⧫ Chapitre 19. Variables aléatoires réelles

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé où Ω est un ensemble fini.

I. — Notion de variable aléatoire

1) Un exemple pour commencer

Exemple 1. On considère le jeu suivant. On mise 1 euro et on lance un dé équilibré en fixant la règle suivante :

1. si on obtient 1, 2 ou 3, on ne gagne rien ;
2. si on obtient 4, on gagne 1 euro ;
3. si on obtient 5, on gagne 2 euros ;
4. si on obtient 6, on gagne 3 euros.

Ainsi, en fixant la règle, on donne un procédé qui permet d'associer, à chaque évènement élémentaire de l'expérience, un nombre (qui est, dans cet exemple, le gain algébrique c'est-à-dire la somme d'argent gagnée moins la mise).

Il y a ici deux ensembles à bien distinguer : l'univers de l'expérience aléatoire $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'ensemble des sommes d'argent associées $E = \{-1, 0, 1, 2\}$. D'un point de vue mathématique, fixer la règle ci-dessus revient à définir une fonction de Ω dans E : à chaque élément de Ω, on associe un et un seul nombre appartenant à E.

2) Définition et notations

Définition 2

Une **variable aléatoire** (réelle) sur Ω est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3.

1. Autrement dit, une variable aléatoire sur Ω est un procédé qui permet d'associer, à chaque issue de l'expérience, un unique nombre réel.
2. En général, une variable aléatoire est notée avec une lettre majuscule et on utilise le plus souvent la lettre X.
3. Les valeurs prises par une variable aléatoire sont des réels quelconques (ils peuvent être positifs ou négatifs, entiers ou non, ...).

Définition 4

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. L'image directe de Ω par X est appelé l'**univers image** de X (ou le **support** de X). On le note $X(\Omega)$.
Autrement dit, l'univers image de X est

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ t = X(\omega)\}.$$

Exemple 5. Dans l'exemple 1, la variable aléatoire est définie sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par $X(1) = X(2) = X(3) = -1$, $X(4) = 0$, $X(5) = 1$ et $X(6) = 2$. L'univers image de X est donc $X(\Omega) = \{-1 ; 0 ; 1 ; 2\}$.

Définition 6

On considère une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit a un réel quelconque. On définit

1. l'évènement $\{X = a\}$: c'est l'ensemble des éléments ω de Ω tels que $X(\omega) = a$; autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience pour lesquelles la variable aléatoire X vaut a.
2. l'évènement $\{X \leqslant a\}$: c'est l'ensemble des éléments ω de Ω tels que $X(\omega) \leqslant a$; autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience pour lesquelles la variable aléatoire X prend une valeur inférieure ou égale à a.

On définit de façon analogue les évènements $\{X < a\}$, $\{X \geqslant a\}$ et $\{X > a\}$.

Remarque 7. Il faut bien comprendre que ce sont des évènements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω.

Exemple 8. On reprend l'exemple 1. Déterminer $\{X = -1\}$, $\{X = 2\}$, $\{X = 5\}$, $\{X > 0\}$ et $\{X \leqslant 2\}$.

Notation 9. Pour tout réel a, on note $\mathbf{P}(X = a)$ la probabilité de l'évènement $(X = a)$ (au lieu de $\mathbf{P}(\{X = a\})$. On note de même $\mathbf{P}(X \leqslant a)$, $\mathbf{P}(X < a)$, $\mathbf{P}(X \geqslant a)$ et $\mathbf{P}(X > a)$ les probabilités des évènements $\{X \leqslant a\}$, $\{X < a\}$, $\{X \geqslant a\}$ et $\{X > a\}$.

Propriété 10

On considère une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. La famille $(\{X = a\})_{a \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.
En particulier, la somme des probabilités de tous ces évènements est égale à 1, ce que l'on notera

$$\sum_{a \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = a) = 1.$$

II. — Loi de probabilité d'une variable aléatoire

1) Définition

Définition 11

On considère une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. La loi de probabilité de X est la donnée des probabilités $\mathbf{P}(X = a)$ lorsque a parcourt $X(\Omega)$.

Exemple 12. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X de l'exemple 1.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X peut être représentée graphiquement par un diagramme en bâtons : on place, en abscisse, les valeurs a appartenant à $X(\Omega)$ et, en ordonnée, les probabilités associées, en traçant au-dessus de a un segment (un « bâton ») de hauteur $\mathbf{P}(X = a)$.

Exemple 13. Représenter la loi de la variable aléatoire X de l'exemple précédent par un diagramme en bâtons.

Définition 14

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω. On dit que ces variables ont la même loi si $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et, pour tout $a \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(Y = a)$.

Exemple 15. On lance une pièce équilibré et on note X la variable aléatoire égale à 1 si on obtient *pile* et 0 si on obtient *face*. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = 1 - X$.

Montrer que X et Y ont la même loi. Ces deux variables aléatoires sont-elles égales ?

2) Fonction de répartition

Définition 16

On considère une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. La fonction de répartition de X, notée F_X, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t).$$

Exemple 17. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X de l'exemple 1 et tracer sa représentation graphique.

Propriété 18

On considère une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ non constante. On suppose que $X(\Omega)$ est constitué de n réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Alors,

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$;
2. F_X est discontinue en a_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$;
3. F_X est constante sur $[a_i\,; a_{i+1}[$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.
4. pour tout $t < a_1$, $F_X(t) = 0$;
5. pour tout $t \geqslant a_n$, $F_X(t) = 1$;

III. — Espérance, variance, écart-type

1) Espérance

Définition 19

On considère une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit l'espérance de X, notée $\mathbf{E}(X)$, par

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{a \in X(\Omega)} a\mathbf{P}(X = a).$$

Remarque 20.

1. Si la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
$\mathbf{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_k

alors

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i.$$

2. L'espérance est l'équivalent en probabilité de la moyenne en statistique. L'espérance d'une variable aléatoire s'interprète comme la valeur moyenne de la variable X. Ainsi, si X représente un gain à un jeu alors $\mathbf{E}(X)$ représente le gain moyen.

Exemple 21. On reprend la variable aléatoire X définie dans l'exemple 1. Calculer l'espérance de X.

Définition 22

On dit qu'une variable X est centrée si $\mathbf{E}(X) = 0$.

Remarque 23. On considère un jeu dans lequel le gain algébrique (c'est-à-dire la différence entre le gain et la mise) est une variable aléatoire X. On dit que le jeu est équitable si X est centrée, favorable au joueur si $\mathbf{E}(X) > 0$ et défavorable au joueur si $\mathbf{E}(X) < 0$.

Exemple 24. Ainsi, le jeu de l'exemple 1 est équitable.

Propriété 25

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$.

1. Pour tous réel a et b, $\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$ (linéarité de l'espérance).

2. Si, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 0$ alors $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$ (positivité de l'espérance).

3. Si, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ alors $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$ (croissance de l'espérance).

4. $|\mathbf{E}(X)| \leqslant \mathbf{E}(|X|)$ (inégalité triangulaire).

Remarque 26. En particulier, pour tous réels a et b, $\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$.

Exemple 27. Dans le jeu de l'exemple 1, à combien l'oganisateur doit-il fixer la mise pour gagner en moyenne 50 centimes par jeu ?

Théorème 28. — Théorème de transfert

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors, $f(X)$ est une variable aléatoire et

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{a \in X(\Omega)} f(a)\mathbf{P}(X = a).$$

Remarque 29. L'intérêt du théorème de transfert est de pouvoir calculer l'espérance de $f(X)$ à partir de la loi de X et sans avoir à déterminer la loi de $f(X)$.

Exemple 30. On considère la variable aléatoire X de l'exemple 1. Déterminer l'espérance de X^2.

2) Variance et écart-type

Définition 31

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On définit la variance de X, notée $\mathbf{V}(X)$, par

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2)$$

et l'écart-type de X, noté $\sigma(X)$, par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}.$$

Remarque 32.

1. La variance représente « la moyenne des carrés des écarts à la moyenne ». Elle mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance. Plus la variance est grande, plus les valeurs sont dispersées et inversement.
2. On considère l'écart-type plutôt que la variance pour des raisons d'homogénéité.
3. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbf{V}(X) = \sum_{a \in X(\Omega)} (a - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}(X = a).$$

Ainsi, si la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
$\mathbf{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_k

alors

$$\mathbf{V}(X) = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mathbf{E}(X))^2 \times p_i.$$

Exemple 33. Considérons une variable aléatoire sur un univers Ω telle que $X(\Omega) = \{-2\,;-1\,;0\,;4\}$ dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	4
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,1	0,5	0,2	0,2

Calculer sa variance et son écart-type.

Théorème 34. — Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire. Alors,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2.$$

Exemple 35. Retrouver le résultat précédent en utilisant la formule de König-Huygens.

Propriété 36

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. Pour tous réels a et b,

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X) \qquad \text{et} \qquad \sigma(aX + b) = |a|\,\sigma(X).$$

Définition 37

On dit qu'une variable aléatoire X est réduite si $\mathbf{V}(X) = 1$.

Exemple 38. On reprend la variable aléatoire X de l'exemple 33. Déterminer deux réels a et b tels que $Y = aX + b$ soit centrée réduite.

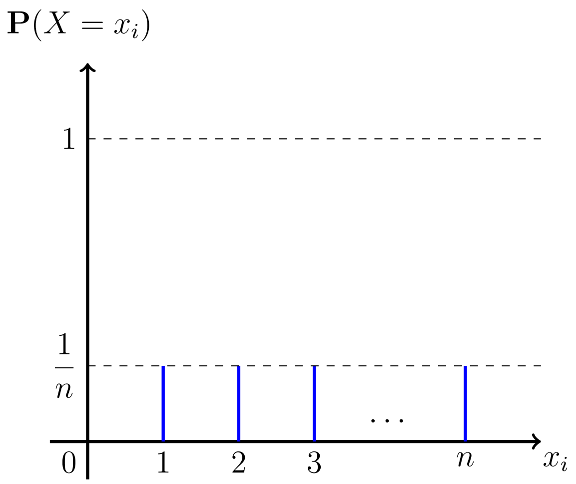
IV. — Lois usuelles

1) Loi uniforme

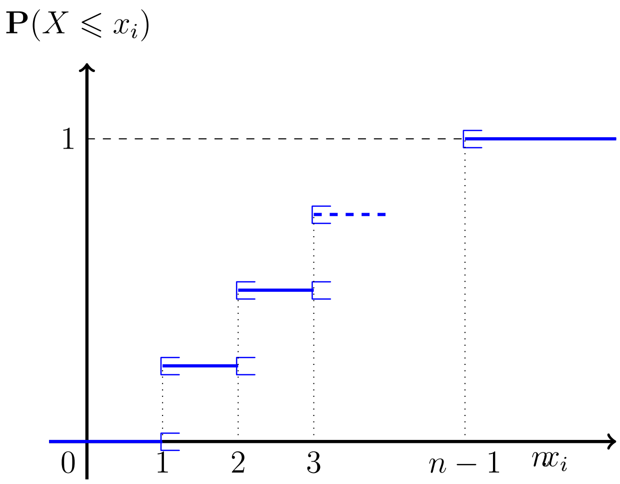
Définition 39

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire définie sur Ω suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$.

Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$



Loi de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.



Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Propriété 40

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1, n]\!])$ alors

$$\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Exemple 41. On lance un dé icosaédrique équilibré c'est-à-dire un dé à 12 faces dont les faces sont numérotées de 1 à 12. On note X le résultat obtenu sur la face supérieure du dé.

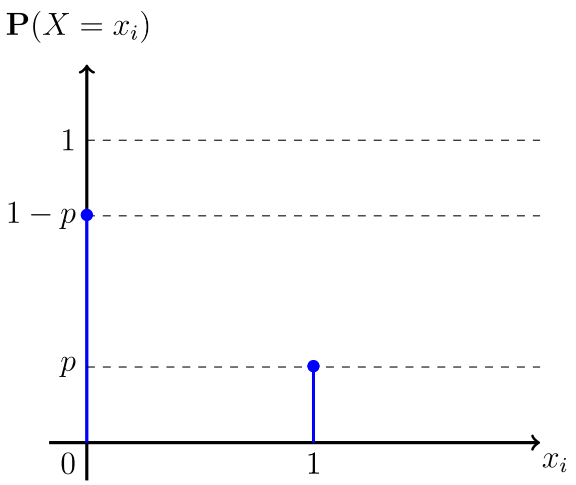
1. Déterminer la loi de X.
2. Si on lance un grand nombre de fois le dé, à combien peut-on estimer la valeur moyenne des résultats obtenus ?

2) Loi de Bernoulli

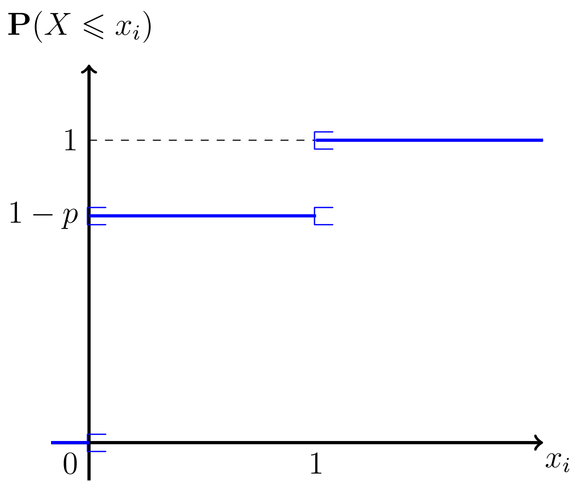
Définition 42

Soit $p \in [0\,;1]$. On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0\,;1\}$, $\mathbf{P}(X = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$.

Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.



Loi de probabilité d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli



Fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli

Remarque 43. Dans la pratique, une variable de Bernoulli peut se définir pour n'importe quelle expérience dans laquelle on s'intéresse à un évènement particulier S, appelé *succès*. On peut alors définir une variable aléatoire X valant 1 en cas de succès et 0 sinon qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(S)$.

Propriété 44

Soit $p \in [0\,;1]$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors

$$\mathbf{E}(X) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(X) = p(1-p).$$

3) Loi binomiale

Définition 45

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\,;1]$. On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit une loi binomiale de paramètres n et p si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Remarque 46. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1, p)$ signifie que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

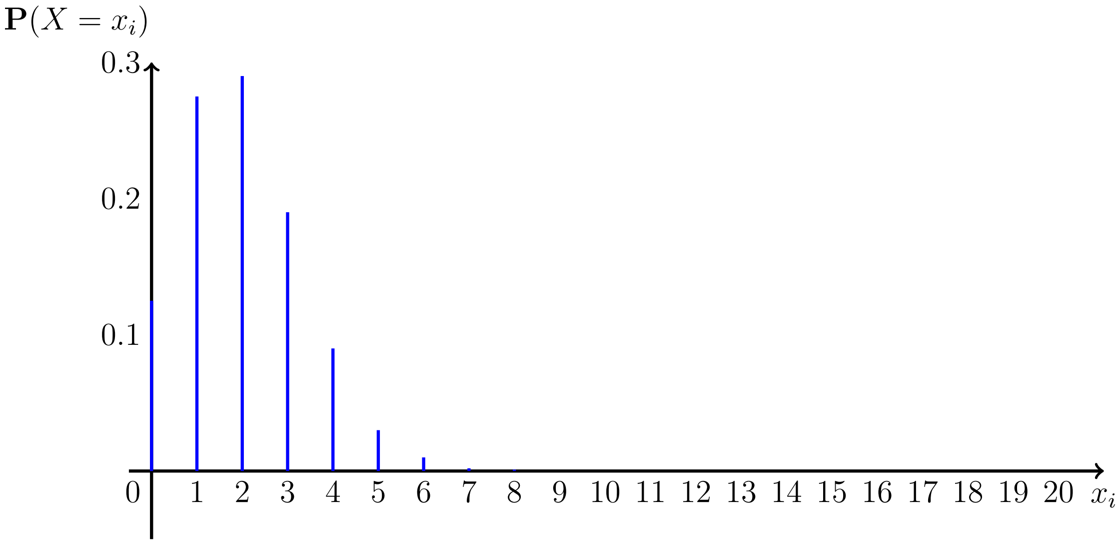


Diagramme en bâtons de la loi $\mathscr{B}(20, 0{,}1)$

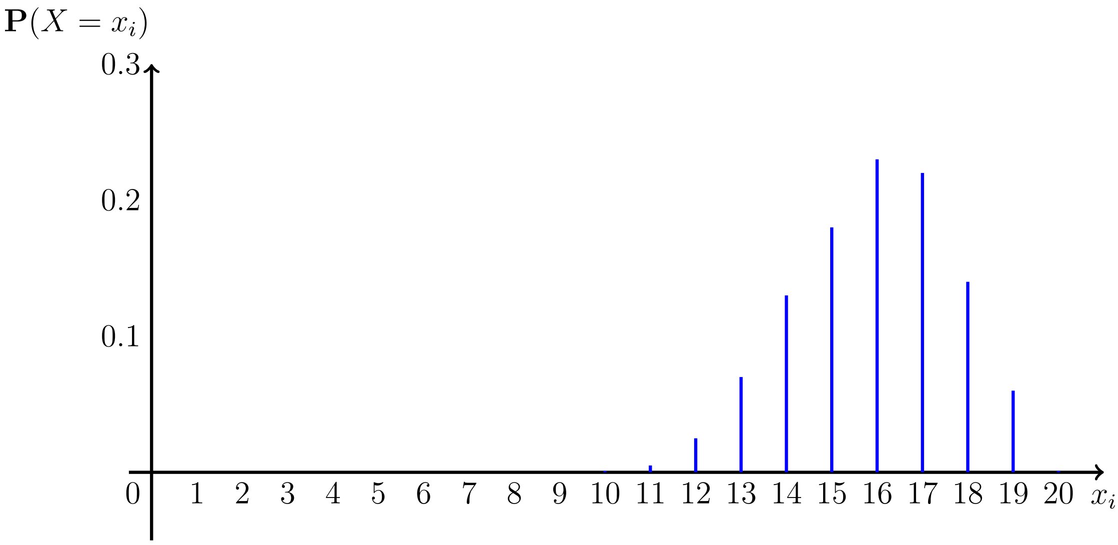


Diagramme en bâtons de la loi $\mathscr{B}(20, 0{,}8)$

Remarque 47. On considère une expérience dans laquelle on a fixé un succès S de probabilité p. On suppose qu'on répète n fois cette expérience dans les mêmes conditions. Alors, la variable X qui compte le nombre de succès obtenus lors des n répétitions suit une loi $\mathscr{B}(n, p)$.

Exemple 48. On lance 4 fois de suite un même dé cubique bien équilibré. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de 1 obtenus.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer les probabilités des évènements suivants :

  a. obtenir exactement trois 1 ;

  b. obtenir entre un et trois 1 ;

  c. obtenir au moins un 1.

Propriété 49

Soit $p \in [0\,;1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors

$$\mathbf{E}(X) = np \qquad \text{et} \qquad \mathbf{V}(X) = np(1-p).$$

Exemple 50. Un Q.C.M. comporte 5 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte. On suppose qu'on répond au hasard à ce Q.C.M. On note X la variable aléatoire égale au nombre de réponses correctes.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 2 bonnes réponses.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus 2 bonnes réponses.
4. Déterminer l'espérance de X et en donner une interprétation.

V. — Exercices

Exercice 1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X dans chacun des cas suivants.

1. On tire une boule dans une urne contenant 20 boules qui portent le numéro 2 et 30 boules qui portent le numéro 3, et on note X le numéro de la boule obtenue.
2. On lance 3 fois de suite une pièce équilibrée et on note X le nombre de pile obtenus.
3. On effectue deux tirages sans remise dans une urne contenant 4 boules blanches et 6 boules noires et on note X le nombre de boules blanches obtenues en tout.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire dont le loi est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1

1. Déterminer l'univers image de X.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $\{X \leqslant 2\}$.
3. Calculer la probabilité de l'évènement $\{X \geqslant 3\}$.
4. Calculer de deux façons différentes $\mathbf{P}(X > 0)$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire dont le loi est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-5	-1	0	2	7
$\mathbf{P}(X = x_i)$	0,2	0,15	p	0,5	0,1

1. Déterminer l'univers image de X.
2. Déterminer la valeur de p.
3. Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant 2)$.
4. Calculer $\mathbf{P}(X \leqslant 0)$.

Exercice 4. Une entreprise fabrique des machines à laver. Son service qualité note, sur un échantillon de 112 machines à laver prélevées au hasard, au bout de combien de temps survient la première panne.

Par exemple, lorsque la panne arrive au bout de 4 ans et 3 mois, soit au cours de la cinquième année, on note « 5 ans » comme date de la première panne.

Date de la 1re panne (en année)	4	5	7	8	10
Nombre d'appareils	6	11	37	45	13

On suppose que l'échantillon est représentatif de la production de l'entreprise et on note X la variable aléatoire modélisant la date, en année, de la première panne d'une machine à laver prise au hasard.

1. **a.** Déterminer l'univers image de X.

   b. Déterminer la loi de X.
2. Chaque machine bénéficie d'une garantie de 5 ans. Quelle est la probabilité qu'une machine à laver tombe en panne pendant la période de garantie ?
3. Un client acquiert une extension de garantie de 2 ans lors de l'achat de sa machine à laver. Y a-t-il plus d'une chance sur deux pour que sa machine à laver tombe en panne pendant la période de garantie ?

Exercice 5. Une entreprise produit en série des objets qu'elle destine à la vente. Ces objets peuvent présenter deux types de défauts : le défaut S de nature esthétique et le défaut F de fonctionnement. Un objet est déclaré parfait s'il ne présente aucun des deux défauts.

1. On prélève un lot de 200 objets sur la production et on constate que le défaut S est présent sur 16 objets, le défaut F est présent sur 12 objet et que 180 objets sont déclarés parfaits.

   Recopier et compléter le tableau suivant.

	Avec le défaut F	Sans le défaut F	Total
Avec le défaut S			16
Sans le défaut S			
Total			200

2. On admet que la répartition des deux types de défauts, observée dans le lot de 200 objets prélevés, reflète celle de l'ensemble de la production. On admet également que tout objet produit est vendu. On sait que le coût de fabrication d'un objet est 200 € et que le prix de vente de l'objet est fixé à 250 €.

   Si l'objet présente le seul défaut S, l'entreprise accorde au client une réduction de 15% du prix. Si l'objet présente le seul défaut F, l'entreprise réalise les réparations à ses frais pour un coût de 45 €. Si l'objet présente les deux défauts, l'entreprise réalise les réparations à ses frais pour un coût de 58 €. On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard dans la production, associe le bénéfice algébrique, en euro, réalisé par l'entreprise à la vente de cet objet.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer $\mathbf{P}(X \leqslant 0)$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 6. Une entreprise est chargée d'entretenir un distributeur de boisson dans la salle d'attente d'une gare. On sait que 40% des boissons distribuées sont des cafés courts et que 45% sont des cafés longs et le reste des chocolats chauds. Le coût d'une boisson pour l'entreprise est 0,10 €. Le prix de vente d'un café court est 0,40 €, celui d'un café long 0,50 € et celui d'un chocolat 0,60 €.

On note X la variable aléatoire égale au bénéfice réalisé par l'entreprise pour une boisson vendue exprimé en euro.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat obtenu.
3. Si 2500 boissons sont vendues en un mois, quel est le bénéfice peut espérer réaliser par l'entreprise durant ce mois ?

Exercice 7. Une urne contient 8 boules noires et 4 boules bleues. On tire simultanément 3 boules dans l'urne.

1. On note B la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues obtenues.
   - **a.** Quel est l'univers image de B ?
   - **b.** Déterminer la loi de la variable aléatoire B.
   - **c.** En déduire l'espérance de B.
2. On suppose que le joueur paye une mise initiale de 2 euros, puis qu'à l'issue du tirage, il récupère B euros, où B est la variable aléatoire de la question précédente.

   On note G le gain algébrique réalisé par le joueur.
   - **a.** Exprimer G en fonction de B.
   - **b.** Quel est le gain moyen d'un joueur ?
   - **c.** Quelle devrait être la mise initiale pour que le jeu devienne favorable au joueur ?

Exercice 8. Un jeu consiste à tirer, successivement et avec remise, trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Le joueur mise 10 €. Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 €, si exactement deux boules tirées sont rouges, il gagne 15 €, si une seule boule tirée est rouge, il gagne 4 € et, dans tous les autres cas, il ne gagne rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.
3. Inquiet pour son avenir, l'organisateur envisage d'augmenter la mise d'un nombre entier d'euros. Quel montant minimal d'augnemtation faut-il lui conseiller ?

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, et ainsi de suite jusqu'à n. Autrement dit, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne contient k boules qui portent le numéro k. On tire une boule au hasard dans l'urne et on note X son numéro.

1. Combien l'urne contient-elle de boules en tout ?
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer $\mathbf{E}(X)$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
5. Calculer $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 10.

1. Une entreprise fabrique des appareils susceptibles de présenter deux types de pannes : la panne « a » ou la panne « b ». On admet que 5% des appareils sont concernés par la panne « a », 3% par la panne « b » et 1% par les deux pannes. On prélève au hasard un appareil dans la production. On définit l'évènement A (resp. B) « l'appareil présente la panne « a » (resp. « b ») ».
   a. Montrer que la probabilité que cet appareil présente la panne « a » ou la panne « b » est 0,07
   b. Quelle est la probabilité que cet appareil de présente la panne « a » mais pas la panne « b » ?
   c. Quelle est la probabilité que cet appareil ne présente aucune des deux pannes ?
2. L'entreprise fabrique un grand nombre d'appareils par semaine. Chaque appareil a un coût de fabrication de 200 €. La réparation d'une panne « a » coûte 60 € à l'entreprise et la réparation d'une panne « b » coûte 40 €. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque appareil, associe son prix de revient total
   a. Quel est l'univers image de X ?
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et interpréter le résultat obtenu.
   d. Calculer $\mathbf{V}(X)$ et $\sigma(X)$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 11. Dans chacun des cas ci-dessous, dire si la variable X suit l'une des lois usuelles du cours, et si oui préciser laquelle.

1. Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On y effectue 10 tirages successifs avec remise et on note X le nombre de boules blanches obtenues.
2. On tire au hasard une boule dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5 et on note X le résultat obtenu.
3. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire simultanément deux boules dans l'urne et on note X la somme des deux numéros obtenus.
4. On lance 8 fois de suite un dé cubique équilibré et on note X le nombre de 3 obtenus.
5. On lance 8 fois de suite un dé cubique équilibré et on note X le numéro obtenu au troisième lancer.

Exercice 12. Une puce se déplace vers la droite le long d'un axe gradué durant n secondes ($n \in \mathbb{N}^*$). Elle se trouve initialement à l'abscisse 0. À chaque seconde, elle effectue soit un petit saut d'une unité (avec probabilité $\frac{1}{3}$) soit un grand saut de deux unités (avec probabilité $\frac{2}{3}$).

1. On note G le nombre de grands sauts qu'effectue la puce.
   a. Déterminer la loi de G.
   b. En déduire $\mathbf{E}(G)$ et $\mathbf{V}(G)$.
2. Soit X l'abscisse à laquelle se retrouve la puce après les n sauts.
   a. Exprimer X en fonction de G.
   b. En déduire $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une machine permet de jouer au jeu suivant. Le joueur paye une mise initiale de 3 euros, puis la machine effectue n tirages successifs avec remise dans une urne contenant 1 boule blanche et 9 boules noires. La machine donne ensuite au joueur une somme égale (en euros) au double du nombre de boules blanches obtenues.

Déterminer en fonction de n s'il est intéressant de jouer à ce jeu.

Exercice 14. Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On y effectue deux tirages successifs avec remise. On note X le numéro obtenu au premier tirage, Y le numéro obtenu au second tirage et $M = \max(X, Y)$ le plus grand des deux.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Déterminer les fonctions de répartition F_X et F_Y de X et Y.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles pour M.
4. Soit $k \in [\![1, 4]\!]$.
   a. Justifier que les évènements $\{X \leqslant k\}$ et $\{Y \leqslant k\}$ sont indépendants.
   b. Exprimer l'évènement $\{M \leqslant k\}$ en fonction des évènements $\{X \leqslant k\}$ et $\{Y \leqslant k\}$.
   c. En déduire la valeur de $F_M(k)$.
5. Déterminer la loi de M.

Exercice 15. Soit un entier $n \geqslant 2$. Une urne contient initialement 1 boule blanche et $n-1$ boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à avoir sorti toutes les boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la boule blanche.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note N_k l'évènement réalisé lorsque la boule obtenue au k-ième tirage est noire.

1. Quel est l'univers image de X ?
2. Calculer $\mathbf{P}(X = 1)$ et $\mathbf{P}(X = 2)$.
3. Soit un entier $k \in [\![1, n]\!]$.
   a. Après $k-1$ tirages, combien reste-t-il de boules dans l'urne ?
   b. En déduire $\mathbf{P}(N_k \mid N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1})$ et $\mathbf{P}(\overline{N_k} \mid N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1})$.
   c. Exprimer l'évènement $\{X = k\}$ en fonction des événements $N_1, N_2, \cdots, N_n$ et de leurs contraires.
   d. En déduire la loi de X. On reconnaîtra une loi usuelle.
4. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 16. On dispose de deux bassins numérotés 1 et 2. Un poisson se trouve initialement dans le bassin 1. Chaque heure, une trappe s'ouvre entre les deux bassins et le poisson change de bassin avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$ et reste dans le bassin où il se trouve avec une probabilité $\dfrac{3}{4}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le numéro du bassin dans lequel se trouve la bassin après n heures. On a donc $X_0 = 1$.

1. Déterminer la loi de X_1, ainsi que son espérance.
2. a. Déterminer $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)$ et $\mathbf{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 2)$.
   b. En déduire $\mathbf{P}(X_2 = 1)$.
   c. Calculer l'espérance de X_2.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbf{P}(X_n = 1)$ et $b_n = \mathbf{P}(X_n = 2)$. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n.$$
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - b_n$.
   a. Démontrer que u est une suite géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
   b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.
5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $a_n + b_n$.
6. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n en fonction de n.