♦ Chapitre 18. Limites, continuité, dérivabilité

Dans tout le chapitre, les fonctions f considérées sont des fonctions numériques i.e. des fonctions définies sur une partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I. — Limites

1) Limite finie en un point

Dans tout ce paragraphe, x_0 est un réel et f est une fonction numérique définie au voisinage de x_0 i.e. une fonction telle qu'il existe des réels a et b tels que $a < x_0 < b$ et $]a\,;x_0[\cup]x_0\,;b[\,\subset \mathcal{D}_f$.

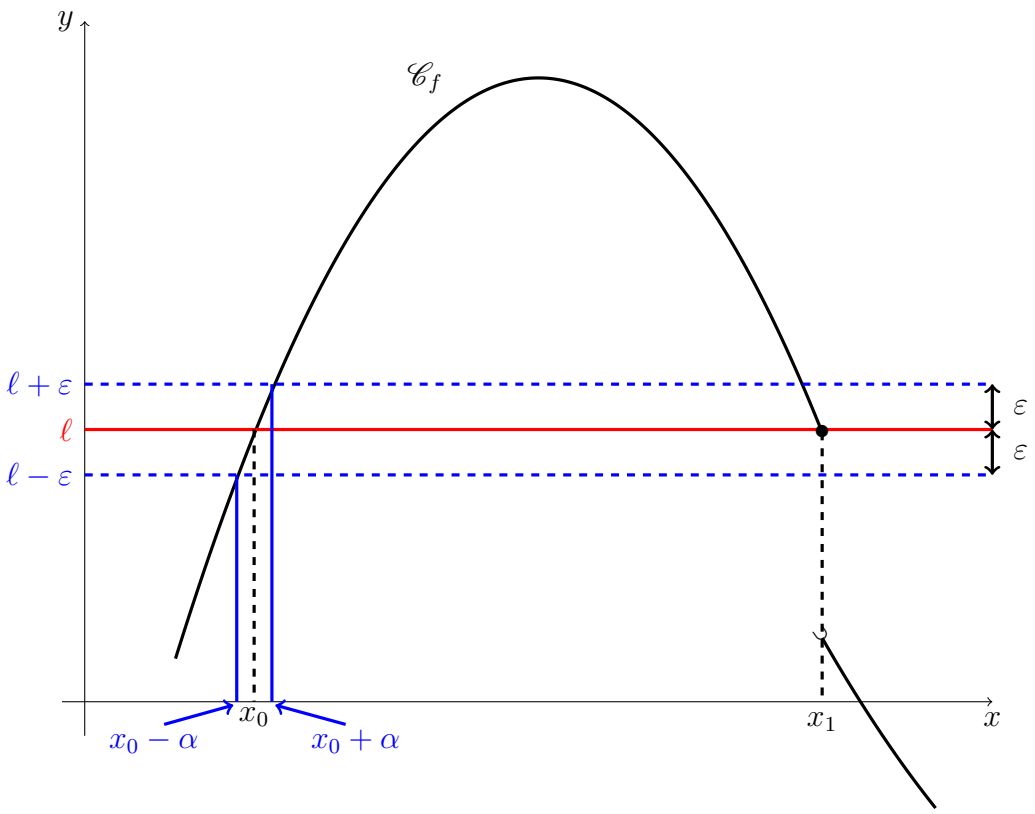
Définition 1

On dit que f **converge** en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Dans ce cas, on dit que f tend vers ℓ en x_0 (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0).
Dans le cas contraire, on dit que f **diverge** en x_0.

Autrement dit, f tend vers ℓ en x_0 si la distance entre $f(x)$ et ℓ peut être rendue aussi petite qu'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de x_0.



La fonction représentée ci-dessus converge en x_0 mais diverge en x_1.

Exemple 2. Soit f la fonction carré. Montrer que f tend vers 9 en 3.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour tout réel x,

$$|f(x) - f(3)| = \left|x^2 - 9\right| = |(x-3)(x+3)| = |x-3|\,|x+3|$$

Notons α le plus petit des deux réels 1 et $\alpha \leqslant \frac{\varepsilon}{7}$. Alors, $\alpha > 0$ et, pour tout réel x tel que $|x-3| \leqslant \alpha$, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$|x+3| = |x-3+6| \leqslant |x-3| + 6 \leqslant \alpha + 6 \leqslant 7$$

donc

$$|f(x) - 9| = |x-3|\,|x+3| \leqslant \alpha \times 7 \leqslant \frac{\varepsilon}{7} \times 7 = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel x tel que $|x-3| \leqslant \alpha$, $|f(x) - 9| \leqslant \varepsilon$ donc $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 9$.

Propriété 3

Si f tend vers un réel ℓ en x_0 alors ℓ est unique.

Démonstration. Supposons que f tendent en x_0 vers ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 \neq \ell_2$. Posons alors $\varepsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3} > 0$.

Comme f tend vers ℓ_1 en x_0, il existe un réel $\alpha_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha_1$, $|f(x) - \ell_1| \leqslant \varepsilon$.

De même, comme f tend vers ℓ_2 en x_0, il existe un réel $\alpha_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha_2$, $|f(x) - \ell_2| \leqslant \varepsilon$.

Notons α le plus petit des deux nombres α_1 et α_2. Alors, $\alpha > 0$ et, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha$,

$$|\ell_1 - \ell_2| = |f(x) - \ell_2 - (f(x) - \ell_1)| \leqslant |f(x) - \ell_2| + |f(x) - \ell_1| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}\,|\ell_1 - \ell_2|$$

donc, en divisant par $|\ell_1 - \ell_2| > 0$, il vient $1 \leqslant \frac{2}{3}$, ce qui est absurde donc $\ell_1 = \ell_2$. □

Définition 4

Si f tend vers un réel ℓ en x_0 alors le nombre ℓ s'appelle **la limite** de f en x_0. On note alors

$$\lim_{x_0} f = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell.$$

2) Limite infinie en un point

Définition 5

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0.

1. On dit que f **diverge** (ou tend) vers $+\infty$ en x_0 (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0) si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant B).$$

   On note alors

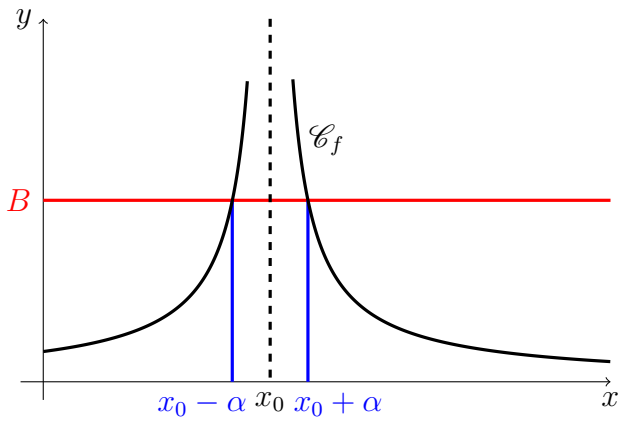
$$\lim_{x_0} f = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty.$$

2. On dit que f **diverge** (ou tend) vers $-\infty$ en x_0 (ou que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_0) si

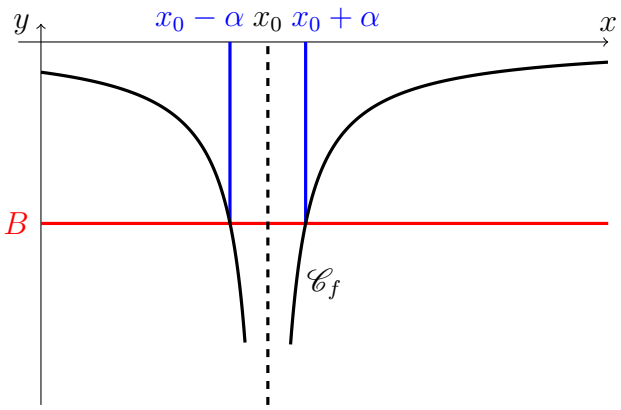
$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant B).$$

   On note alors

$$\lim_{x_0} f = -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty.$$



f diverge vers $+\infty$ en x_0



f diverge vers $-\infty$ en x_0

Exemple 6. On peut démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Définition 7

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0.
Si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote verticale** à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) Limite à droite, limite à gauche

Définition 8

Soit x_0 un réel.

1. On suppose qu'il existe un réel $a < x_0$ tel que $]a\,;x_0[\subset \mathcal{D}_f$.

a. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet le nombre ℓ comme **limite à gauche** en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in]a\,;x_0[\quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

b. On dit que f admet $+\infty$ comme **limite à gauche** en x_0 si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in]a\,;x_0[\quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant B).$$

c. On dit que f admet $-\infty$ comme **limite à gauche** en x_0 si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in]a\,;x_0[\quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant B).$$

Dans tous les cas, si f admet L comme limite à gauche en x_0, on note

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} L \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}]{} L.$$

2. On suppose qu'il existe un réel $b > x_0$ tel que $]x_0\,;b[\subset \mathcal{D}_f$.

a. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet le nombre ℓ comme **limite à droite** en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in]x_0\,;b[\quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

b. On dit que f admet $+\infty$ comme **limite à droite** en x_0 si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in]x_0\,;b[\quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant B).$$

c. On dit que f admet $-\infty$ comme **limite à droite** en x_0 si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in]x_0\,;b[\quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant B).$$

Dans tous les cas, si f admet L comme limite à droite en x_0, on note

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} L \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}]{} L.$$

Exemple 9. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Remarque 10.

1. Si elle existe, la limite à droite (resp. à gauche) est unique.

2. Si f admet une limite à droite ou à gauche égale à $+\infty$ ou à $-\infty$, on dit encore que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à la courbe de f.

Propriété 11

Soit x_0 un réel et f une fonction numérique définie au voisinage de x_0. Soit L un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$.

1. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ alors f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$.
2. Réciproquement,
   a. si f est définie en x_0 et si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
   b. si f n'est pas définie en x_0 et si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

Démonstration.

1. Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha$, $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$.

   En particulier, si $]a\,;x_0[\subset \mathcal{D}_f$ alors, pour tout $x \in]a\,;x_0[$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha$, $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ donc f admet une limite à gauche en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$. De même, si $]x_0\,;b[\subset \mathcal{D}_f$ alors, pour tout $x \in]x_0\,;b[$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha$, $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ donc f admet une limite à droite en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

2. a. Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. Alors, il existe un réel $\alpha_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in]a\,;x_0[$, si $|x - x_0| \leqslant \alpha_1$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. De même, il existe un réel $\alpha_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0\,;b[$, si $|x - x_0| \leqslant \alpha_2$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Notons α le plus petit des deux nombres α_1 et α_2. Alors, pour tout $x \in]a\,;x_0[\cup]x_0\,;b[$, si $|x - x_0| \leqslant \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. De plus, cette inégalité reste vraie pour $x = x_0$ car $|f(x_0) - f(x_0)| = 0 \leqslant \varepsilon$. Ainsi, pour tout $x \in]a\,;b[$, si $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

   b. Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$. Par le même raisonnement, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]a\,;x_0[\cup]x_0\,;b[$, si $|x - x_0| \leqslant \alpha$ alors $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Comme f n'est pas définie en x_0, on en conclut que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

□

Exemple 12. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Les fonctions f et g admettent-elles des limites à gauche en 0 ? des limites à droite en 0 ? des limites en 0 ?

Solution.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x+1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$ donc f admet des limites à droite et à gauche en 0. De plus, $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to O^+} f(x) = f(0)$ donc f admet une limite en 0 et $\lim\limits_{x\to 0} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x+1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$ donc g admet des limites à droite et à gauche en 0. De plus, $g(0) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \neq g(0)$ et ainsi g n'a pas de limite en 0.

4) Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

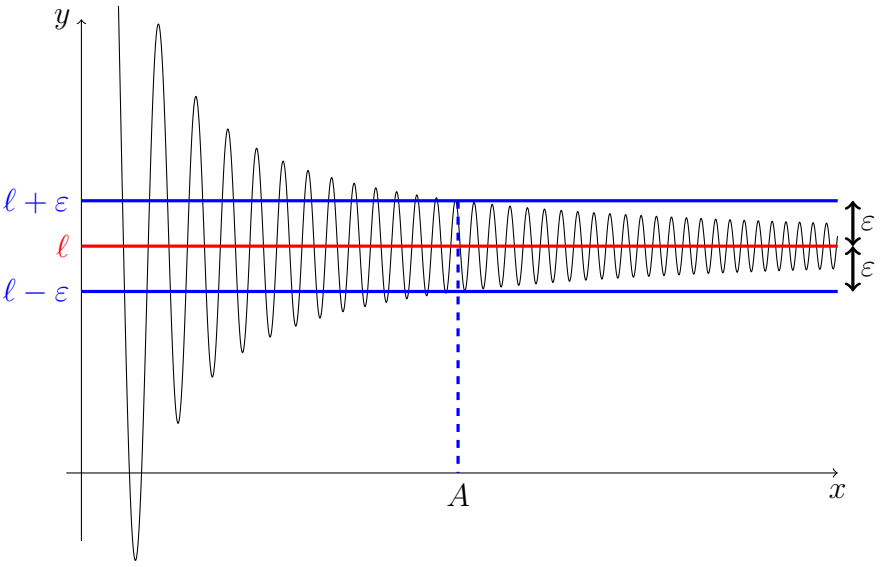
a) Limite en $+\infty$

Définition 13

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $+\infty$ i.e. telle qu'il existe un réel a tel que $[a\,;+\infty[\,\subset \mathcal{D}_f$. On dit que f **converge** en $+\infty$ s'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (x \geqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Dans ce cas, ℓ est unique et on dit que f tend vers ℓ en $+\infty$.
Dans le cas contraire, on dit que f **diverge** en $+\infty$.



La fonction représentée ci-dessus converge en $+\infty$

Exemple 14.

1. Montrer que $f : x \longmapsto \frac{2x^2+1}{x^2}$ tend vers 2 en $+\infty$.
2. Montrer que la fonction sinus diverge en $+\infty$.
   On peut montrer que, de même, cos diverge en $+\infty$.

Solution.

1. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) - 2 = \frac{2x^2+1}{x^2} - 2 = \frac{2x^2+1-2x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Posons $A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Alors, pour tout réel $x \geqslant A$, par croissance de la fonction carré sur $]0\,;+\infty[$, $x^2 \geqslant \frac{1}{\varepsilon} > 0$ et, par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x^2} \leqslant \varepsilon$. Ainsi, il existe un réel A tel que, pour tout réel $x > A$, $|f(x) - 2| \leqslant \varepsilon$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$.
2. Supposons que la fonction sinus converge vers un réel ℓ en $+\infty$. Alors, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition, il existe un réel A tel que, pour tout réel $x \geqslant A$, $|\sin(x) - \ell| \leqslant \frac{1}{2}$. Dès lors, pour tout réel $x > A$, $-\frac{1}{2} \leqslant \ell - \sin(x) \leqslant \frac{1}{2}$ donc $\sin(x) - \frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \sin(x) + \frac{1}{2}$.
   Or, il existe un entier n tel que $\frac{\pi}{2} + 2n\pi > 0$ donc $\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) - \frac{1}{2} \leqslant \ell$ i.e. $\ell \geqslant \frac{1}{2}$ et il existe un entier k tel que $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi > 0$ donc $\ell \leqslant \sin(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + \frac{1}{2}$ donc $\ell \leqslant -\frac{1}{2}$. Ainsi, $\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{2}$ ce qui est absurde. Ainsi la fonction sinus en diverge.

Propriété 15

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $+\infty$. Si f tend vers un réel ℓ en $+\infty$ alors ℓ est unique.

Démonstration. La démonstration de l'unicité de la limite est la même que dans le cas où x tend vers $x_0 \in \mathbb{R}$. $\square$

Définition 16

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $+\infty$. Si f tend vers un réel ℓ en $+\infty$ alors le nombre ℓ s'appelle **la limite** de f en $+\infty$. On note alors

$$\lim_{+\infty} f = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell.$$

Définition 17

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $+\infty$. Si f tend vers un réel ℓ en $+\infty$ alors on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Exemple 18. D'après l'exemple 14, si $f : x \longmapsto \frac{2x^2+1}{x^2}$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Définition 19

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $+\infty$.

1. On dit que f **tend** (ou diverge) vers $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant B).$$

Dans ce cas, on écrit alors

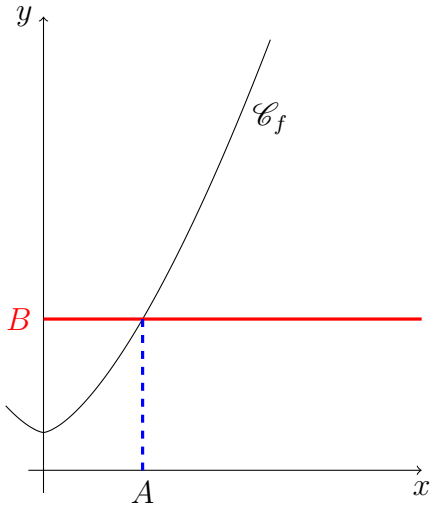
$$\lim_{+\infty} f = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

2. On dit que f **tend** (ou diverge) vers $-\infty$ en $+\infty$ si

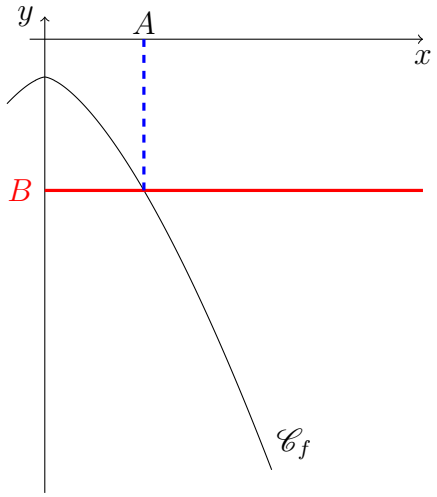
$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant B).$$

Dans ce cas, on écrit alors

$$\lim_{+\infty} f = -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty.$$



f diverge vers $+\infty$ en $+\infty$



f diverge vers $-\infty$ en $+\infty$.

Exemple 20. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Solution. Soit $B \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $x \geqslant \sqrt{B}$, par croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$, $x^2 \geqslant B$ donc, par définition, $\lim\limits_{+\infty} x^2 = +\infty$.

b) Limite en $-\infty$

Définition 21

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $-\infty$ i.e. telle qu'il existe un réel a tel que $]-\infty\,;a] \subset \mathcal{D}_f$. On dit que f **converge** en $-\infty$ s'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (x \leqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Dans ce cas, on dit que f tend vers ℓ en $-\infty$.
Dans le cas contraire, on dit que f **diverge** en $-\infty$.

Propriété 22

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $-\infty$. Si f tend vers un réel ℓ en $-\infty$ alors ℓ est unique.

Démonstration. La démonstration de l'unicité de la limite est la même que dans le cas où x tend vers $x_0 \in \mathbb{R}$. □

Définition 23

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $-\infty$. Si f tend vers un réel ℓ en $-\infty$ alors le nombre ℓ s'appelle **la limite** de f en $+\infty$. On note alors

$$\lim_{-\infty} f = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell.$$

Définition 24

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $-\infty$. Si f tend vers un réel ℓ en $-\infty$ alors on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

Définition 25

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $-\infty$.

1. On dit que f **tend** (ou diverge) vers $+\infty$ en $-\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant B).$$

Dans ce cas, on écrit alors

$$\lim_{-\infty} f = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty.$$

2. On dit que f **tend** (ou diverge) vers $-\infty$ en $-\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant B).$$

Dans ce cas, on écrit alors

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty.$$

5) Limites des fonctions usuelles

Fonctions constantes

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} c = c$

Fonctions puissances

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

5. Si n est pair, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

6. Si n est impair, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Fonctions exponentielles et logarithme népérien

Soit un réel $a > 0$ différent de 1.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ si } a < 1 \\ +\infty \text{ si } a > 1 \end{cases}$

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty \text{ si } a < 1 \\ 0 \text{ si } a > 1 \end{cases}$

6) Limites et opérations

a) Opérations algébriques

Dans tous les tableaux suivants, f et g sont deux fonctions et ℓ et ℓ' sont deux réels. Les règles suivantes sont valables lorsque x tend vers $+\infty$, vers $-\infty$ ou vers un réel x_0 (éventuellement à droite ou à gauche).

1. Limite d'une somme

si $f(x)$ tend vers	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si $g(x)$ tend vers	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f(x)+g(x)$ tend vers	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Remarque. L'étude de $f(x)-g(x)$ se ramène à celle d'une somme en écrivant la différence sous la forme $f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$

2. Limite d'un produit

si $f(x)$ tend vers	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si $g(x)$ tend vers	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
alors $f(x)g(x)$ tend vers	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Remarque. L'étude de $kg(x)$ où k est un réel est un cas particulier de ce qui précède en prenant pour f la fonction constante égale à k.

3. Limite d'un quotient

- Cas où $g(x)$ ne tend pas vers 0

si $f(x)$ tend vers	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
et si $g(x)$ tend vers	$\ell'\neq 0$	∞	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	∞
alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

- Cas où $g(x)$ tend vers 0

si $f(x)$ tend vers	$\ell>0$	$+\infty$	$\ell>0$	$+\infty$	$\ell<0$	$-\infty$	$\ell<0$	$-\infty$	0
et si $g(x)$ tend vers	0^+	0^+	0^-	0^-	0^+	0^+	0^-	0^-	0
alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

b) Composition

Propriété 26

Les lettres a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. On considère une fonction u définie au voisinage de a et une fonction v définie au voisinage de b. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et que $\lim\limits_{X\to b} v(X) = c$. Alors, $\lim\limits_{x\to a}(v\circ u)(x) = c$.

Démonstration. On démontre le résultat dans le cas où a, b et c sont des réels. Le principe est le même dans les autres cas.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{X\to b} v(X) = c$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $X \in \mathcal{D}_v$ tel que $|X - b| \leqslant \delta$, $|v(X) - c| \leqslant \varepsilon$. De même, comme $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$, il existe un réel α tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_u$ tel que $|x - a| \leqslant \alpha$, $|u(x) - b| \leqslant \delta$. Dès lors, pour tout $x \in \mathcal{D}_{v\circ u}$ tel que $|x - a| \leqslant \alpha$, $|u(x) - b| \leqslant \delta$ donc $|v(u(x)) - c| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $(v\circ u)(x) \xrightarrow[x\to a]{} c$. □

Exemple 27. Dans chaque cas, déterminer la limite de f en a.

1) $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, $a = +\infty$ **2)** $f : x \longmapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$, $a = +\infty$ **3)** $f : x \longmapsto \sqrt{1 - 3x}$, $a = -\infty$

4) $f : x \longmapsto x^x$, $a = +\infty$ **5)** $f : x \longmapsto \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)}$, $a = +\infty$ **6)** $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x^2)}{x^2}$, $a = 0$

Solution.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{X\to1} \ln(X) = \ln(1) = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - 3x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1 - 3x} = +\infty$.

4) Pour tout réel $x > 0$, $x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. Or, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^x = +\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)} = 0$.

6) $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to0} \ln(x^2) = -\infty$. Or, $\lim\limits_{x\to0} x^2 = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x^2)}{x^2} = -\infty$.

c) Quelques formes indéterminées usuelles

Propriété 28

1. La limite d'un polynôme non nul en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite de son monôme de plus haut degré.
2. La limite d'une fonction rationnelle non nulle (i.e. un quotient de deux polynômes) en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré.

Démonstration.

1. Considérons un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ avec $c_n \neq 0$. Alors, pour tout $x > 0$,

$$P(x) = c_n x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{c_n} x^{k-n} = c_n x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{c_n x^{n-k}}.$$

Or, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $n-k > 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{c_k}{c_n x^{n-k}} = 0$ et, de plus, $\lim\limits_{+\infty} \frac{c_n}{c_n x^{n-n}} = \lim\limits_{+\infty} 1 = 1$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{c_n} x^{k-n} = 1$. Par ailleurs, $x \longmapsto c_n x^n$ admet une limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ selon la valeur de c_n donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} c_n x^n$.

La démonstration est identique en $-\infty$.

2. Si $P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ et $Q = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ sont deux polynômes non nuls tels que $c_n \neq 0$ et $a_d \neq 0$ alors, pour tout réel $x > 0$ tel que $Q(x) \neq 0$,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c_n x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{c_n x^{n-k}}}{a_d x^d \sum_{j=0}^{d} \frac{a_j}{a_d x^{d-j}}} = \frac{c_n x^n}{a_d x^d} \times \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{c_n x^{n-k}}}{\sum_{j=0}^{d} \frac{a_j}{a_d x^{d-j}}} = \frac{c_n}{a_d} x^{n-d} \frac{c_n x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{c_n x^{n-k}}}{a_d x^d \sum_{j=0}^{d} \frac{a_j}{a_d x^{d-j}}}.$$

Or, comme précédemment, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{c_n x^{n-k}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{j=0}^{d} \frac{a_j}{a_d x^{d-j}} = 1$ donc, comme précédemment, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{c_n}{a_d} x^{n-d}$.

La démonstration est identique en $-\infty$.

□

⚠ Ceci n'est valable qu'aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

Exemple 29. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto -2x^3 + x^2 - 20x - 7$ **2.** $g : x \longmapsto 1 - \mathrm{e}^{2x} + 7\mathrm{e}^{3x}$ **3.** $h : x \longmapsto \dfrac{x^3 + x - 1}{x^2 + x + 1}$

Solution.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3 = +\infty$.

2. Pour tout réel x, $g(x) = 1 - (\mathrm{e}^x)^2 + 7(\mathrm{e}^x)^3$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} 1 - X + 7X^3 = \lim\limits_{X\to+\infty} 7X^3 = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{X\to0} 1 - X + 7X^3 = 1$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

Méthode 30

Pour lever une indétermination portant sur la limite d'une fraction rationnelle au voisinage d'un réel r, on peut factoriser le numérateur et le dénominateur par $x - r$.

Exemple 31. Déterminer la limite en 1 de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$.

Solution. Comme le polynôme X^2-3X+2 s'annule en 1, il peut se factoriser par $X-1$. En l'occurrence, $X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$. De même, le polynôme X^3-1 s'annule en 1 donc il se factorise par $X-1$. En l'occurrence, $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$. Ainsi, pour tout réel $x \neq 1$,

$$f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+2)}=\frac{x-2}{x^2+x+1}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 1} x-2=-1$ et $\lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1=3$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\frac{1}{3}$.

Méthode 32

Pour lever une indétermination dans une expression de la forme $\sqrt{A(x)}-\sqrt{B(x)}$, on peut multiplier et diviser par la quantité conjuguée $\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}$.

Exemple 33. Déterminer, dans chacun des cas suivants, la limite de f en $+\infty$.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$ **2.** $f : x \longmapsto \sqrt{\mathrm{e}^{4x}+3}-\mathrm{e}^{2x}$

Solution.

1. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+2}^2-\sqrt{x+1}^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{x+2-(x+1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$. Par somme et quotient, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\left(\sqrt{\mathrm{e}^{4x}+3}-\mathrm{e}^{2x}\right)\left(\sqrt{\mathrm{e}^{4x}+3}+\mathrm{e}^{2x}\right)}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}+3}+\mathrm{e}^{2x}} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}+3}^2-(\mathrm{e}^{2x})^2}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}+3}+\mathrm{e}^{2x}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{4x}+3-\mathrm{e}^{4x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}+3}+\mathrm{e}^{2x}} = \frac{3}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}+3}+\mathrm{e}^{2x}} \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{4x} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{4x}+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\mathrm{e}^{4x}+3} = +\infty$ et, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\mathrm{e}^{4x}+3}+\mathrm{e}^{2x} = +\infty$. Par quotient, on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

7) Limites et ordre

Propriété 34

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. On suppose que f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a, convergeant en a et telles que, pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$. Alors,

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x).$$

En particulier, si f est minorée (resp. majorée) par m (resp. M) alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geqslant m$ (resp. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant M$).

Démonstration. Notons ℓ la limite de f et L la limite de g en a. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell > L$.

Par hypothèse, il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $f(x) \leqslant g(x)$.

Comme $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, il existe un réel $\alpha_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in I\setminus\{a\}$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha_1$, $|f(x)-\ell| \leqslant \frac{\ell-L}{3}$.

De même, comme $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$, il existe un réel $\alpha_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha_2$, $|g(x)-L| \leqslant \frac{\ell-L}{3}$.

Notons α le plus petit des deux nombres α_1 et α_2. Alors, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, $|f(x)-\ell| \leqslant \frac{\ell-L}{3}$ donc $f(x)-\ell \geqslant -\frac{\ell-L}{3}$ i.e. $f(x) \geqslant \frac{2\ell+L}{3}$ et $|g(x)-L| \leqslant \frac{\ell-L}{3}$ donc $g(x)-L \leqslant \frac{\ell-L}{3}$ i.e. $g(x) \geqslant \frac{\ell+2L}{3}$. Dès lors, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$,

$$\frac{2\ell+L}{3} \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant \frac{\ell+2L}{3}$$

donc $2\ell + L \leqslant \ell + 2L$ i.e. $\ell \leqslant L$. C'est absurde donc on conclut que $\ell \leqslant L$. □

⚠ Même si $f(x) < g(x)$ pour tout réel x au voisinage de a, on ne peut pas en déduire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Par exemple, pour tout réel $x > 0$, $1 - \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x}$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x}$.

Théorème 35. — Théorème d'encadrement (ou « des gendarmes »)

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f, g et h des fonctions définies dans un voisinage V de a (contenant a si f est définie en a). On suppose que

1. pour tout $x \in V$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$;
2. les fonctions g et h convergent en a vers le même réel ℓ.

Alors, f converge vers ℓ en a.

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas où a est un réel. Le principe est le même dans les autres cas (et la démonstration est identique à celle du **Théorème 51** du chapitre 16).

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, il existe un réel $\alpha_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, si $|x-a| \leqslant \alpha_1$ alors $|g(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$ donc $g(x)-\ell \geqslant -\varepsilon$.

De même, comme $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, il existe un réel $\alpha_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, si $|x-a| \leqslant \alpha_2$ alors $|h(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$ donc $h(x)-\ell \leqslant \varepsilon$.

Notons α le plus petit des deux réels α_1 et α_2. Alors, pour tout $x \in V$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$,

$$-\varepsilon \leqslant g(x) - \ell \leqslant f(x) - \ell \leqslant h(x) - \ell \leqslant \varepsilon$$

donc $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On conclut donc que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

□

Exemple 36. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par$f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$.

Déterminer la limite de f en 0.

Démonstration. Pour tout réel $x \neq 0$, $-1 \leqslant \sin(\frac{1}{x}) \leqslant 1$ donc, comme $x^2 \geqslant 0$, $-x^2 \leqslant x^2 \sin(\frac{1}{x}) \leqslant x^2$. Or, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = \lim\limits_{x \to 0} -x^2 = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. □

Théorème 37. — Théorème de comparaison

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f et g des fonctions définies dans un voisinage V de a (contenant a si f est définie en a). On suppose que, pour tout réel $x \in V$, $f(x) \leqslant g(x)$.

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas où a est un réel. Le principe est le même dans les autres cas (et la démonstration est identique à celle du **Théorème 53** du chapitre 16).

1. Supposons que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$. Soit $B \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un réel α tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, $f(x) \geqslant B$. Dès lors, pour tout $x \in V$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, $B \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
2. Supposons que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$. Soit $B \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un réel α tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, $g(x) \leqslant B$. Dès lors, pour tout $x \in V$ tel que $|x-a| \leqslant \alpha$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant B$ donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

□

Exemple 38. Étudier le comportement en $-\infty$ et de $+\infty$ de $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2+\cos(x)}$.

Solution. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $1 \leqslant 2 + \cos(x) \leqslant 3$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit que $\frac{1}{2+\cos(x)} \geqslant \frac{1}{3}$.

Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{2+\cos(x)} \geqslant \frac{x}{3}$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{3} = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De même, pour tout réel $x < 0$, $\frac{x}{2+\cos(x)} \leqslant \frac{x}{3}$. Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = -\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème 39. — Théorème de la limite monotone (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]a\,;b[$ où a et b sont des réels ou $-\infty$ (pour a) ou $+\infty$ (pour b).

1. On suppose que f est croissante sur I.

a. La fonction f admet une limite L à droite en a. De plus, $L \in \mathbb{R}$ si f est minorée sur I et $L = -\infty$ sinon.

b. La fonction f admet une limite L' à gauche en b. De plus, $L' \in \mathbb{R}$ si f est majorée sur I et $L = +\infty$ sinon.

2. On suppose que f est décroissante sur I.

a. La fonction f admet une limite L à droite en a. De plus, $L \in \mathbb{R}$ si f est majorée sur I et $L = +\infty$ sinon.

b. La fonction f admet une limite L' à gauche en b. De plus, $L' \in \mathbb{R}$ si f est minorée sur I et $L = -\infty$ sinon.

8) Croissances comparées

Théorème 40. — Croissance comparées

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{x^\alpha} = +\infty$

2. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n \mathrm{e}^{\lambda x} = 0$

3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\lambda} = 0$

4. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^\lambda (\ln(x))^n = 0$

Démonstration.

1. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} - x$. Alors, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions deux fois dérivables et, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$ et $f''(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Or, pour tout $x \geqslant 0$, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 = 1$ donc $f''(x) \geqslant 0$. Ainsi, f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $f'(0) = 1$, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 1$. Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc, comme $f(0) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant 0$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^x \geqslant \frac{x^2}{2} - x$. Dès lors, pour tout réel $x > 0$, $\frac{\mathrm{e}^x}{x} \geqslant \frac{x}{2} - 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} - 1 = +\infty$ donc, par le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

Si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0^+$. Or, comme $\lambda > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda x = +\infty$ donc, comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\lambda x} = +\infty$. Par quotient, on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$.

Si $\alpha = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{x^\alpha} = \mathrm{e}^{\lambda x}$ donc, comme précédemment, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{x^\alpha} = +\infty$.

Si $\alpha > 0$ alors, pour tout réel $x > 0$, $\frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{x^\alpha} = \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\alpha}x}}{x}\right)^\alpha = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\alpha \times \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\alpha}x}}{\frac{\lambda}{\alpha}x}\right)^\alpha$. Or, comme $\frac{\lambda}{\alpha} > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\lambda}{\alpha}x = +\infty$ et, par ce qui précède, $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\alpha}x}}{\frac{\lambda}{\alpha}x} = +\infty$. Enfin, comme $\alpha > 0$, $\lim\limits_{Y\to+\infty} Y^\alpha = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{\alpha}x}}{\frac{\lambda}{\alpha}x}\right)^\alpha = +\infty$, et ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{x^\alpha} = +\infty$ car $(\frac{\lambda}{\alpha})^\alpha > 0$.

2. Pour tout réel x, $x^n e^{\lambda x} = (-1)^n(-x)^n \times \dfrac{1}{e^{-\lambda x}} = \dfrac{(-1)^n}{\frac{e^{\lambda(-x)}}{(-x)^n}}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et, par le point **1.**, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^{\lambda X}}{X^n} = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{(-x)^n} = +\infty$ et ainsi, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^{\lambda x} = 0$.

3. Pour tout réel $x > 1$, $\dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\lambda} = \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{\left(e^{\ln(x)}\right)^\lambda} = \dfrac{1}{\frac{\left(e^{\ln(x)}\right)^\lambda}{(\ln(x))^\alpha}}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et, par le point **1.**, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^{\lambda X}}{X^\alpha} = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(e^{\ln(x)}\right)^\lambda}{(\ln(x))^\alpha} = +\infty$ et, finalement, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\lambda} = 0$.

4. Pour tout réel $x > 0$,

$$x^\lambda(\ln(x))^n = (e^{\ln(x)})^\lambda(\ln(x))^n = (\ln(x))^n e^{\lambda\ln(x)}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ et, d'après le point **2.**, $\lim\limits_{X\to-\infty} X^n e^{\lambda X} = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to0^+} x^\lambda(\ln(x))^n = 0$.

□

Exemple 41. Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de f en a.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{x^{2025}}$, $a = +\infty$ **2.** $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, $a = +\infty$ **3.** $f : x \longmapsto \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}$, $a = 0$

4. $f : x \longmapsto e^x - \ln(x)$, $a = +\infty$ **5.** $f : x \longmapsto x^x$, $a = 0^+$ **6.** $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+e^x)}{x^3}$, $a = +\infty$

Solution.

1. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{2025}} = +\infty$.

2. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{\ln(x)}{x^{\frac{1}{2}}}$ donc, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

3. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 e^{-\frac{1}{x^2}}$. Or, $\lim\limits_{x\to0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to-\infty} X^2 e^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = 0$.

4. Pour tout réel $x > 0$, $e^x - \ln(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$ et finalement, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - \ln(x) = +\infty$.

5. Pour tout réel $x > 0$, $x^x = e^{x\ln(x)}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{X\to0} e^X = e^0 = 1$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to0} x^x = 1$.

6. Pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{\ln(e^x(e^{-x}+1))}{x^3} = \frac{\ln(e^x) + \ln(1+e^{-x})}{x^3} = \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1+e^{-x})}{x^3}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$. Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + e^{-x} = 1$ donc, comme $\lim\limits_{X\to1} \ln(X) = \ln(1) = 0$, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$. Par quotient et somme, on conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

II. — Continuité

1) Continuité en un point

Définition 42

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f est **continue en** x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Interprétation graphique. Graphiquement, la continuité d'une fonction f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ se traduit par le fait que la courbe de f ne présente pas de saut en x_0.

Exemple 43. Étudier la continuité en 0 des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Solution.

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x + 1 = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 - x^2 = 1$ et $f(0) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ et ainsi f est continue en 0.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x - 1 = -1$ et $f(0) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq f(0)$ donc f n'est pas continue en 0.

Remarque 44.

1. Si x_0 est une borne de I, on ne considère que la limite à droite ou à gauche.
2. Dire que f est continue en $x_0 \in I$ est équivalent à dire que $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.
3. La question de la continuité d'une fonction ne se pose qu'en un réel x_0 en lequel la fonction est définie.
4. Si f n'est pas continue en $x_0 \in I$, on dit que f est **discontinue** en x_0.

Propriété 45. — Opérations algébriques

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f et g sont continues en x_0. Alors,

1. pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0 ;
2. la fonction fg est continue en x_0 ;
3. si $g(x_0) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0.

Démonstration.

1. Soit λ et μ deux réels. Par hypothèse, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ donc, par produit et somme, $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda f(x_0) + \mu g(x_0)$ i.e. $\lim\limits_{x \to x_0} (\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda f + \mu g)(x_0)$ donc $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0.
2. Par hypothèse, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0)$ i.e. $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = (fg)(x_0)$ donc fg est continue en x_0.

3. Supposons que $g(x_0) \neq 0$. Alors, comme $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$, il existe un voisinage de x_0 sur lequel g ne s'annule pas donc $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont bien définie au voisinage de x_0. De plus, par quotient, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(x_0)}$ i.e. $\lim\limits_{x \to x_0} (\frac{1}{g})(x) = (\frac{1}{g})(x_0)$ donc $\frac{1}{g}$ est continue en x_0. Enfin, $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ donc, par le point **2.**, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 car f et $\frac{1}{g}$ le sont.

□

Propriété 46. — Composition

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$. Si u est continue en x_0 et v est continue en $u(x_0)$ alors $v \circ u$ est continue en x_0.

Démonstration. Supposons que u est continue en x_0 et v est continue en $u(x_0)$. Alors, $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u(x_0)$ et $\lim\limits_{X \to u(x_0)} v(X) = v(u(x_0))$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to x_0} v(u(x)) = v(u(x_0))$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to x_0} (v \circ u)(x) = (v \circ u)(x_0)$. Ainsi, $v \circ u$ est continue en x_0. □

2) Continuité sur un intervalle

Définition 47

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point $x_0 \in I$.

Interprétation graphique. Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I inclus dans $\mathcal{D}_f$ se traduit par le fait qu'on peut « tracer la courbe sans lever le crayon ». Autrement dit, la continuité de f se traduit par le fait que la courbe $\mathscr{C}_f$ ne présente pas de saut aux abscisses en lesquelles f est définie.

Propriété 48. — Opérations algébriques

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. On suppose que f et g sont continues sur I. Alors,

1. pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur I ;

2. la fonction fg est continue sur I ;

3. si g ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la **Propriété 45**. □

Propriété 49. — Composition

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$. Si u est continue en sur I et v est continue sur J alors $v \circ u$ est continue sur I.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la **Propriété 46**. □

Propriété 50

Toutes les fonctions de références sont continues sur leur ensemble de définition et, par conséquent, toute fonction obtenue par opérations (algébriques et composition) à partir des fonctions de référence est continue sur tout intervalle de son ensemble de définition.

Démonstration. La démonstration de cette propriété sera une conséquence de la **Propriété 80** (voir la *Remarque* 81). □

Exemple 51.

1. La fonction $f_1 : x \longmapsto \frac{x}{x^2+1}$ est une fonction rationnelle (quotient de 2 polynômes) définie sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $f_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^x + 5x - 1$ est une somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $f_3 : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}$ est un quotient de fonctions continues définies sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc elle est continue sur $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$. Dans ce cas, on peut dire qu'elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
4. La fonction $f_4 : x \longmapsto \ln(x^2+1)$ est la composée de la fonction $u : x \longmapsto x^2+1$ continue sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $v = \ln$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc $f_4 = v \circ u$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Propriété 52

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite réelle dont les termes appartiennent à I à partir d'un certain rang. Si f est continue en ℓ et si (u_n) converge vers ℓ alors la suite $(f(u_n))$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n).$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe un rang N_1 tel que, pour tout entier $n \geqslant N_1$, $u_n \in I$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en ℓ, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in I$ tel que $|x-\ell| \leqslant \alpha$, $|f(x) - f(\ell)| \leqslant \varepsilon$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc il existe un entier N_2 tel que, pour tout entier $n \geqslant N_2$, $|u_n - \ell| \leqslant \alpha$. Notons N le plus grand des deux nombres N_1 et N_2. Alors, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n \in I$ et $|u_n - \ell| \leqslant \alpha$ donc $|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$. □

3) Prolongement par continuité

Propriété 53

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. On suppose que f est une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ et que f n'est pas définie en x_0. Si f converge vers un réel ℓ en x_0 alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur I par

$$\forall x \in I \quad \tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est continue en x_0.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition. □

Définition 54

Avec les notations de la propriété précédente, la fonction $\tilde{f}$ est appelée le **prolongement par continuité** de f en x_0.

Exemple 55.

1. Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On a vu dans l'exemple 36 que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ donc $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   est le prolongement par continuité de f en 0.

2. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ admet un prolongement par continuité en 0.
3. Est-ce la cas de la fonction $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$?

Solution.

2. La fonction g n'est pas définie en 0. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0$. Ainsi, la fonction $\tilde{g}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

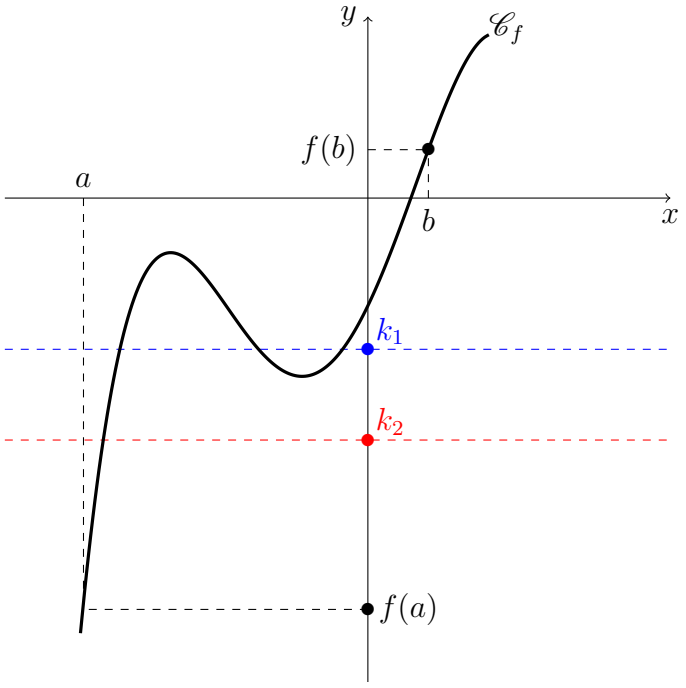
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   est le prolongement par continuité de g en 0.
3. $\lim\limits_{x \to 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = +\infty$. Ainsi, h n'a pas de limite finie en 0 donc h n'admet pas de prolongement par continuité en 0.

4) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 56. — Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors, $f(I)$ est un intervalle.
Ainsi, pour tous éléments a et b de I tels que $a \leqslant b$ et pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.



Corollaire 57

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si f change de signe sur I alors f s'annule sur I. De façon équivalente, si f ne s'annule pas sur I alors f est de signe constant sur I.

Démonstration. Supposons que f change de signe sur I. Alors, il existe deux réels a et b de I tels que $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$. Ainsi, 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ donc, comme f est continue sur I, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$. Ainsi, f s'annule sur I.

Par contraposée, si f ne s'annule pas sur I alors f ne change pas de signe sur I. □

Exemple 58. Démontrer que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $[1\,;2]$.

Solution. Considérons la fonction $fx \longmapsto x^3 + x - 3$. Alors, f est un polynôme donc f est continue $\mathbb{R}$. De plus, $f(1) = -1 \leqslant 0$ et $f(2) = 7 \geqslant 0$ donc $0 \in [f(0)\,;f(2)]$. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha \in [0\,;2]$ tel que $f(\alpha) = 0$ donc l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [1\,;2]$.

Remarque 59. Le théorème 56 et le corollaire 57 s'étendent aux cas où a et/ou b n'appartien(nen)t pas à I mais sont/est des/une borne(s) de I. Il suffit alors dans les énoncés de remplacer $f(a)$ et/ou $f(b)$ par $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et/ou $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ (ces limites étant éventuellement respectivement des limites à droite et/ou à gauche).

Exemple 60. Démontrer que l'équation $x\mathrm{e}^x = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Solution. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$. Alors, f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues. De plus, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, $1 \in \left]\lim\limits_{-\infty}\,;\lim\limits_{+\infty} f\right[$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) une réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 1$. Ainsi, l'équation $x\mathrm{e}^x = 1$ possède (au moins) une solution dans $\mathbb{R}$.

5) Théorème des bornes atteintes

Théorème 61. — Théorème des bornes atteintes (admis)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction continue sur le segment $[a\,;b]$ alors f est bornée sur $[a\,;b]$ et elle atteint ses bornes i.e. il existe $u \in [a\,;b]$ et $v \in [a\,;b]$ tel que, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$.

⚠ Le théorème des bornes atteintes n'est vrai que sur un segment et il n'est plus vrai sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert. Par exemple, la fonction inverse est continue sur $]0\,;1]$ et pourtant elle n'est pas majorée sur cet intervalle.

Exemple 62. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x\sin(x)}{\mathrm{e}^x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Solution. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc, en multipliant par $x \geqslant 0$, $-x \leqslant x\sin(x) \leqslant x$ et, en divisant par $\mathrm{e}^x > 0$, $-\frac{x}{\mathrm{e}^x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}^x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = 0$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x}{\mathrm{e}^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi, il existe un réel A tel que, pour tout $x \geqslant A$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit et quotient de fonctions continues donc, par le théorème des bornes atteintes, f est bornée sur le segment $[0\,;A]$. Ainsi, il existe deux réel m_1 et M_1 tel que, pour tout $x \in [0\,;A]$, $m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1$. En posant $m = \min(-1, m_1)$ et $M = \max(1, M_1)$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ donc f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

6) Théorème de la bijection continue

a) Théorème de la bijection continue

Théorème 63. — Théorème de la bijection continue

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors, f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. De plus, la bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f.

Démonstration. Comme f est strictement monotone, elle est injective donc elle réalise une bijection de I sur $f(I)$. De plus, comme f est continue, $f(I)$ est un intervalle par le théorème des valeurs intermédiaires.

Supposons que f est strictement croissante sur I. Considérons y_1 et y_2 deux éléments de $f(I)$ tels que $y_1 < y_2$. Notons $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Si $x_1 \geqslant x_2$ alors, comme f est croissante sur I, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ i.e. $y_1 \geqslant y_2$, ce qui est contradictoire. Ainsi, $x_1 < x_2$ i.e. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ donc f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$. La démonstration est identique si f est strictement décroissante sur I.

Soit $y_0 \in f(I)$. Supposons que y_0 n'est pas une borne de l'intervalle $f(I)$. Alors, il existe un segment $[a\,;b] \subset f(I)$ tel que $a < y_0 < b$. Comme f^{-1} est monotone sur $f(I)$, par le théorème de la limite monotone, f^{-1} admet une limite à droite et à gauche en y_0. Notons ces limites ℓ_d et ℓ_g. Alors, comme f^{-1} est monotone, ℓ_g et ℓ_d sont comprises entre $f^{-1}(a)$ et $f^{-1}(b)$ qui appartiennent à I donc, comme I est un intervalle, ℓ_g et ℓ_d appartiennent à I. De plus, comme f est continue sur I, $f(x) \xrightarrow[x\to\ell_d]{} f(\ell_d)$ donc, par composition, $f(f^{-1}(y)) \xrightarrow[y\to y_0]{} f(\ell_d)$. Or, pour tout $y \in I$, $f(f^{-1}(y)) = y$ donc $f(f^{-1}(y)) \xrightarrow[y\to y_0]{} y_0$. Par unicité de la limite, on en déduit que $y_0 = f(\ell_d)$.

On montre de même que $y_0 = f(\ell_g)$. Ainsi, $\ell_g = \ell_d = f^{-1}(y_0)$ donc $f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} f(y_0)$, ce qui montre que f^{-1} est continue en y_0. Dans le cas où y_0 est une borne de $f(I)$, on procède de même mais en ne considérant que la limite à droite ou à gauche. □

Exemple 64. Démontrer que l'équation $\cos(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Solution. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \cos(x) - x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que, pour tout $x > 1$, $x > \cos(x)$ donc $f(x) < 0$ et, pour tout $x < -1$, $x < \cos(x)$ donc $f(x) > 0$. Ainsi, f ne s'annule pas sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

Sur $[-1\,;1]$, f est continue et dérivable comme somme de fonctions continues et dérivables. De plus, pour tout $x \in [-1\,;1]$, $f'(x) = \sin(x) - 1 < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[-1\,;1]$. Ainsi, par le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $[-1\,;1]$ dans $[f(1)\,;f(-1)]$. Or, $f(-1) = \cos(-1) + 1 > 0$ et $f(1) = \cos(1) - 1 < 0$ donc il existe un unique réel $\alpha \in [-1\,;1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Ainsi, il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$ ce qui est équivaut à dire que l'équation $\cos(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction racine n-ième

Propriété 65

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \longmapsto x^n$.

1. Si n est impair alors la fonction f_n réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Si n est pair alors la fonction f_n réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.

1. Supposons que n est impair. Alors, f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (voir **Propriété 40** du Chapitre 8). De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc, par le théorème de la bijection continue, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Supposons que n est pair. Alors, f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (voir **Propriété 40** du Chapitre 8). De plus, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$ donc, par le théorème de la bijection continue, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

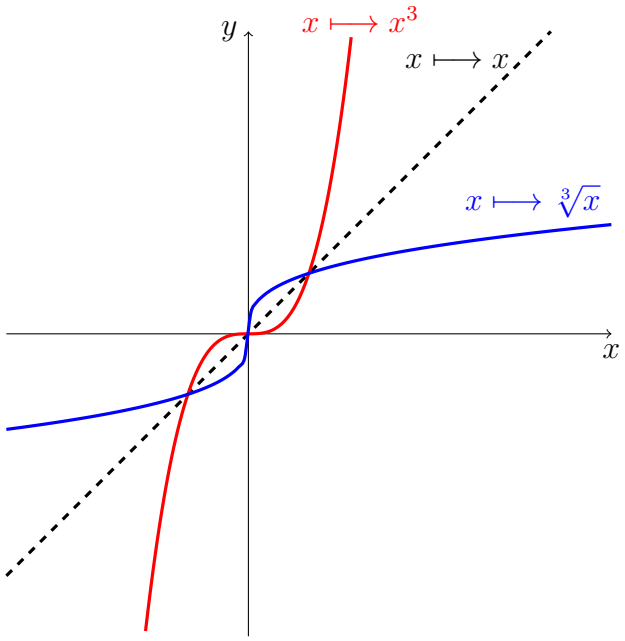
□

Définition 66

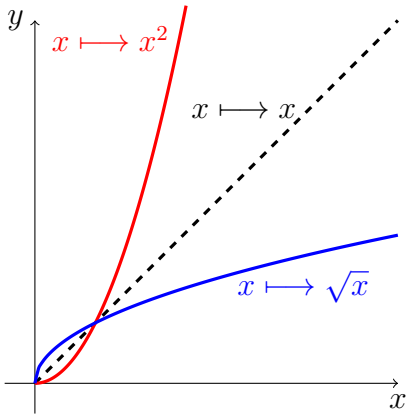
Avec les notations précédentes,

1. si n est impair, la bijection réciproque de f_n sur $\mathbb{R}$ est appelée la fonction **racine n-ième**.
2. si n est pair, la bijection réciproque de f_n sur $\mathbb{R}_+$ est appelée la fonction **racine n-ième**.

Dans les deux cas, cette fonction se note $\sqrt[n]{}$ (sauf pour $n = 2$ où on note plutôt $\sqrt{}$).



Le cas $n = 3$



Le cas $n = 2$

Propriété 67

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si n est impair, la fonction racine n-ième est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est impaire, $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
2. Si n est pair, la fonction racine n-ième est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème de la bijection continue et de la **Propriété 65**. □

Remarque 68. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ alors $(x^{\frac{1}{n}})^n = x^1 = x$ donc $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. En particulier, pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

c) La fonction arctan

Propriété 69

La fonction tan réalise une bijection continue et strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ donc *tan* est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions continues et dérivables. De plus, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\cos(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$$

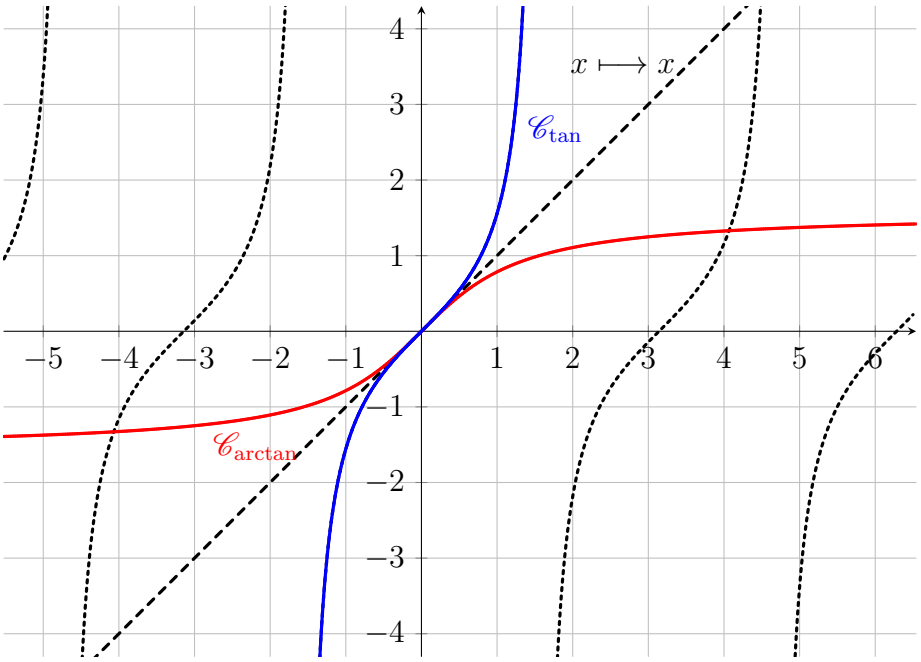
donc *tan* est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \sin(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \cos(x) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ donc $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]-\infty\,;+\infty\right[= \mathbb{R}$.

Ainsi, par le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. □

Définition 70

La bijection réciproque de tan : $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ s'appelle la fonction **arc tangente** (ou **arctangente**) et on la note arctan.



Propriété 71

1. La fonction arctan réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. De plus, la fonction arctan est impaire.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème de la bijection continue et de la **Propriété 69** à l'exception de l'imparité de arctan.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, $-x \in \mathbb{R}$ et il existe $t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan(t)$. Ainsi,

$$\arctan(-x) = \arctan(-\tan(t)) = \arctan(\tan(-t)) = -t = -\arctan(x)$$

car tan est impaire et $-t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. □

Remarque 72. Par définition, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et tout réel y, $y = \tan(x)$ si et seulement si $x = \arctan(y)$. On a donc les valeurs remarquables suivantes

$$\arctan(0) = 0 \qquad \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \qquad \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

III. — Dérivabilité

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction numérique, $x_0 \in \mathcal{D}_f$ et on suppose qu'il existe un intervalle I non réduit à un point tel que $x_0 \in I \subset \mathcal{D}_f$.

1) Nombre dérivé (rappels)

Définition 73

On dit que f est **dérivable en** x_0 si le taux de variation $t(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est alors appelée le **nombre dérivé** de f en x_0 et se note $f'(x_0)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

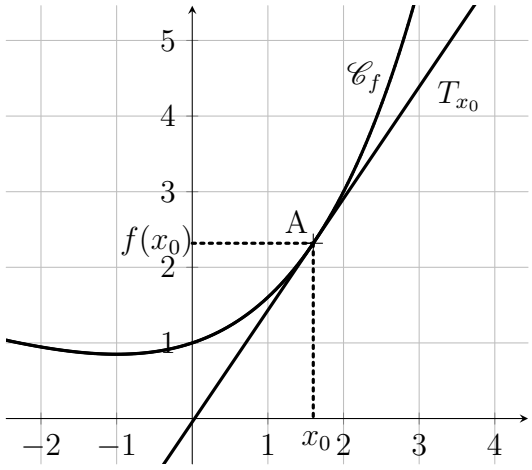
Remarque 74.

1. Si x_0 est une borne de $\mathcal{D}_f$, on ne considère que la limite à droite ou à gauche en x_0.
2. Si f est dérivable en x_0 alors, par définition, $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ce qui peux aussi s'écrire, en posant $x = a+h$, $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Ceci peut parfois servir pour calculer des limites.

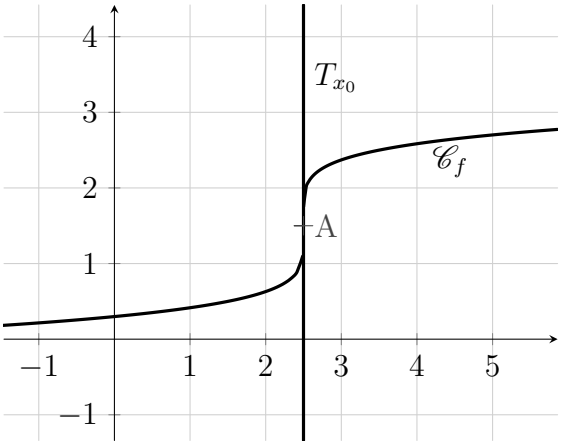
Définition 75

On suppose que x_0 n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$ et on note A le point de coordonnées $(x_0\,;f(x_0))$

1. Si f est dérivable en x_0, on appelle **tangente** à $\mathscr{C}_f$ au point A la droite passant par A et dont le coefficient directeur $f'(x_0)$.
2. Si f n'est pas dérivable en a mais si son taux de variation en a diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque h tend 0, on dit que $\mathscr{C}_f$ possède une **tangente verticale** en A.



Tangente dans le cas où f est dérivable en x_0



Tangente verticale en A

Remarque 76. Si x_0 est une borne de $\mathcal{D}_f$, on peut prolonger la définition précédente mais on parle plutôt, dans ce cas, de demi-tangente.

Propriété 77

Si x_0 n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$ et si f est dérivable en x_0 alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ point d'abscisse x_0 a pour équation réduite

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Démonstration. Voir la **Proposition 27** du chapitre 11. □

2) Fonction dérivée

a) Définition

Définition 78

1. Si f est dérivable en tout point $x_0 \in \mathcal{D}_f$, on dit que f est **dérivable** sur $\mathcal{D}_f$.
2. Si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, on définit la **fonction dérivée** (ou simplement la **dérivée**) de f comme la fonction qui à tout $x \in \mathcal{D}_f$ associe le nombre $f'(x)$. On note cette fonction f' ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

b) Dérivées des fonctions usuelles

On désigne par c, a, b et α des constantes réelles et par n un entier naturel non nul.

La dérivée de	est	sur
$x \longmapsto c$	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto ax + b$	$x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$	$x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto x^\alpha$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$]0\,;+\infty[$
exp	exp	$\mathbb{R}$
ln	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$
sin	cos	$\mathbb{R}$
cos	$-\sin$	$\mathbb{R}$
tan	$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque 79. Toutes les fonctions de référence sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs SAUF :

1. la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en 0 car, pour tout $h > 0$,

$$t(h) = \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h \to 0^+]{} +\infty$$

Cela dit, la courbe de la fonction racine carrée admet une demi-tangente verticale en 0 ;

2. la fonction valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0 car son taux de variation en 0 a une limite à gauche égale à -1 et une limite à droite égale à 1.

3) Lien avec la continuité

Propriété 80

1. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

2. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Démonstration.

1. Supposons que f est dérivable en x_0. Alors, pour tout réel $x \in \mathcal{D}_f \setminus \{x_0\}$,

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0).$$

Or, comme f est dérivable en x_0, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)$ et $x - x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ donc, par produit et somme, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$. Ainsi, f est continue en x_0.

2. Si f est dérivable sur I alors f est dérivable en tout $x \in I$ donc, par **1.**, f est continue en tout $x \in I$ i.e. f est continue sur I.

□

Remarque 81.

1. La réciproque de la propriété précédente est fausse : la fonction valeur absolue est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.

2. Comme toutes les fonctions de référence (à l'exception de la valeur absolue et de la racine carrée en 0) sont dérivables sur leurs ensembles de définition, elles sont aussi continues sur leurs ensembles de définition.

4) Dérivée et opérations algébriques

Propriété 82

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que u et v sont dérivables en x_0.

1. Pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda u + \mu v$ est dérivable en x_0 et

$$(\lambda u + \mu v)'(x_0) = \lambda u'(x_0) + \mu v'(x_0).$$

2. La fonction uv est dérivable en x_0 et

$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0).$$

3. Si $v(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{v}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{v(x_0)^2}.$$

4. Si $v(x_0) \neq 0$ alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}.$$

Démonstration. Soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in I$.

1. On a

$$\begin{aligned} t(h) = \frac{(\lambda u + \mu v)(x_0+h) - (u+v)(x_0)}{h} &= \frac{\lambda u(x_0+h) + \mu v(x_0+h) - \lambda u(x_0) - \mu v(x_0)}{h} \\ &= \lambda \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} + \mu \frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Or, comme les fonctions u et v sont dérivables en x_0, $\dfrac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} u'(x_0)$ et $\dfrac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} v'(x_0)$ donc, par combinaison linéaire, $t(h) \xrightarrow[x\to x_0]{} \lambda u'(x_0) + \mu v'(x_0)$. Ainsi, $\lambda u + \mu v$ est dérivable en x_0 et $(\lambda u + \mu v)'(x_0) = \lambda u'(x_0) + \mu v'(x_0)$.

2. De même,

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{(uv)(x_0+h) - (uv)(x_0)}{h} \\ &= \frac{u(x_0+h)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0)}{h} \\ &= \frac{u(x_0+h)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0+h) + u(x_0)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0)}{h} \\ &= \frac{[u(x_0+h) - u(x_0)]\, v(x_0+h) + u(x_0)\,[v(x_0+h) - v(x_0)]}{h} \\ &= \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} v(x_0+h) + u(x_0) \frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h} \end{aligned}$$

Comme u et v sont dérivables en x_0, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h} = u'(x_0)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h} = v'(x_0)$. De plus, comme u et v sont dérivables en x_0, elles sont continues en x_0 donc $\lim\limits_{h\to 0} v(x_0+h) = v(x_0)$ et ainsi, $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$.

On conclut que uv est dérivable en x_0 et $(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$.

3. On suppose que $v(x_0) \neq 0$. Comme v est dérivable en x_0, elle est continue en x_0 donc v ne s'annule pas dans un voisinage de x_0. Ainsi,

$$t(h) = \frac{\frac{1}{v(x_0+h)} - \frac{1}{v(x_0)}}{h} = \frac{\frac{v(x_0)-v(x_0+h)}{v(x_0+h)v(x_0)}}{h} = -\frac{1}{v(x_0)v(x_0+h)} \times \frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}.$$

Comme v est dérivable en x_0, on a $\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h} = v'(x_0)$ et, comme v est continue en x_0, $\lim\limits_{h\to 0} v(x_0+h) = v(x_0)$ donc $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = -\frac{1}{v(x_0)v(x_0)} \times v'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{v(x_0)^2}$. Ainsi, $\frac{1}{v}$ est dérivable en x_0 et $(\frac{1}{v})'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{v(x_0)^2}$.

4. Supposons que $v(x_0) \neq 0$. D'après le point **3.**, $\frac{1}{v}$ est dérivable en x_0 donc, d'après le point **2.**, $u \times \frac{1}{v}$ est dérivable en x_0 i.e. $\frac{u}{v}$ est dérivable en I et

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) &= \left(u \times \frac{1}{v}\right)'(x_0) = u'(x_0) \times \frac{1}{v(x_0)} + u(x_0) \times \left(-\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}\right) \\ &= \frac{u'(x_0)}{v(x_0)} - \frac{u(x_0)v'(x_0)}{v(_0)^2} = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}.\end{aligned}$$

□

Corollaire 83

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I. On suppose que u et v sont dérivables sur I.

1. Pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda u + \mu v$ est dérivable sur I et

$$(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'.$$

2. La fonction uv est dérivable sur I et

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

3. Si v ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

4. Si v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la propriété précédente. □

Exemple 84. On considère la fonction $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Solution.

1. Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ sont dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

2. Pour tout réel $h > 0$,

$$t(h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h} - 0}{h} = \sqrt{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

5) Dérivée d'une fonction composée

Propriété 85

Soit v une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. Soit $x_0 \in I$. Si u est dérivable en x_0 et si v est dérivable en $u(x_0)$ alors la composée $v \circ u$ est dérivable en x_0 et

$$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$$

Démonstration. Considérons la fonction g définie sur J par

$$\forall t \in J \quad g(t) = \begin{cases} \frac{v(t) - v(u(x_0))}{t - u(x_0)} & \text{si } t \neq u(x_0) \\ v'(u(x_0)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, comme v est dérivable en $u(x_0)$, la fonction g est continue en $u(x_0)$. De plus, en distinguant selon que $u(x)$ est égal ou non à $u(x_0)$, on voit que, pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$,

$$t(x) = \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \times g(u(x)).$$

Or, comme u est dérivable en x_0, $\dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} u(x_0)$. De plus, u est continue (car dérivable) en x_0 et g est continue en $u(x_0)$ donc, par composition, $g \circ u$ est continue en x_0. Ainsi,

$$t(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} u'(x_0)g(u(x_0)) = u'(x_0)v'(u(x_0))$$

donc $v \circ u$ est dérivable en x_0 et $(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0)v'(u(x_0))$. □

Corollaire 86

Soit v une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. Si u est dérivable sur I et si v est dérivable sur J alors la composée $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la propriété précédente. □

Exemple 87. On a vu dans l'exemple 55 que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Étudier sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

Solution. La fonction $x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$t(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

Ainsi, pour tout $x \neq 0$,

$$0 \leqslant |t(x)| = \sqrt{\frac{1}{x^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X^{\frac{1}{2}}} = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = +\infty$. Par inverse, il s'ensuit que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} = 0$ donc, par encadrement, $|t(x)| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et ainsi, par propriété, $t(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. On conclut donc que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

6) Dérivée d'une réciproque

Propriété 88

Soit f une fonction bijective et strictement monotone d'un intervalle I dans un intervalle J. On suppose que f est dérivable sur I et que f' ne s'annule par I. Alors, f^{-1} est dérivable sur I et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

i.e.

$$\forall x \in J \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Démonstration. Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $f^{-1}(x) \neq f^{-1}(x_0)$ car f est injective donc

$$t(x) = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{\frac{x - x_0}{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(x_0))}{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}}.$$

Comme f est dérivable en $y_0 = f^{-1}(x_0)$, $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0) \neq 0$ donc, par quotient, $\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} = \frac{1}{f'(y_0)}$. Or, d'après le théorème de la bijection continue, f^{-1} est continue en $x_0 = f(y_0)$ donc $\lim\limits_{x \to x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0) = y_0$. Ainsi, par composition,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(x_0))}{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}} = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f(x_0))}.$$

Ainsi, $t(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$ donc f^{-1} est dérivable en x_0 et $f^{-1}(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$. □

Propriété 89

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $D_n = \mathbb{R}$ si n est impair et $D_n = \mathbb{R}^+$ si n est pair. La fonction racine n-ième $f_n : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $D_n \setminus \{0\}$ et, pour tout réel $x \in D_n \setminus \{0\}$,
$$f_n'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$
2. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Démonstration.

1. La fonction $g_n : n \longmapsto x^n$ est bijective et strictement croissante sur D_n. De plus, g_n est dérivable sur D_n et, pour tout $x \in D_n$, $g_n'(x) = nx^{n-1}$ qui est non nul pour tout $x \in D_n \setminus \{0\}$. Ainsi, f_n est dérivable sur $D_n \setminus \{0\}$ et, pour tout $x \in \mathbb{D}_n \setminus \{0\}$,
$$f_n'(x) = \frac{1}{g_n'(f_n(x))} = \frac{1}{nf_n(x)^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$
2. La fonction tan est bijective, strictement croissante et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$ donc arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,
$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

□

Exemple 90.

1. Justifier que $f : x \longmapsto \sqrt[3]{x^2 + 1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout réel x, $f'(x)$.
2. Justifier que $g : x \longmapsto \arctan(3x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer, pour tout réel x, $g'(x)$.

Solution.

1. Les fonctions $x \longmapsto x^2 + 1$ et $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ (car 3 est impair) donc, par composition, f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, $x \longmapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout réel x, $x^2 + 1 \neq 0$ donc, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,
$$f'(x) = 2x \times \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^2 + 1}}.$$

2. Les fonction $x \longmapsto 3x$ et arctan sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$g'(x) = 3 \times \frac{1}{1+(3x)^2} = \frac{3}{1+9x^2}.$$

7) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 91

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I.

Exemple 92. La fonction f de l'exemple 87 est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Solution. On a vu que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ que, pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ et que $f'(0) = 0$. Par composition et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$, f' est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout réel $x \neq 0$,

$$0 \leqslant |f'(x)| = 2 \times (\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 2 \times \frac{(\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X^{\frac{3}{2}}} = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^X} = 0$ et ainsi, par composition, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}} = 0$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $|f'(x)| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc, par propriété, $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f'(0)$ et ainsi f' est continue en 0. Dès lors, f' est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 93. Il existe des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur R. Par exemple, on peut montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Propriété 94

1. Toutes les fonctions de références sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de dérivabilité.
2. Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I.
   - **a.** Pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda u + \mu v$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
   - **b.** La fonction uv est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
   - **c.** Si v ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
3. Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que $u(I) \subset J$. On suppose que u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J. Alors, $v \circ u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Démonstration.

1. Les dérivées des fonctions de références sont elles-mêmes de fonctions de références ou des fonctions obtenues à partir des fonctions de référence par opérations, comme les opérations conservent la continuité, les dérivées des fonctions de références sont continues sur leurs ensembles définitions. Ainsi, les fonctions de référence sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leurs ensembles de dérivabilité.
2. **a.** Soit λ et μ deux réels. Comme u et v sont dérivables sur I, $\lambda u + \mu v$ est dérivable sur I et $(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'$. De plus, comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, u' et v' sont continues sur I et donc $\lambda u' + \mu v'$ est continue sur I. Ainsi, $\lambda u \mu v$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

   b. Comme u et v sont dérivables sur I, uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$. De plus, comme u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, u et v sont continues (car dérivables) et u' et v' sont continues sur I et donc $u'v + uv'$ est continue sur I. Ainsi, uv est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

   c. Supposons que v ne s'annule pas sur I. Alors, $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$. Alors, v et v' sont continues sur I donc, comme v ne s'annule pas sur I, $-\frac{v'}{v^2}$ est continue sur I. Ainsi, $\frac{u}{v}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

   Enfin, $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
3. Par propriété, $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$. Or, u et u' sont continues sur I et v' est continue J donc, par composition et produit, $u' \times v' \circ u$ est continue sur I. Ainsi, $v \circ u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

□

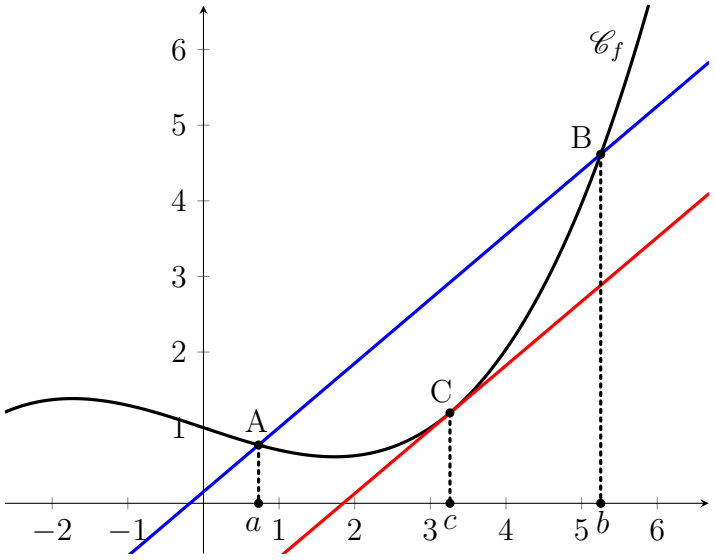
8) Théorème des accroissements finis et conséquences

Théorème 95. — Théorème des accroissements finis (admis)

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I. Alors, pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, il existe $c \in]a\,;b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Interprétation graphique. Ceci signifie que si f est dérivable sur I alors, pour toute sécante (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$, il existe un point C en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle (AB).



Exemple 96. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $\arctan(x) > \dfrac{x}{1+x^2}$.

Solution. Soit un réel $x > 0$. Alors, comme la fonction arctan est dérivable sur $[0\,;x]$, il existe un réel $c \in \,]0\,;c[$ tel que

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = \arctan'(c) = \frac{1}{1+c^2}.$$

Alors, comme $0 < c < x$, par stricte croissance de la fonction carré sur $[0\,;+\infty[$, $c^2 < x^2$ donc $0 < 1 + c^2 < 1 + x^2$ et ainsi, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{1+c^2} > \dfrac{1}{1+x^2}$. On en déduit que $\dfrac{\arctan(x)}{x} > \dfrac{1}{1+x^2}$ donc, en multipliant par $x > 0$, on conclut que $\arctan(x) > \dfrac{x}{1+x^2}$.

Théorème 97

Soit f une fonction définie et dérivable sur un <u>intervalle</u> I.

1. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et si $f'(x)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I alors f est strictement croissante sur I.
2. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ et si $f'(x)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Démonstration.

1. Supposons que, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et que $f'(x)$ ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs. Soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Alors, comme f est dérivable sur I, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ donc $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Or, $f'(c) \geqslant 0$ et $b - a > 0$ donc $f(b) - f(a) \geqslant 0$ i.e. $f(b) \geqslant f(a)$. Ainsi, f est croissante sur I. Supposons que $f(a) = f(b)$. Alors, comme f est croissante sur I, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) = f(a)$ donc, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) = f(a)$. Dès lors, pour tout $(x_0, x) \in \,]a\,;b[^2$ tel que $x \neq x_0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(a) - f(a)}{x - x_0} = 0$ donc, pour tout $x \in \,]a\,;b[$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$. Ainsi, pour tout $x_0 \in \,]a\,;b[$, $f'(x_0) = 0$ donc f' s'annule une infinité de fois dans I, ce qui est exclu. Ainsi, $f(a) < f(b)$ et on conclut que f est strictement croissante sur I.

2. La démonstration est similaire dans le cas où f' est négative sur I. (On peut aussi appliquer le point précédent à la fonction $-f$).

3. Supposons que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$. Soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Alors, comme f est dérivable sur I, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ donc $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. Or, $f'(c) = 0$ donc $f(b) - f(a) = 0$ i.e. $f(b) = f(a)$. Ainsi, f est constante sur I.

□

Exemple 98. Démontrer que l'équation $\mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x} - 7 = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Solution. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x} - 7$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par compositions et sommes de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x} - 6\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x} = 3\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} + 1) = 3\mathrm{e}^{x}((\mathrm{e}^{x})^2 - 2\mathrm{e}^{x} + 1^2) = 3\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - 1)^2.$$

Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$. De plus, comme exp ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = 0 \iff 3\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - 1)^2 = 0 \iff \mathrm{e}^{x} - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^{x} = 1 \iff x = 0.$$

Ainsi, f' ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Enfin, on peut remarquer que, pour tout réel x, $f(x) = P(\mathrm{e}^{x})$ où $P : t \longmapsto t^3 - 3t^2 + 3t - 7$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ et P est continue en 0 donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = P(0) = -7$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^3 = +\infty$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Ainsi, par le théorème de la bijection continue, on conclut que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-7\,;+\infty[$. Comme $0 \in]-7\,;+\infty[$, on en déduit qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$ ce qui équivaut à dire que l'équation $\mathrm{e}^{3x} - 3\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x} - 7 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.