⧫ Chapitre 1. Calcul numérique et algébrique

I. — Rappels sur les ensembles de nombres

1) Nombres entiers

Définition 1

L'ensemble des **entiers naturels** est l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls : 0, 1, 2, 3, etc.
Cet ensemble est noté $\mathbb{N}$. On a donc $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;...\}$.

Notation 2. Pour signifier qu'un élément appartient à un ensemble, on utilise le symbole $\in$ (« appartient »). Dans le cas contraire, on utilise le symbole $\notin$ (« n'appartient pas »).

Exemple 3. $17 \in \mathbb{N}$ mais $-3 \notin \mathbb{N}$ et $3{,}5 \notin \mathbb{N}$.

Notation 4. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs c'est-à-dire $\mathbb{N}^* = \{1\,;2\,;3\,;...\}$.

Définition 5

L'ensemble des **entiers relatifs** est l'ensemble de tous les nombres entiers (positifs, négatifs ou nuls) : 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 etc.
L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathbb{Z} = \{..., -3\,;-2\,;-1\,,0\,;1\,;2\,;3\,;...\}$.

Exemple 6. $17 \in \mathbb{Z}$ et $-3 \in \mathbb{Z}$ mais $1{,}6 \notin \mathbb{Z}$.

Remarque 7.

1. Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs : si $a \in \mathbb{N}$ alors $a \in \mathbb{Z}$. Du point de vue des ensembles, on dit que $\mathbb{N}$ est **inclus** dans $\mathbb{Z}$ ce qu'on note symboliquement : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Cela signifie que $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$.
2. Par défaut, quand on parle de nombres « entiers » sans précision, il s'agit d'entiers relatifs.

2) Fractions et rationnels

a) Fractions d'entiers

Définition 8

Si a est un entier relatif et b est un entier naturel non nul, la **fraction** a **sur** b, notée $\frac{a}{b}$, est l'unique nombre tel que $\frac{a}{b} \times b = a$.
On dit alors que a est le **numérateur** de $\frac{a}{b}$ et que b est le **dénominateur** de $\frac{a}{b}$.

Remarque 9. Par définition, pour tout entier a non nul, $\frac{a}{a} = 1$.

Propriété 10

Deux fractions d'entiers $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si et seulement si les produits en croix $a \times d$ et $b \times c$ sont égaux.

Exemple 11. Les fractions $\frac{15}{20}$ et $\frac{3}{4}$ sont-elles égales ?

Solution. $15 = 60$ et $20 \times 3 = 60$ donc $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

Corollaire 12

Si $\frac{a}{b}$ est une fraction d'entiers et si k est un entier non nul alors $\frac{a}{b} = \frac{k\times a}{k\times b}$.
Ainsi, si les entiers a et b ont un diviseur commun, on peut simplifier la fraction par ce diviseur sans changer la valeur de la fraction.

Définition 13

On dit qu'une fraction d'entiers $\frac{a}{b}$ est **irréductible** si on ne peut pas la simplifier c'est-à-dire si a et b n'ont pas d'autre diviseur positif commun que 1.

Exemple 14. La fraction $\frac{54}{45}$ n'est pas irréductible car on peut la simplifier par 9 : $\frac{54}{45} = \frac{9\times 6}{9\times 5} = \frac{6}{5}$.
En revanche, la fraction $\frac{6}{5}$ est irréductible.

b) Nombres rationnels

Définition 15

On dit qu'un nombre x est **rationnel** s'il peut s'écrire comme une fraction d'entiers c'est-à-dire s'il existe un entier relatif a et un entier naturel non nul b tel que $x = \frac{a}{b}$.
On dit alors que $\frac{a}{b}$ est une **écriture fractionnaire** de x.
L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$.

Exemple 16.

1. $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$.
2. $0{,}17 \in \mathbb{Q}$ car $0{,}17 = \frac{17}{100}$.
3. $-1{,}25 \in \mathbb{Q}$ car $-1{,}25 = -\frac{5}{4}$.
4. $12 \in \mathbb{Q}$ car $12 = \frac{12}{1}$.

Remarque 17.

1. Un nombre x est rationnel si et seulement s'il existe un entier b tel que $b \times x$ est un entier.
2. Tout nombre entier relatif est un nombre rationnel puisque si x est un entier alors $x = \frac{x}{1}$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $1 \in \mathbb{N}$. D'un point de vue ensembliste, $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
3. Un rationnel x admet une infinité d'écritures fractionnaires. En effet, si $x = \frac{a}{b}$ alors, pour tout entier naturel non nul k, $\frac{k\times a}{k\times b}$ est une écriture fractionnaire de x. Ainsi,
$$0{,}2 = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{4}{20} = \frac{6}{30} = ...$$
Parmi toutes les écritures fractionnaires, on privilégie en général l'écriture sous forme d'une fraction irréductible.

c) Opérations sur les écritures fractionnaires

• **addition et soustraction** : si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{b}$ sont deux fractions ayant <u>le même dénominateur</u> alors
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$
Pour additionner ou soustraire deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ avec $b \neq d$, il faut commencer par les mettre au même dénominateur. Pour cela, on cherche un multiple commun de b et d (aussi petit que possible).

L'opposé de la fraction $\frac{a}{b}$ est $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$. Ainsi, en particulier, $-\frac{a+b}{c} = \frac{-(a+b)}{c} = \frac{-a-b}{c}$.

Exemple 18. Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$\frac{1}{5}-\frac{4}{5} \qquad \frac{2}{15}+\frac{8}{15} \qquad \frac{1}{6}+\frac{2}{3} \qquad \frac{15}{8}-\frac{13}{10}.$$

Solution. $\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=\dfrac{1-4}{5}$ donc $\boxed{\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}}$.
$\frac{2}{15}+\frac{8}{15}=\frac{2+8}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2\times5}{3\times5}$ donc $\boxed{\frac{2}{15}+\frac{8}{15}=\frac{2}{3}}$.
$\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}=\frac{1+4}{6}$ donc $\boxed{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}}$
$\frac{15}{8}-\frac{13}{10}=\frac{75}{40}-\frac{52}{40}=\frac{75-52}{40}$ donc $\boxed{\frac{15}{8}-\frac{13}{10}=\frac{23}{40}}$.

• **multiplication** : pour multiplier deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}.$$

En particulier, il n'y pas besoin que les fractions aient le même dénominateur. En revanche, on a intérêt à simplifier les fractions avant de calculer les produits.

Exemple 19. Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$\frac{1}{5}\times\frac{3}{2} \qquad \frac{14}{9}\times\frac{3}{7} \qquad \frac{2022}{1000}\times\frac{100}{1011}.$$

Solution. $\frac{1}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{1\times3}{5\times2}$ donc $\boxed{\frac{1}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{10}}$.
$\frac{14}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{2\times7}{3\times3}\times\dfrac{3}{7}$ donc $\boxed{\frac{14}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{2}{3}}$.
$\frac{2022}{1000}\times\frac{100}{1011}=\frac{2\times1011}{10\times100}\times\dfrac{100}{1011}=\frac{2}{10}$ donc $\boxed{\frac{2022}{1000}\times\frac{100}{1011}=\frac{1}{5}}$.

• **division** : pour diviser une fraction $\frac{a}{b}$ par une fraction non nulle $\frac{c}{d}$, on multiplie $\frac{a}{b}$ par l'inverse de $\frac{c}{d}$, c'est-à-dire par $\frac{d}{c}$:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}.$$

Comme pour la multiplication, il n'est pas nécessaire que les fractions aient le même dénominateur et on a intérêt à simplifier avant d'effectuer les multiplications.

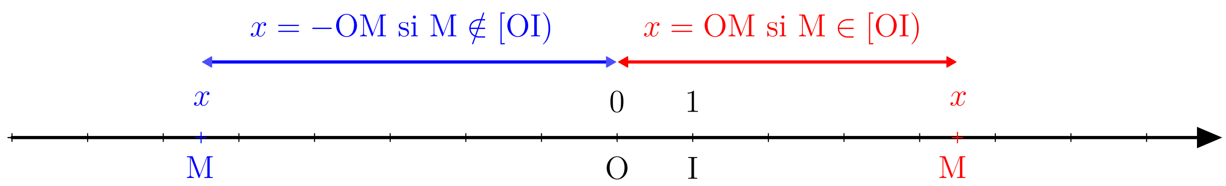
Exemple 20. Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{2}} \qquad \frac{\frac{46}{9}}{\frac{23}{3}} \qquad \frac{\frac{100}{99}}{\frac{20}{11}}.$$

Solution. $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}$ donc $\boxed{\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{15}}$.
$\frac{\frac{46}{9}}{\frac{23}{3}}=\frac{46}{9}\times\frac{3}{23}=\frac{2\times23}{3\times3}\times\dfrac{3}{23}$ donc $\boxed{\frac{\frac{46}{9}}{\frac{23}{3}}=\frac{2}{3}}$.
$\frac{\frac{100}{99}}{\frac{20}{11}}=\frac{100}{99}\times\dfrac{11}{20}=\frac{5\times20}{9\times11}\times\frac{11}{20}$ donc $\boxed{\frac{\frac{100}{99}}{\frac{20}{11}}=\frac{5}{9}}$.

3) Nombres réels

Sur un axe gradué d'origine O, on peut associer à chaque point M un nombre x égal à la distance OM si M appartient à la demi-droite [OI) et à l'opposé de la distance OM sinon.

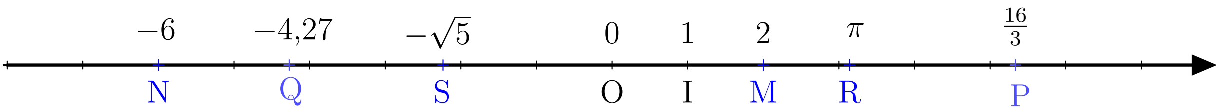


Dans cette correspondance, on dit que le nombre x est l'**abscisse** du point M sur l'axe gradué.

Définition 21

L'ensemble des abscisses des points d'un axe gradué est appelé l'ensemble des **nombres réels** et on le note $\mathbb{R}$.

Exemple 22. Sur la figure ci-dessous, les points M, N, P, Q, R et S ont respectivement pour abscisses 2, -6, $\frac{16}{3}$, $-4{,}27$, π, $-\sqrt{5}$.



Propriété 23

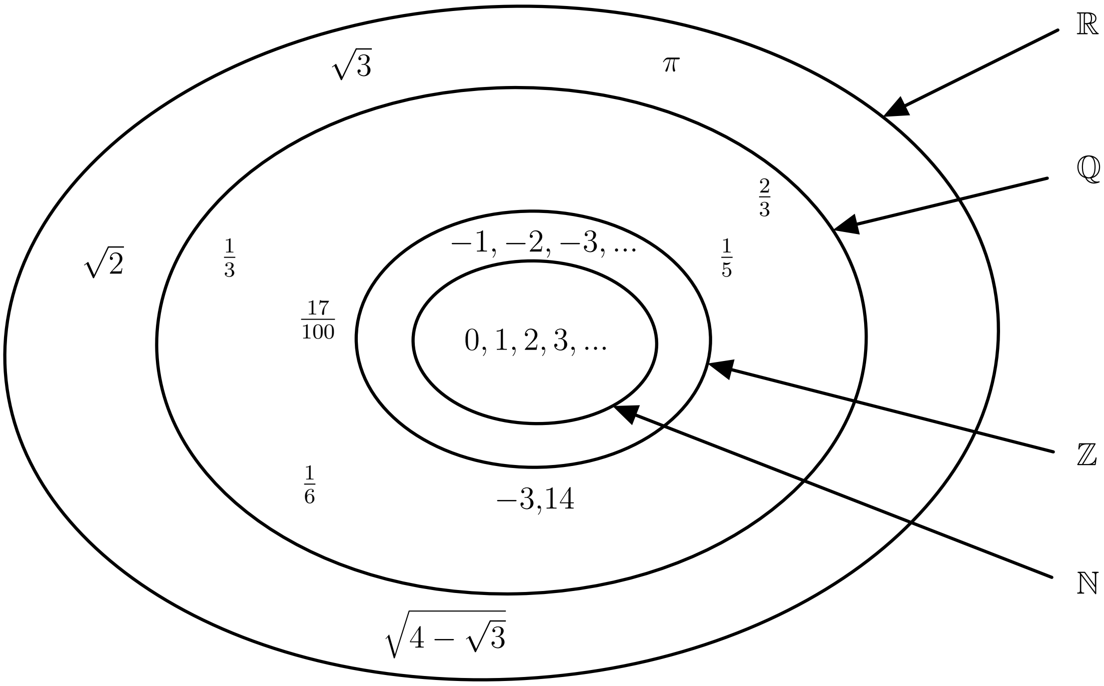
Tout nombre rationnel est un nombre réel. On a donc les inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Il existe des réels qui ne sont pas rationnels. En particulier, les nombres $\sqrt{2}$ et π ne sont pas rationnels.

Il existe beaucoup d'autres nombres réels qui ne sont pas rationnels comme $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{4-\sqrt{3}}$,... Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés les nombres irrationnels.

BILAN. — On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



II. — Puissances entières et racine carrée

1) Puissances entières

Définition 24

Soit a un réel et n un entier relatif.

1. Si $n > 0$ alors $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$.

2. $a^0 = 1$.

3. Si $n < 0$ et $a \neq 0$ alors $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Exemple 25.

1. $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$.

2. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

Propriété 26

Pour tout réel a non nul et tous entiers relatifs n et m :

$$1)\ a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad 2)\ \frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad 3)\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad 4)\ (a^m)^n = a^{m \times n}.$$

Propriété 27

Pour tous réels a et b non nuls et pour tout entier relatif n,

$$1)\ a^n \times b^n = (a \times b)^n \qquad 2)\ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad 3)\ 1^n = 1.$$

Exemple 28. Écrire chacun des nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

$$a = \frac{5^2 \times 10^2}{5^3 \times 2^4} \qquad b = 10^{-3} \times 10^5 \times 0,0001 \qquad c = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4^{-2} \qquad d = (0{,}2)^2 \times (0{,}4)^3 \times 10^4.$$

Solution.

$$a = \frac{5^2 \times (2 \times 5)^2}{5^3 \times 2^4} = \frac{5^2 \times 2^2 \times 5^2}{5^3 \times 2^4} = \frac{5^{2+2} \times 2^2}{5^3 \times 2^4} = \frac{5^{4-3}}{2^{4-2}} = \frac{5^1}{2^2}$$

c'est-à-dire $\boxed{a = \frac{5}{4}}$.

$$b = 10^{-3} \times 10^5 \times 10^{-4} = 10^{-3+5-4} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2}$$

c'est-à-dire $\boxed{b = \frac{1}{100}}$.

$$c = \frac{1^2}{2^2} \times \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4 \times 16}$$

c'est-à-dire $\boxed{c = \frac{1}{64}}$.

$$d = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times (2 \times 5)^4 = \frac{1^2}{5^2} \times \frac{2^3}{5^3} \times 2^4 \times 5^4 = \frac{2^{3+4}}{5^{2+3-4}} = \frac{2^7}{5^1}$$

c'est-à-dire $\boxed{d = \frac{128}{5}}$.

Exemple 29. On considère deux réels a et b non nuls. Écrire chacun des nombres suivants sous la forme $a^m b^n$ où m et n sont des entiers relatifs.

$$(a^2b)^{-3} \times (ab)^2 \qquad (ab^2)^{-1} \times (a^2b)^2 \qquad \frac{a^{-1}b^2}{a^{-2}b}.$$

Solution.

$(a^2b)^{-3} \times (ab)^2 = (a^2)^{-3}b^{-3}a^2b^2 = a^{2\times(-3)+2}b^{-3+2}$ donc $\boxed{(a^2b)^{-3} \times (ab)^2 = a^{-4}b^{-1}}$.

$(ab^2)^{-1} \times (a^2b)^2 = a^{-1}b^{2\times(-1)}a^{2\times 2}b^2 = a^{-1+4}b^{-2+2}$ donc $\boxed{(ab^2)^{-1} \times (a^2b)^2 = a^3b^0}$.

$\frac{a^{-1}b^2}{a^{-2}b} = a^{-1+2}b^{2-1}$ donc $\boxed{\frac{a^{-1}b^2}{a^{-2}b} = a^1b^1}$

2) Racine carrée

Définition 30

Soit a un réel positif ou nul. L'unique réel positif ou nul r tel que $r^2 = a$ est appelé la **racine carrée** de a et on le note $\sqrt{a}$.

Exemple 31.

1. $\sqrt{9} = 3$ car 3 est positif et $3^2 = 9$.
2. $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ car 0,5 est positif et $0{,}5^2 = 0{,}25$.
3. $\sqrt{0} = 0$ car 0 est positif ou nul et $0^2 = 0$.

Propriété 32

Soit a et b deux réels.

1. Si a et b sont positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
2. Si $a \geqslant 0$ et $b > 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple 33. Calculer, sans utiliser la calculatrice,

$$A = \sqrt{2500} \qquad B = \sqrt{\frac{81}{36}} \qquad C = \sqrt{50} \times \sqrt{18} \qquad D = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$$

Solution.

$A = \sqrt{25 \times 100} = \sqrt{25} \times \sqrt{100} = 5 \times 10$ donc $\boxed{A = 50}$.

$B = \dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{36}} = \dfrac{9}{6}$ donc $\boxed{B = \dfrac{3}{2}}$.

$C = \sqrt{2 \times 25} \times \sqrt{2 \times 9} = \sqrt{2} \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} \times \sqrt{9} = 5 \times 3 \times \sqrt{2}^2 = 15 \times 2$ donc $\boxed{C = 30}$.

$D = \dfrac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{4 \times 5}} = \dfrac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{4} \times \sqrt{5}} = \dfrac{3 \times \sqrt{5}}{2 \times \sqrt{5}}$ donc $\boxed{D = \dfrac{3}{2}}$.

⚠ En général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Par exemple, $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

III. — Calcul algébrique

1) Développement

Définition 34

Développer une expression signifie transformer un produit en somme.

Méthode 35

Pour développer une expression, on utilise la distributivité si l'expression contient deux facteurs. Si elle contient plus de deux facteurs, on répète autant de fois que nécessaire la distributivité en prenant les facteurs deux par deux.

Exemple 36.

1. Développer $A(x) = 5x(3x - 2)$.
2. Développer $B(x) = (2x - 3)(-x + 4)$.
3. Développer $C(t) = (t + 1)(2t - 3)(-t + 5)$.

Solution.

1. $\boxed{A(x) = 15x^2 - 10x}$.

2. $B(x) = -2x^2 + 8x + 3x - 12$ donc $\boxed{B(x) = -2x^2 + 11x - 12}$.

3. $C(t) = (2t^2 - 3t + 2t - 3)(-t + 5) = (2t^2 - t - 3)(-t + 5) = -2t^3 + 10t^2 + t^2 - 5t + 3t - 15$ donc $\boxed{C(t) = -2t^3 + 11t^2 - 2t - 15}$.

Propriété 37. — Identités remarquables

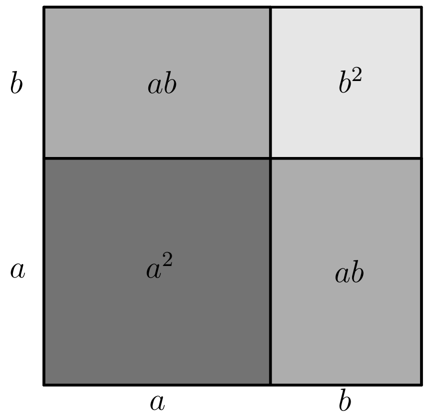
Pour tous réels a et b,

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

L'égalité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ peut s'interpréter graphiquement de la manière suivante :



Le grand carré a une aire égale à $(a + b)^2$ et il est composé d'un carré d'aire a^2, d'un carré d'aire b^2 et de deux rectangles d'aire ab. Ainsi, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Exemple 38.

1. Développer $A(x) = (3x + 2)^2$.

2. Développer $B(x) = (5 - x)^2$.

3. Développer $C(x) = (x - 0{,}5)(x + 0{,}5)$.

Solution.

1. $A(x) = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2$ donc $\boxed{A(x) = 9x^2 + 12x + 4}$.

2. $B(x) = 5^2 - 2 \times 5 \times x + x^2$ donc $\boxed{B(x) = x^2 - 10x + 25}$.

3. $C(x) = x^2 - 0{,}5^2$ donc $\boxed{C(x) = x^2 - 0{,}25}$.

2) Factorisation

Définition 39

Factoriser une expression signifie transformer une somme en produit.

Méthode 40

Pour factoriser une expression, on peut utiliser

- un facteur commun ;
- les identités remarquables ;
- combiner les deux méthodes précédentes.

Exemple 41.

1. Factoriser $A(x) = (x+1)(2x+3) + (x+1)(-5x-2)$.
2. Factoriser $B(x) = x^2 + 6x + 9$.
3. Factoriser $C(x) = 16 - 9x^2$.
4. Factoriser $D(x) = x^2 - 1 - (x-1)(2-7x)$.

Solution.

1. $A(x) = (x+1)\left[(2x+3) + (-5x-2)\right] = (x+1)(2x+3-5x-2)$ donc $\boxed{A(x) = (x+1)(-3x+1)}$.
2. $B(x) = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$ donc $\boxed{B(x) = (x+3)^2}$.
3. $C(x) = 4^2 - (3x)^2$ donc $\boxed{C(x) = (4-3x)(4+3x)}$.
4. $D(x) = x^2 - 1^2 - (x-1)(2-7x) = (x-1)(x+1) - (x-1)(2-7x)$
$= (x-1)\left[(x+1) - (2-7x)\right] = (x-1)(x+1-2+7x)$ donc $\boxed{D(x) = (x-1)(8x-1)}$.

3) Fractions de réels

Toutes les règles opératoires vues sur les fractions d'entiers restent valables pour les fractions de réels. En particulier, pour additionner deux fractions de réels, il faut qu'elles aient le même dénominateur.

Exemple 42.

1. Soit a un réel différent de 0 et -1. Les fractions $\frac{a}{a+1}$ et $\frac{a-1}{a}$ sont-elles égales ?
2. Soit x un réel différent de 1 et 5. Calculer $A(x) = \frac{3x+1}{x-1} - \frac{x+3}{x-5}$.
3. Soit x un réel non nul. Calculer $B(x) = \frac{7x-3}{x} + \frac{2x-1}{x^3}$.

Solution.

1. $a \times a = a^2$ et $(a+1)(a-1) = a^2 - 1^1 = a^2 - 1$. Or, comme $1 > 0$, $a^2 - 1 < a^2$ donc $a^2 \neq a^2 - 1$ et ainsi $\boxed{\frac{a}{a+1} \neq \frac{a-1}{a}}$.
2. $A(x) = \frac{(3x+1)(x-5)}{(x-1)(x-5)} - \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x-5)} = \frac{3x^2-15x+x-5}{(x-1)(x-5)} - \frac{x^2-x+3x-3}{(x-1)(x-5)} = \frac{3x^2-14x-5-(x^2+2x-3)}{(x-1)(x-5)}$
$= \frac{3x^2-14x-5-x^2-2x+3}{(x-1)(x-5)}$ donc $\boxed{A(x) = \frac{2x^2-16x-2}{(x-1)(x-5)}}$.
3. $B(x) = \frac{(7x-3)\times x^2}{x \times x^2} + \frac{2x-1}{x^3} = \frac{(7x-3)x^2+2x-1}{x^3}$ donc $\boxed{B(x) = \frac{7x^3-3x^2+2x-1}{x^3}}$.

Méthode 43 : cas particulier des racines carrés

1. Lorsque le dénominateur d'une fraction est de la forme $\sqrt{d}$, on peut éliminer la racine au dénominateur en multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{d}$.
2. Lorsque le dénominateur d'une fraction est de la forme $a + b\sqrt{d}$, on peut éliminer la racine au dénominateur en multipliant numérateur et dénominateur par la « quantité conjuguée » $a - b\sqrt{d}$.

Exemple 44. Écrire sans racine carrée au dénominateur les nombres $\frac{3}{\sqrt{2}}$ et $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$.

Solution. $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2}$ donc $\boxed{\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$.

$\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1^2-\sqrt{5}^2} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{2\times(-2)} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2}$ donc $\boxed{\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.