\mathrm{d}t \qquad I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u$$

3) Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition 5

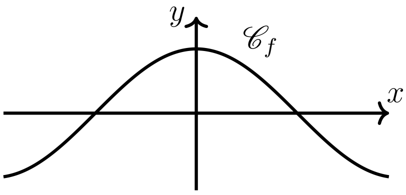
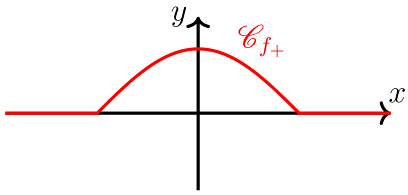
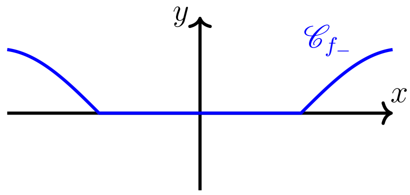
Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On définit

- la partie positive de f, notée f_+ par :

$$\forall x \in E \quad f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ;$$

- la partie négative de f, notée f_-, par :

$$\forall x \in E \quad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x) & \text{sinon} \end{cases} .$$

fonction f	partie positive f_+	partie négative f_-
		

Remarque 6. Si f est positive ou nulle sur E alors $f_+ = f$ et f_- est la fonction nulle sur E et si f est négative ou nulle sur E alors $f_- = -f$ et f_+ est la fonction nulle sur E.

Exemple 7. Déterminer les parties positives et négatives de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 3x + 2$ définie sur $I = [0\,;4]$.

Propriété 8

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

1. Les fonctions f_+ et f_- sont continues et positives sur I.

2. $f = f_+ - f_-$.

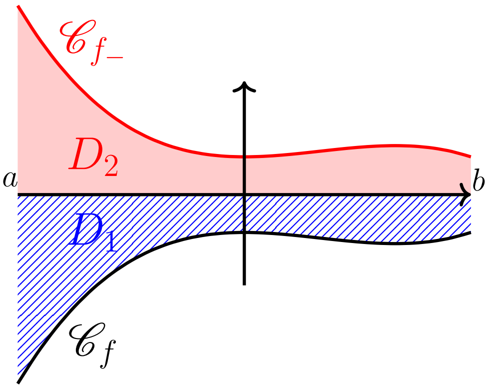
Définition 9

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On définit l'**intégrale de a à b de la fonction** f, notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x.$$

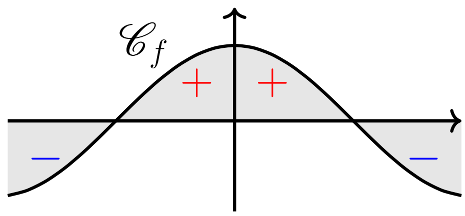
Remarque 10.

1. En particulier, si f est négative ou nulle sur $[a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x$ est l'opposé de l'aire sous la courbe de f_- i.e. l'opposé de l'aire au-dessus de la courbe de f :



$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) &= -\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\mathrm{aire}(D_2)\\ &= -\mathrm{aire}(D_1)\end{aligned}$$

2. Lorsqu'une fonction f change de signe, son intégrale peut s'interpréter graphiquement comme la somme des aires entre la courbe et l'axe des abscisse en comptant l'aire positivement quand la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses et négativement quand la courbe est en-dessous de l'axe des abscisses :



Exemple 11. Déterminer les intégrales suivantes à l'aide de représentations graphiques :

$$I_4 = \int_{-2}^{1} -3\,\mathrm{d}x \qquad\qquad I_5 = \int_{-1}^{2} 3t - 2\,\mathrm{d}t$$

Remarque 12. On peut généraliser le calcul de I_1 et I_4 : l'intégrale d'une fonction constante égale à m sur un intervalle $[a\,;b]$ est égale à m fois la longueur de l'intervalle i.e. $\displaystyle\int_a^b m\,\mathrm{d}x = m(b-a)$.

Définition 13

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. On définit l'**intégrale de b à a de f**, notée $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, par :

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 14. On a vu que $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ donc $\displaystyle\int_1^0 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}$

II. — Théorème fondamental de l'analyse

1) Primitives (Rappels)

a) Généralités

Définition 15

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Propriété 16

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f admet une primitive F sur I. Alors,

1. f admet une infinité de primitives sur I : ce sont toutes les fonctions de la forme $F + c$ où c est une constante réelle ;
2. si x_0 et y_0 sont deux réels tels que $x_0 \in I$, il existe une et une seule primitive G de f sur I telle sur $G(x_0) = y_0$.

Propriété 17

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. On suppose que f admet une primitive F sur I et que g admet une primitive G sur I. Alors, pour tous réel λ et μ, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

b) Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau suivant, a, k et α sont des réels et $n \in \mathbb{N}^*$.

Les primitives de	sont les fonctions	sur
$x \longmapsto a$	$x \longmapsto ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \geqslant 2)$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(\lvert x\rvert) + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$x \longmapsto \mathrm{e}^x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \longmapsto \arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$

c) Formes particulières dont on sait déterminer les primitives

Dans le tableau suivant, u désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, a, b, c et α sont des réels tels que $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Les primitives de	sont les fonctions	sur tout intervalle J
$u'u^n$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	inclus dans I
$\dfrac{u'}{u^n}$ $(n \geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	inclus dans I et sur lequel u ne s'annule pas
$u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + c$	inclus dans I et sur lequel u est strictement positive
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert) + c$	inclus dans I et sur lequel u ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	inclus dans I et sur lequel u est strictement positive
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + c$	inclus dans I
$u'\cos(u)$	$\sin(u) + c$	inclus dans I
$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + c$	inclus dans I
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u) + c$	inclus dans I

2) Théorème fondamental de l'analyse et conséquences

Exemple 18. Soit f la fonction $f : x \longmapsto 3x + 3$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit x un réel. Calculer $I_x = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. On considère la fonction F qui à tout réel x associe I_x. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout réel x, $F'(x)$. Que constate-t-on ?

Théorème 19. — Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors, la fonction F définie sur I par

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exemple 20. On considère la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Que vaut $F(0)$?

2. Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire le signe de F sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 21

Toute fonction continue f sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Remarque 22. Le corollaire précédent est purement théorique. Ainsi, la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Pour autant, on peut démontrer qu'une telle primitive ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions de référence et des opérations usuelles sur les fonctions (addition, soustraction, multiplication, division et composition).

Corollaire 23

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b des éléments quelconques de I. Si F est une primitive de f sur I alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Notation 24. Pour des raisons pratiques, on note $[F(t)]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$.

Exemple 25. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^{\ln(3)} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_{-1}^{1} u^5 - 2u\,\mathrm{d}u$$

$$I_4 = \int_1^{e} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad I_5 = \int_e^{e^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \qquad I_6 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$I_7 = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\cos(x^3)\,\mathrm{d}x \qquad I_8 = \int_0^{-1} \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^4}\,\mathrm{d}x \qquad I_9 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

III. — Propriétés de l'intégrale

1) Linéarité de l'intégrale

Propriété 26. — Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments quelconques de I et k un réel quelconque. Alors, pour tous réels λ et μ,

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

⚠ Il faut bien s'assurer que λ et μ sont des réels indépendants de la variable d'intégration.

Exemple 27.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u$.
2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Calculer $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

2) Intégration et relation d'ordre

Propriété 28

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tels que $a \leqslant b$. Alors,

1. **Positivité de l'intégrale**
   Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
2. **Croissance de l'intégrale**
   Si $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

⚠ Ces inégalités ne sont vraies que si $a \leqslant b$.

Exemple 29.

1. Comparer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. On considère la suite (I_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.
   - **a.** Calculer I_0, I_1 et I_2.
   - **b.** Démontrer que (I_n) est décroissante et minorée. Que peut-on en déduire ?
   - **c.** Déterminer la limite de (I_n).

Propriété 30. — Inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 31. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{2024} \frac{\sin(x)}{n+x}\,\mathrm{d}x$.

3) Valeur moyenne d'une fonction

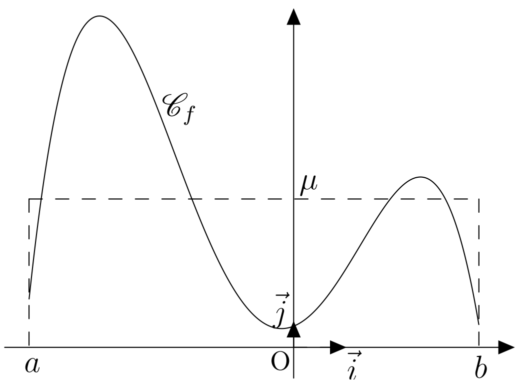
Définition 32

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Alors, le réel $\mu = \displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est appelé la **valeur moyenne** de f sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Interprétation graphique dans le cas d'une fonction positive

Par définition, $\mu \times (b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ce qui revient à dire que μ est la hauteur du rectangle de base $b-a$ qui a la même aire que l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre a et b. Autrement dit, μ est la constante telle que

$$\int_a^b \mu\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Exemple 33.

1. Calculer la valeur moyenne d'une fonction constante sur un intervalle $[a\,;b]$.
2. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f : x \longmapsto x^2 \mathrm{e}^{x^3}$ sur $[0\,;1]$.

Propriété 34. — Inégalités de la moyenne

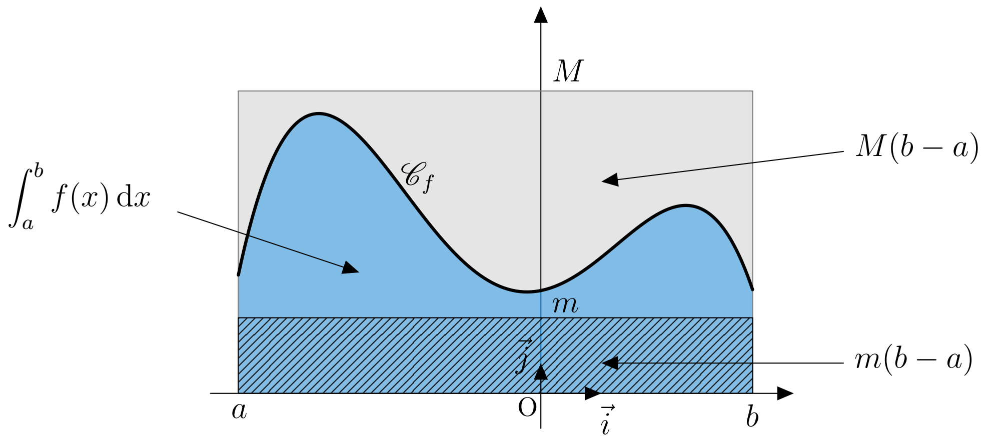
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Si m est un minorant de f sur $[a\,;b]$ et si M est un majorant de f sur $[a\,;b]$ (autrement dit, si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a\,;b]$) alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

En d'autres termes, la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est comprise entre m et M.

Ces inégalités ne sont vraies que si $a \leqslant b$.

Interprétation graphique dans le cas d'une fonction positive



Exemple 35. Démontrer que $\dfrac{1}{e} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 1$.

Remarque 36. Si f est une fonction décroissante sur un intervalle $[a\,;b]$ alors les inégalités de la moyenne assurent que

$$(b-a)f(b) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)f(a).$$

4) Relation de Chasles

Propriété 37

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a, b et c trois réels quelconques appartenant à I. Alors,

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 38. On peut généraliser cette propriété par récurrence : si a_1, a_2, ..., a_n sont des éléments de I alors

$$\int_{a_1}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 39. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n \geqslant \ln(n+1)$ puis déterminer la limite de H_n quand n tend vers $+\infty$.

IV. — Autres méthodes de calcul d'intégrales

1) Intégration par parties

Propriété 40. — Formule d'intégration par parties

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I. Alors, pour tous réels a et b appartenant à I,
$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 41. La formule d'intégration par parties est intéressante si :

1. on ne sait pas trouver directement une primitive de uv' sur I ;

2. on cherche à intégrer un produit de deux fonctions sur I dont une (au moins) possède une primitive connue sur I ;

3. la dérivée de u est « plus simple » que u et/ou on sait déterminer une primitive de $u'v$ sur I.

Méthode 42 : Choix de la fonction à primitiver et de celle à dériver

Voici quelques pistes pour que la nouvelle intégrale à calculer soit plus simple :

1. Les fonctions ln et arctan ont pour dérivées des fonctions rationnelles (quotients de polynômes), il est donc a priori intéressant de les dériver.

2. Si P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ alors P' est un polynôme de degré $n-1$. On va donc privilégier la dérivation pour les polynômes.

3. Les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}, x \longmapsto \cos(ax+b), x \longmapsto \sin(ax+b), x \longmapsto (ax+b)^\alpha$ avec $a \neq 0$ et $\alpha \neq -1$ ont des dérivées ou des primitives de même forme, on peut donc indifféremment les primitiver ou les dériver.

Exemple 43.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

2. Déterminer une primitive de ln sur $]0\,;+\infty[$.

3. Calculer $J = \displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

4. Calculer $K = \displaystyle\int_0^{e-1} \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$.

2) Changement de variable

Propriété 44. — Formule de changement de variable

Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I telle que, pour tout $t \in I$, $\varphi(t)$ appartient à un intervalle J. Pour toute fonction f continue sur J et pour tous réels a et b appartenant à I,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 45. Un changement de variable consiste en pratique à poser $x = \varphi(t)$. Lorsque φ est bijective, on peut également le donner sous la forme $t = \varphi^{-1}(x)$, ce qui revient en fait à lire la formule de droite à gauche plutôt que de gauche à droite.

Exemple 46. Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, $x = \sin(t)$.

2. $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, $x = \cos(t)$.

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, $t = \sqrt{x}$.

Corollaire 47

Soit a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $[-a\,;a]$.

1. Si f est une fonction paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Si f est une fonction impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

3) Méthode des rectangles

Il n'est pas toujours possible de calculer la valeur d'une intégrale avec les propriétés vues précédemment. À défaut d'une valeur exacte, on peut déterminer des valeurs approchées à l'aide de différentes méthodes. L'une d'entre elles et la méthode des rectangles.

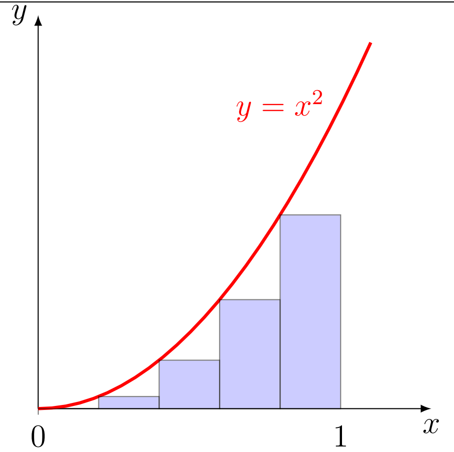
L'idée de cette méthode, dans le cas d'une fonction positive, est d'approcher l'aire sous la courbe par la somme des aires de rectangles que l'on sait facilement calculer. À intervalle régulier, on dessine le rectangle dont la longueur correspond à la « hauteur de la courbe ». On obtient alors une valeur approchée de l'intégrale, en additionnant les aires des tous les rectangles obtenus.

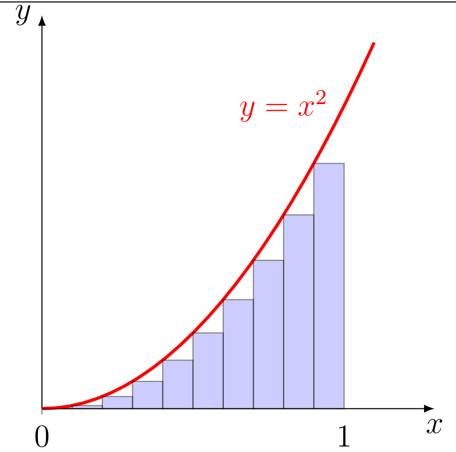
Considérons, par exemple, $I = \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$. Ici, on sait calculer la valeur exacte de I :

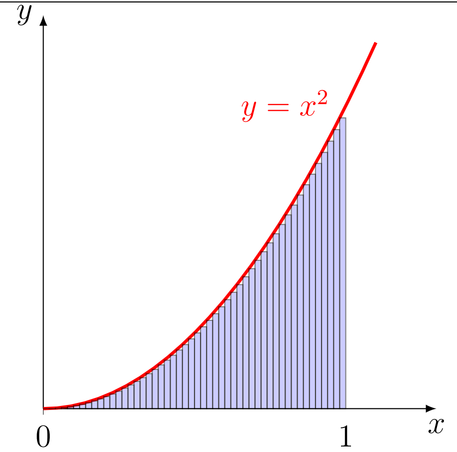
$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0{,}333.$$

Pour approcher la valeur de I par la méthode des rectangle, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on découpe l'intervalle $[0\,;1]$ en n intervalles de longueur $\dfrac{1}{n}$ et, sur chaque intervalle $\left[\dfrac{k}{n}\,;\dfrac{k+1}{n}\right]$, on considère le rectangle de hauteur $\left(\frac{k}{n}\right)^2$. L'aire d'un tel rectangle est $\frac{1}{n} \times \frac{k^2}{n^2} = \frac{k^2}{n^3}$ donc la somme des aires des rectangles est $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3}$.

Comme on peut le constater sur les figures ci-dessous, plus les rectangles sont nombreux, plus la somme de leurs aires est proche de la valeur de l'intégrale recherchée.

<table>
<tr><th>$n = 5$</th><th>$n = 10$</th><th>$n = 50$</th></tr>
<tr>
<td>

$S_5 = 0{,}24$</td>
<td>

$S_{10} = 0{,}285$</td>
<td>

$S_{50} = 0{,}3234$</td>
</tr>
</table>

On peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1) \times n \times (2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

donc $S_n \sim \frac{2n^2}{6n^2} \sim \frac{1}{3}$ et ainsi $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$.

V. — Exercices

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \int_1^2 x^3 \, \mathrm{d}x$ **2.** $I_2 = \int_1^0 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t$ **3.** $I_3 = \int_0^{e-1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u}$

4. $I_4 = \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{-3x} \, \mathrm{d}x$ **5.** $I_5 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^5}$ **6.** $I_6 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$

7. $I_7 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \sin^2(\theta) \, \mathrm{d}\theta$ **8.** $I_8 = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln(x)}$ **9.** $I_9 = \int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t} \, \mathrm{d}t$

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \int_0^2 4x^4 \, \mathrm{d}x$ **2.** $I_2 = \int_0^1 (\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t}) \, \mathrm{d}t$ **3.** $I_3 = \int_1^2 (5 + 3\sqrt{t}) \, \mathrm{d}t$ **4.** $I_4 = \int_1^3 \frac{x+1}{x} \, \mathrm{d}x$

Exercice 3. On considère les intégrales

$$I = \int_0^1 \frac{2\mathrm{e}^{2x} + 1}{\mathrm{e}^{2x} + x} \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^1 \frac{2x - 1}{\mathrm{e}^{2x} + x} \, \mathrm{d}x.$$

1. Calculer I.

2. Calculer $I + J$ et en déduire la valeur de J.

Exercice 4. On considère la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer, pour tout réel x, $F'(x)$ et en déduire les variations de F sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer, pour tout réel x, le signe de $F(x)$ en fonction de x.
3. On considère la fonction $G : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\mathrm{e}^t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Calculer, pour tout réel x, $G'(x)$.

Exercice 5. On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$			$+$		0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).
2. **a.** Interpréter graphiquement $g(2)$.

   b. Montrer que $0 \leqslant g(2) \leqslant 2{,}5$.
3. **a.** Soit x un réel supérieur à 2.

   Montrer que $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$. En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.

   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

On définit ainsi une suite de réels (I_n).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $I_n \geqslant 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   a. Démontrer que $x^n\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n$ pour tout $x \in [0\,;1]$.

   b. En déduire que $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3. Déduire des questions précédentes la limite de la suite (I_n).

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ **2.** $I_2 = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ **3.** $I_3 = \displaystyle\int_1^2 x^3\ln(x)\,\mathrm{d}x$ **4.** $I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1. $\displaystyle\int_1^e t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,\mathrm{d}t$ **3.** $\displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ **4.** $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} (t-1)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ **6.** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^{2020}\ln(t)\,\mathrm{d}t$ **7.** $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^{\pi}} \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$ **8.** $\displaystyle\int_0^1 t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 9. Utiliser une ou plusieurs intégration(s) par parties pour répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer une primitive de arctan sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une primitive de $f : x \longmapsto \ln^2(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

3. Déterminer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto (x^3 - x)\mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable indiqué.

[1. $\displaystyle I_1 = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+x} \quad (x = t^2)$ **2.** $\displaystyle I_2 = \int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-12x+9} \quad \left(x = \frac{t+3}{2}\right)$

3. $\displaystyle I_3 = \int_0^4 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad (x = t^2)$ **4.** $\displaystyle I_4 = \int_1^e \frac{1}{t+t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t \quad (u = \ln(t))$

Exercice 11.

1. Rappeler les formules d'Euler.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos^3(\theta)$ comme une combinaison linéaire de $\cos(\theta)$ et $\cos(3\theta)$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Exercice 12. On pose

$$I = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. À l'aide de deux intégrations par parties, démontrer que

$$I = J \qquad \text{et} \qquad J = \mathrm{e}^{-\pi} + 1 - I.$$

2. En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 13 (Intégrales de Wallis)**.** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante et que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

4. Démontrer que $I_{n+1} \sim I_n$.

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi$ et $\displaystyle I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

6. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$.

b. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n((2n)!)^2}$.

Exercice 14. Pour tout entier naturel non nul n, on appelle f_n la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1+x^n)$ et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel $x \in [0\,;1]$,

$$0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) \leqslant \ln(2)$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant \ln(2)$.

c. Conclure que la suite (I_n) est convergente.

2. Le but de cette question est de déterminer la limite de (I_n).
On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = \ln(1+t) - t$.

a. Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;+\infty[$.

b. En déduire, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, le signe de $g(t)$.

c. Déduire de la question précédente que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout x réel positif, on a $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$.

d. En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que $I_0 + I_2 = 1$ et en déduire la valeur de I_2.

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.

4. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $x^{n+1} \leqslant x^n$ pour tout $x \in [0\,;1]$.

b. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

5. Démontrer que la suite (I_n) converge.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer la dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

b. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

c. Démontrer que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+3}.$$

d. En déduire que

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n+1)} + \frac{2}{(n+1)(n+3)}.$$

e. Démontrer que $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

f. Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

Exercice 16. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $[0\,;1]$ par

$$f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0\,;1]$, $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = 1 - x$, $f_2(x) = 1 - x + x^2$, $f_3(x) = 1 - x + x^2 - x^3$, etc.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = u_n$.

2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;1]$, $f_n(x) = \dfrac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x}$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

4. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(2) - (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+2}$.

6. Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 17. On cherche à calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t}$.

1. À l'aide du changement de variable $t = \ln(u)$, démontrer que $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{u(1+u)}\,\mathrm{d}u$.

2. En remarquant que, pour tout réel u, $1 = 1 + u - u$, déduire de la question précédente la valeur de I.

Exercice 18. Soit f une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $[0\,;1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

En considérant la fonction $g : t \longmapsto \left(\sqrt{f(t)} - \dfrac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t \geqslant 1$.

Exercice 19. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$. On suppose qu'il existe $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Exercice 20. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0\,;1]$. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et que m et M sont deux réels tels que, pour tout $t \in [0\,;1]$, $m \leqslant f(t) \leqslant M$.

En considérant $\displaystyle\int_0^1 (f(t) - m)(M - f(t))\,\mathrm{d}t$, démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant -mM$.

Exercice 21. Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 22 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a\,;b]$. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.