♦ Chapitre 18. Limites, continuité, dérivabilité

Dans tout le chapitre, les fonctions f considérées sont des fonctions numériques i.e. des fonctions définies sur une partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I. — Limites

1) Limite finie en un point

Dans tout ce paragraphe, x_0 est un réel et f est une fonction numérique définie au voisinage de x_0 i.e. une fonction telle qu'il existe des réels a et b tels que $a < x_0 < b$ et $]a\,;x_0[\cup]x_0\,;b[\subset \mathcal{D}_f$.

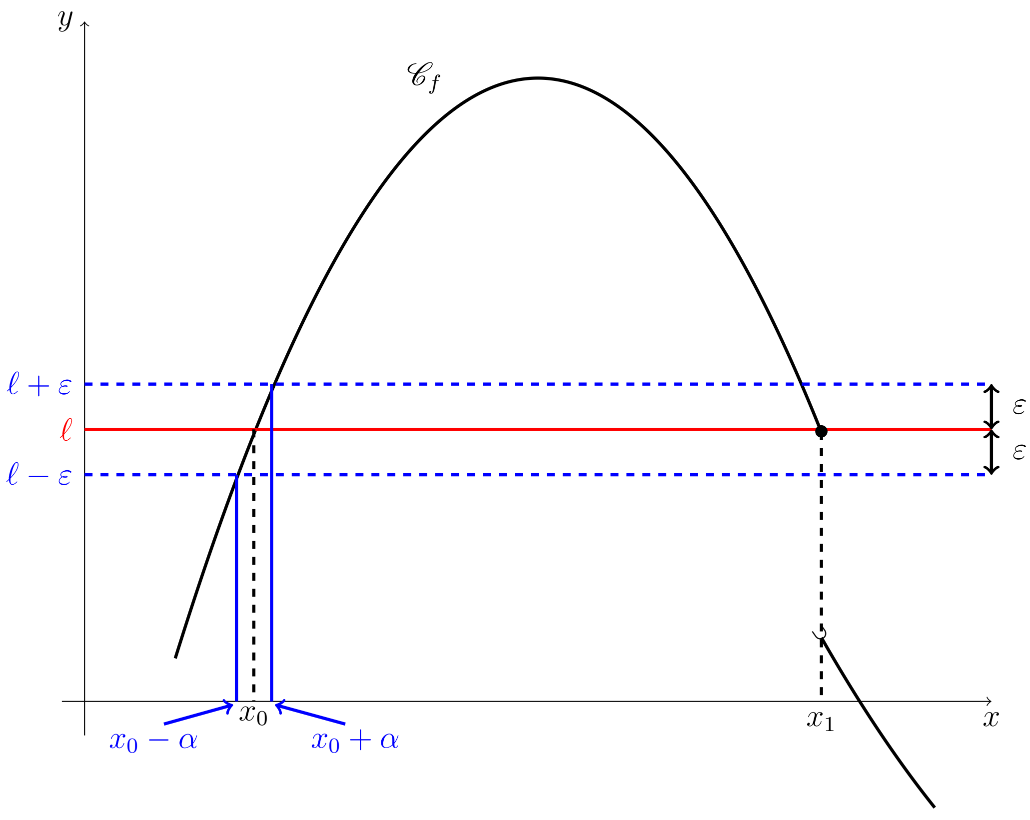
Définition 1

On dit que f **converge** en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Dans ce cas, on dit que f tend vers ℓ en x_0 (ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0). Dans le cas contraire, on dit que f **diverge** en x_0.

Autrement dit, f tend vers ℓ en x_0 si la distance entre $f(x)$ et ℓ peut être rendue aussi petite qu'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de x_0.



La fonction représentée ci-dessus converge en x_0 mais diverge en x_1.

Exemple 2. Soit f la fonction carré. Montrer que f tend vers 9 en 3.

Propriété 3

Si f tend vers un réel ℓ en x_0 alors ℓ est unique.

Définition 4

Si f tend vers un réel ℓ en x_0 alors le nombre ℓ s'appelle **la limite** de f en x_0. On note alors

$$\lim_{x_0} f = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell.$$

2) Limite infinie en un point

Définition 5

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0.

1. On dit que f **diverge** (ou tend) vers $+\infty$ en x_0 (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers x_0) si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant B).$$

   On note alors

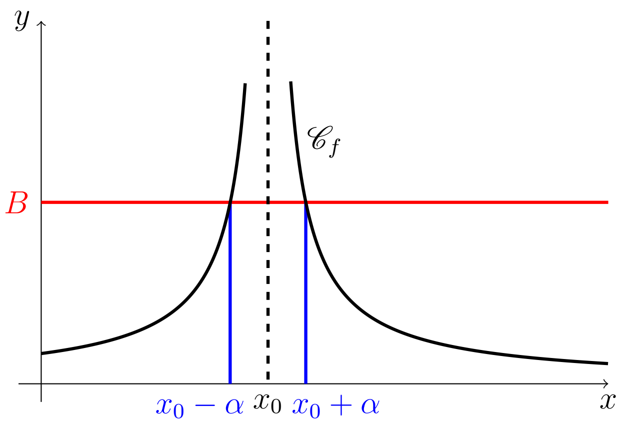
$$\lim_{x_0} f = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty.$$

2. On dit que f **diverge** (ou tend) vers $-\infty$ en x_0 (ou que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers x_0) si

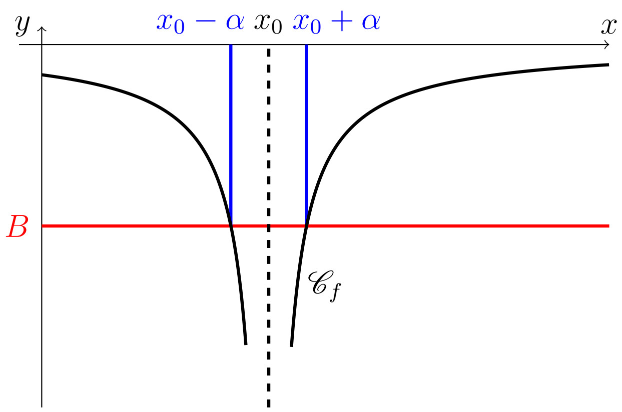
$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant B).$$

   On note alors

$$\lim_{x_0} f = -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty.$$



f diverge vers $+\infty$ en x_0



f diverge vers $-\infty$ en x_0

Exemple 6. On peut démontrer que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Définition 7

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0.
Si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$, on dit que la droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote verticale** à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3) Limite à droite, limite à gauche

Définition 8

Soit x_0 un réel.

1. On suppose qu'il existe un réel $a < x_0$ tel que $]a\,;x_0[\subset \mathcal{D}_f$.

a. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet le nombre ℓ comme **limite à gauche** en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \,]a\,;x_0[\quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

b. On dit que f admet $+\infty$ comme **limite à gauche** en x_0 si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \,]a\,;x_0[\quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant B).$$

c. On dit que f admet $-\infty$ comme **limite à gauche** en x_0 si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \,]a\,;x_0[\quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant B).$$

Dans tous les cas, si f admet L comme limite à gauche en x_0, on note

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} L \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}]{} L.$$

2. On suppose qu'il existe un réel $b > x_0$ tel que $]x_0\,;b[\subset \mathcal{D}_f$.

a. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet le nombre ℓ comme **limite à droite** en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \,]x_0\,;b[\quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

b. On dit que f admet $+\infty$ comme **limite à droite** en x_0 si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \,]x_0\,;b[\quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant B).$$

c. On dit que f admet $-\infty$ comme **limite à droite** en x_0 si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \,]x_0\,;b[\quad (|x - x_0| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x) \leqslant B).$$

Dans tous les cas, si f admet L comme limite à droite en x_0, on note

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} L \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}]{} L.$$

Exemple 9. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Remarque 10. Si f admet une limite à droite ou à gauche égale à $+\infty$ ou à $-\infty$, on dit encore que la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à la courbe de f.

Propriété 11

Soit x_0 un réel et f une fonction numérique définie au voisinage de x_0. Soit L un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$.

1. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ alors f admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$.

2. Réciproquement,

a. si f est définie en x_0 et si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

b. si f n'est pas définie en x_0 et si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

Exemple 12. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Les fonctions f et g admettent-elles des limites à gauche en 0 ? des limites à droite en 0 ? des limites en 0 ?

4) Limite en $+\infty$ et en $-\infty$

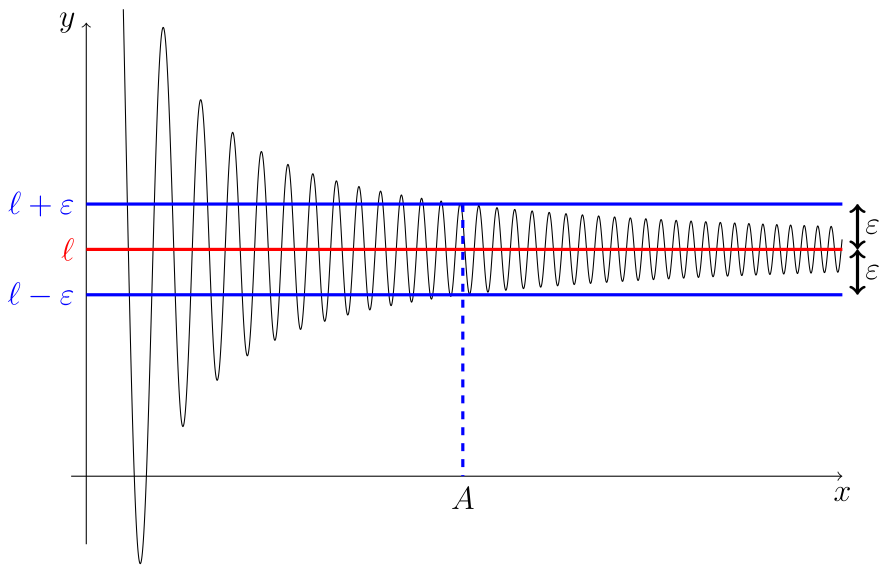
a) Limite en $+\infty$

Définition 13

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $+\infty$ i.e. telle qu'il existe un réel a tel que $[a\,; +\infty[\subset \mathcal{D}_f$. On dit que f **converge** en $+\infty$ s'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (x \geqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Dans ce cas, on dit que f tend vers ℓ en $+\infty$.
Dans le cas contraire, on dit que f **diverge** en $+\infty$.



La fonction représentée ci-dessus converge en $+\infty$

Exemple 14.

1. Montrer que $f : x \longmapsto \frac{2x^2+1}{x^2}$ tend vers 2 en $+\infty$.

2. Montrer que la fonction sinus diverge en $+\infty$.
On peut montrer que, de même, cos diverge en $+\infty$.

Propriété 15

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $+\infty$. Si f tend vers un réel ℓ en $+\infty$ alors ℓ est unique.

Définition 16

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $+\infty$. Si f tend vers un réel ℓ en $+\infty$ alors le nombre ℓ s'appelle **la limite** de f en $+\infty$. On note alors

$$\lim_{+\infty} f = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell.$$

Définition 17

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $+\infty$. Si f tend vers un réel ℓ en $+\infty$ alors on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Exemple 18. D'après l'exemple 14, si $f : x \longmapsto \frac{2x^2+1}{x^2}$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Définition 19

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $+\infty$.

1. On dit que f **tend** (ou diverge) vers $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant B).$$

Dans ce cas, on écrit alors

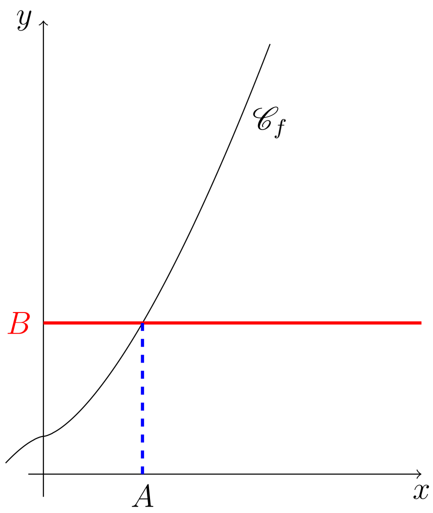
$$\lim_{+\infty} f = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

2. On dit que f **tend** (ou diverge) vers $-\infty$ en $+\infty$ si

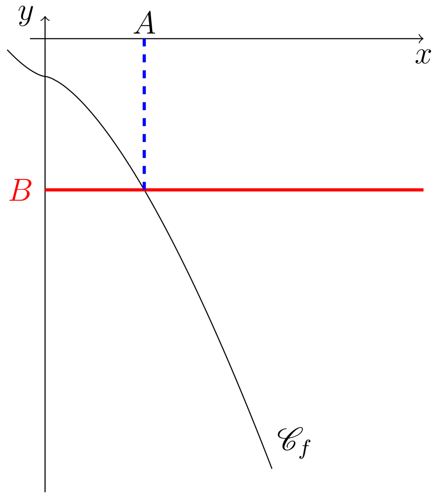
$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant B).$$

Dans ce cas, on écrit alors

$$\lim_{+\infty} f = -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty.$$



f diverge vers $+\infty$ en $+\infty$



f diverge vers $-\infty$ en $+\infty$.

Exemple 20. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

b) Limite en $-\infty$

Définition 21

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $-\infty$ i.e. telle qu'il existe un réel a tel que $]-\infty\,; a] \subset \mathcal{D}_f$. On dit que f **converge** en $-\infty$ s'il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (x \leqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon).$$

Dans ce cas, on dit que f tend vers ℓ en $-\infty$.
Dans le cas contraire, on dit que f **diverge** en $-\infty$.

Propriété 22

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $-\infty$. Si f tend vers un réel ℓ en $-\infty$ alors ℓ est unique.

Définition 23

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $-\infty$. Si f tend vers un réel ℓ en $-\infty$ alors le nombre ℓ s'appelle **la limite** de f en $+\infty$. On note alors

$$\lim_{-\infty} f = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ell.$$

Définition 24

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $-\infty$. Si f tend vers un réel ℓ en $-\infty$ alors on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

Définition 25

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de $-\infty$.

1. On dit que f **tend** (ou diverge) vers $+\infty$ en $-\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant B).$$

Dans ce cas, on écrit alors

$$\lim_{-\infty} f = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty.$$

2. On dit que f **tend** (ou diverge) vers $-\infty$ en $-\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad (x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant B).$$

Dans ce cas, on écrit alors

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{ou} \qquad f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty.$$

5) Limites des fonctions usuelles

Fonctions constantes

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} c = c$

Fonctions puissances

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

5. Si n est pair, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

6. Si n est impair, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Fonctions exponentielles et logarithme népérien

Soit un réel $a > 0$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

4. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ si } a < 1 \\ +\infty \text{ si } a > 1 \end{cases}$

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty \text{ si } a < 1 \\ 0 \text{ si } a > 1 \end{cases}$

6) Limites et opérations

a) Opérations algébriques

Dans tous les tableaux suivants, f et g sont deux fonctions et ℓ et ℓ' sont deux réels. Les règles suivantes sont valables lorsque x tend vers $+\infty$, vers $-\infty$ ou vers un réel x_0 (éventuellement à droite ou à gauche).

1. Limite d'une somme

si $f(x)$ tend vers	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si $g(x)$ tend vers	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f(x)+g(x)$ tend vers						

Remarque. L'étude de $f(x)-g(x)$ se ramène à celle d'une somme en écrivant la différence sous la forme $f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$

2. Limite d'un produit

si $f(x)$ tend vers	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si $g(x)$ tend vers	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
alors $f(x)g(x)$ tend vers									

Remarque. L'étude de $kg(x)$ où k est un réel est un cas particulier de ce qui précède en prenant pour f la fonction constante égale à k.

3. Limite d'un quotient

- Cas où $g(x)$ ne tend pas vers 0

si $f(x)$ tend vers	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
et si $g(x)$ tend vers	$\ell'\neq 0$	∞	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	∞
alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers							

- Cas où $g(x)$ tend vers 0

si $f(x)$ tend vers	$\ell>0$	$+\infty$	$\ell>0$	$+\infty$	$\ell<0$	$-\infty$	$\ell<0$	$-\infty$	0
et si $g(x)$ tend vers	0^+	0^+	0^-	0^-	0^+	0^+	0^-	0^-	0
alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers									

b) Composition

Propriété 26

Les lettres a, b et c désignent des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. On considère une fonction u définie au voisinage de a et une fonction v définie au voisinage de b. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ et que $\lim\limits_{X\to b} v(X)=c$. Alors, $\lim\limits_{x\to a}(v\circ u)(x)=c$.

Exemple 27. Dans chaque cas, déterminer la limite de f en a.

1) $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, $a=+\infty$ **2)** $f : x \longmapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $a=+\infty$ **3)** $f : x \longmapsto \sqrt{1-3x}$, $a=-\infty$

4) $f : x \longmapsto x^x$, $a=+\infty$ **5)** $f : x \longmapsto \dfrac{1+\mathrm{e}^{-x}}{\ln(x)}$, $a=+\infty$ **6)** $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x^2)}{x^2}$, $a=0$

c) Quelques formes indéterminées usuelles

Propriété 28

1. La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou en $-\infty$ est la limite de son monôme de plus haut degré.
2. La limite d'une fonction rationnelle (i.e. un quotient de deux polynômes) en $+\infty$ ou en $-\infty$ est égale à la limite du quotient des monômes de plus haut degré.

⚠ Ceci n'est valable qu'aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.

Exemple 29. Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

1. $f : x \longmapsto -2x^3 + x^2 - 20x - 7$ **2.** $g : x \longmapsto 1 - \mathrm{e}^{2x} + 7\mathrm{e}^{3x}$ **3.** $h : x \longmapsto \dfrac{x^3 + x - 1}{x^2 + x + 1}$

Méthode 30

Pour lever une indétermination portant sur la limite d'une fraction rationnelle au voisinage d'un réel r, on peut factoriser le numérateur et le dénominateur par $X - r$.

Exemple 31. Déterminer la limite en 1 de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}$.

Méthode 32

Pour lever une indétermination dans une expression de la forme $\sqrt{A(x)} - \sqrt{B(x)}$, on peut multiplier et diviser par la quantité conjuguée $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)}$.

Exemple 33. Déterminer, dans chacun des cas suivants, la limite de f en $+\infty$.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$ **2.** $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1} - x$ **3.** $f : x \longmapsto \sqrt{\mathrm{e}^{4x} + 3} - \mathrm{e}^{2x}$

7) Limites et ordre

Propriété 34

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. On suppose que f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a, convergeant en a et telle que, pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$. Alors,

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x).$$

En particulier, si f est minorée (resp. majorée) par m (resp. M) alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geqslant m$ (resp. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leqslant M$).

⚠ Même si $f(x) < g(x)$ pour tout réel x au voisinage de a, on ne peut pas en déduire que $\lim\limits_{x \to a} f(x) < \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Par exemple, pour tout réel $x > 0$, $1 - \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x}$ mais $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x}$.

Théorème 35. — Théorème d'encadrement (ou « des gendarmes »)

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f, g et h des fonctions définies au voisinage de a. On suppose que

1. pour tout x dans un voisinage de a, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$;

2. les fonctions g et h convergent en a vers le même réel ℓ.

Alors, f converge vers ℓ en a.

Exemple 36. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par$f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$.
Déterminer la limite de f en 0.

Théorème 37. — Théorème de comparaison

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f et g des fonctions définies au voisinage de a. On suppose que, pour tout réel x dans un voisinage de a, $f(x) \leqslant g(x)$.

1. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

2. Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 38. Étudier le comportement en $-\infty$ et de $+\infty$ de $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2+\cos(x)}$.

Théorème 39. — Théorème de la limite monotone

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]a\,;b[$ où a et b sont des réels ou $-\infty$ (pour a) ou $+\infty$ (pour b).

1. On suppose que f est croissante sur I.

a. La fonction f admet une limite L à droite en a. De plus, $L \in \mathbb{R}$ si f est minorée sur I et $L = -\infty$ sinon.

b. La fonction f admet une limite L' à gauche en b. De plus, $L' \in \mathbb{R}$ si f est majorée sur I et $L = +\infty$ sinon.

2. On suppose que f est décroissante sur I.

a. La fonction f admet une limite L à droite en a. De plus, $L \in \mathbb{R}$ si f est majorée sur I et $L = +\infty$ sinon.

b. La fonction f admet une limite L' à gauche en b. De plus, $L' \in \mathbb{R}$ si f est minorée sur I et $L = -\infty$ sinon.

8) Croissances comparées

Théorème 40. — Croissance comparées

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda x}}{x^\alpha} = +\infty$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{\lambda x} = 0$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\lambda} = 0$ **4.** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\lambda (\ln(x))^\alpha = 0$

Exemple 41. Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de f en a.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{x^{2024}},\ a = +\infty$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}},\ a = +\infty$
3. $f : x \longmapsto \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4},\ a = 0$
4. $f : x \longmapsto e^x - \ln(x),\ a = +\infty$
5. $f : x \longmapsto x^x,\ a = 0^+$
6. $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+e^x)}{x^3},\ a = +\infty$

II. — Continuité

1) Continuité en un point

Définition 42

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f est **continue en** x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Interprétation graphique. Graphiquement, la continuité d'une fonction f en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ se traduit par le fait que la courbe de f ne présente pas de saut en x_0.

Exemple 43. Étudier la continuité en 0 des fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 44.

1. Si x_0 est une borne de I, on ne considère que la limite à droite ou à gauche.
2. Dire que f est continue en $x_0 \in I$ est équivalent à dire que $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.
3. La question de la continuité d'une fonction ne se pose qu'en un réel x_0 en lequel la fonction est définie.
4. Si f n'est pas continue en $x_0 \in I$, on dit que f est discontinue en x_0.

Propriété 45. — Opérations algébriques

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f et g sont continues en x_0. Alors,

1. pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0 ;
2. la fonction fg est continue en x_0 ;
3. si $g(x_0) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0.

Propriété 46. — Composition

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$. Soit $x_0 \in I$. Si u est continue en x_0 et v est continue en $u(x_0)$ alors $v \circ u$ est continue en x_0.

2) Continuité sur un intervalle

Définition 47

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point $x_0 \in I$.

Interprétation graphique. Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I inclus dans $\mathcal{D}_f$ se traduit par le fait qu'on peut « tracer la courbe sans lever le crayon ». Autrement dit, la continuité de f se traduit par le fait que la courbe $\mathscr{C}_f$ ne présente pas de saut aux abscisses en lesquelles f est définie.

Propriété 48. — Opérations algébriques

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. On suppose que f et g sont continues sur I. Alors,

1. pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur I ;
2. la fonction fg est continue sur I ;
3. si g ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.

Propriété 49. — Composition

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J tel que $u(I) \subset J$. Si u est continue en sur I et v est continue sur J alors $v \circ u$ est continue sur I.

Propriété 50

Toutes les fonctions de références sont continues sur leur ensemble de définition et, par conséquent, toute fonction obtenue par opérations (algébriques et composition) à partir des fonctions de référence est continue sur tout intervalle de son ensemble de définition.

Exemple 51.

1. La fonction $f_1 : x \longmapsto \frac{x}{x^2+1}$ est une fonction rationnelle (quotient de 2 polynômes) définie sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $f_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^x + 5x - 1$ est une somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $f_3 : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{x-1}$ est un quotient de fonctions continues définies sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc elle est continue sur $]-\infty\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$. Dans ce cas, on peut dire qu'elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
4. La fonction $f_4 : x \longmapsto \ln(x^2+1)$ est la composée de la fonction $u : x \longmapsto x^2+1$ continue sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $v = \ln$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$ donc $f_4 = v \circ u$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 52

Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel ℓ et f une fonction continue en ℓ. Alors, la suite $(f(u_n))$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n).$$

3) Prolongement par continuité

Propriété 53

Soit I un intervalle et $x_0 \in I$. On suppose que f est une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ et que f n'est pas définie en x_0. Si f converge vers un réel ℓ en x_0 alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur I par

$$\forall x \in I \quad \tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est continue en x_0.

Définition 54

Avec les notations de la propriété précédente, la fonction $\tilde{f}$ est appelée le **prolongement par continuité** de f en x_0.

Exemple 55.

1. Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ définie sur $\mathbb{R}^*$. On a vu dans l'exemple 36 que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ donc $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

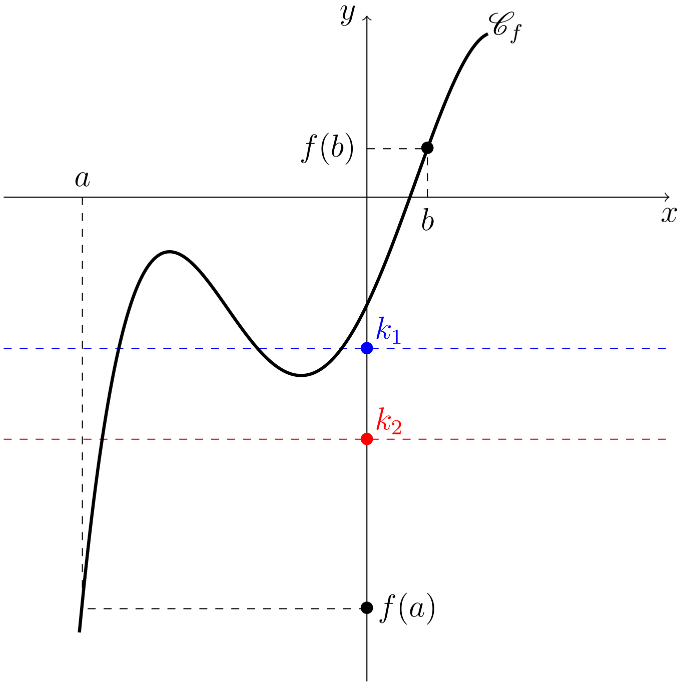
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   est le prolongement par continuité de f en 0.
2. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ admet un prolongement par continuité en 0.
3. Est-ce la cas de la fonction $h : x \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$?

4) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 56. — (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors, $f(I)$ est un intervalle.
Ainsi, pour tous éléments a et b de I tels que $a \leqslant b$ et pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.



Corollaire 57

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si f change de signe sur I alors f s'annule sur I. De façon équivalente, si f ne s'annule pas sur I alors f est de signe constant sur I.

Exemple 58. Démontrer que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $[1\,;2]$.

Remarque 59. Le théorème 56 et le corollaire 57 s'étendent aux cas où a et/ou b n'appartient pas à I mais sont/est une borne de I. Il suffit alors dans les énoncés de remplacer $f(a)$ et/ou $f(b)$ par $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et/ou $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ (ces limites étant éventuellement respectivement des limites à droite et/ou à gauche).

Exemple 60. Démontrer que l'équation $x\mathrm{e}^x = 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

5) Théorème des bornes atteintes

Théorème 61. — Théorème des bornes atteintes

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une fonction continue sur le segment $[a\,;b]$ alors f est bornée sur $[a\,;b]$ et elle atteint ses bornes i.e. il existe $u \in [a\,;b]$ et $v \in [a\,;b]$ tel que, pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$.

Le théorème des bornes atteintes n'est vrai que sur un segment et il n'est plus vrai sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert. Par exemple, la fonction inverse est continue sur $]0\,;1]$ et pourtant elle n'est pas majorée sur cet intervalle.

Exemple 62. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x\sin(x)}{\mathrm{e}^x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

6) Théorème de la bijection continue

a) Théorème de la bijection continue

Théorème 63. — Théorème de la bijection continue

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors, f réalise une bijection de I sur $f(I)$. De plus, la bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f.

Exemple 64. Démontrer que l'équation $\cos(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction racine n-ième

Propriété 65

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \longmapsto x^n$.

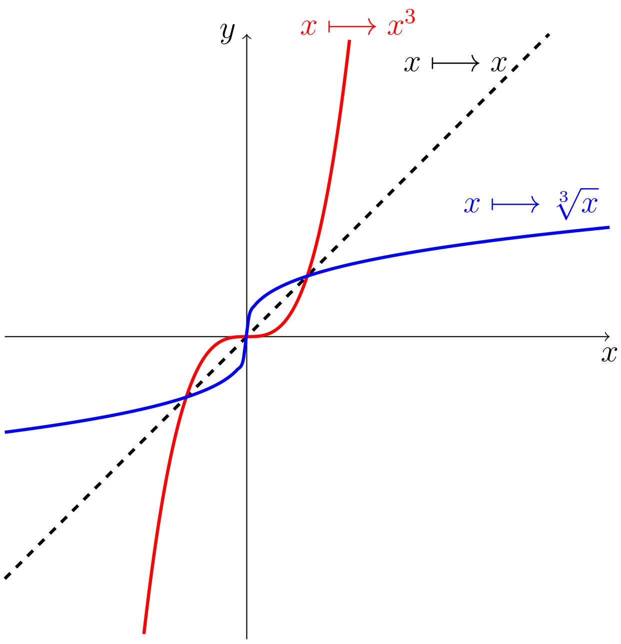
1. Si n est impair alors la fonction f_n réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Si n est pair alors la fonction f_n réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 66

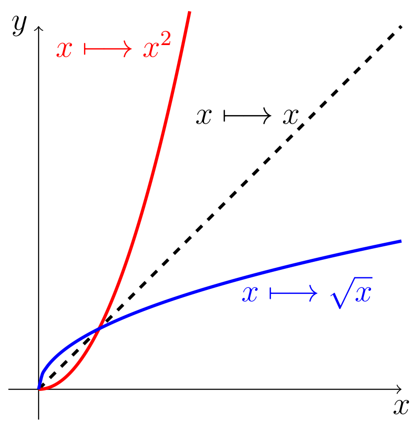
Avec les notations précédentes,

1. si n est impair, la bijection réciproque de f_n sur $\mathbb{R}$ est appelée la fonction **racine n-ième**.
2. si n est pair, la bijection réciproque de f_n sur $\mathbb{R}_+$ est appelée la fonction **racine n-ième**.

Dans les deux cas, cette fonction se note $\sqrt[n]{}$ (sauf pour $n = 2$ où on note plutôt $\sqrt{}$).



Le cas $n = 3$



Le cas $n = 2$

Propriété 67

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si n est impair, la fonction racine n-ième est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est impaire, $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
2. Si n est pair, la fonction racine n-ième est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

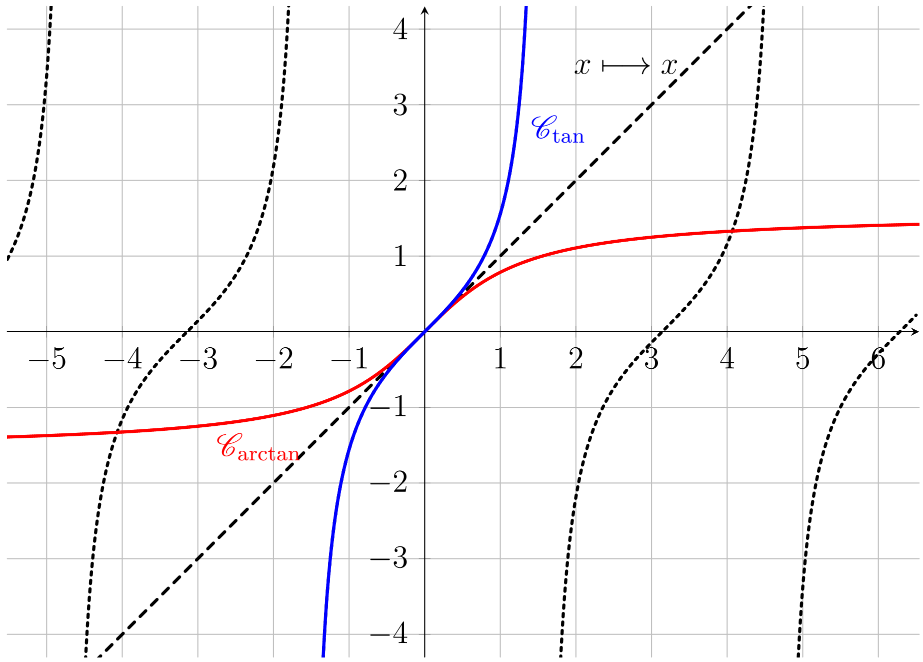
c) La fonction arctan

Propriété 68

La fonction tan réalise une bijection continue et strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 69

La bijection réciproque de $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ s'appelle la fonction arc tangente et on la note arctan.



Propriété 70

1. La fonction arctan réalise une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. De plus, la fonction arctan est impaire.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

,

Remarque 71. Par définition, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et tout réel y, $y = \tan(x)$ si et seulement si $x = \arctan(y)$. On a donc les valeurs remarquables suivantes

$$\arctan(0) = 0 \qquad \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \qquad \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

III. — Dérivabilité

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction numérique, $a \in \mathcal{D}_f$ et on suppose qu'il existe un intervalle I non réduit à un point tel que $a \in I \subset \mathcal{D}_f$.

1) Nombre dérivé (rappels)

Définition 72

On dit que f est **dérivable en** a si le taux de variation $t(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est alors appelée le **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Remarque 73.

1. Si a est une borne de $\mathcal{D}_f$, on ne considère que la limite à droite ou à gauche en a.

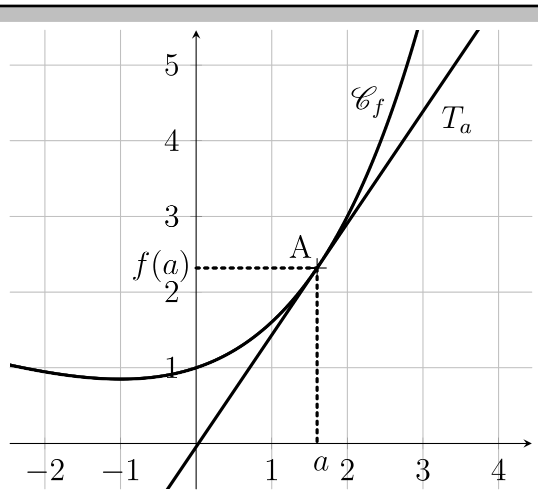
2. Si f est dérivable en a alors, par définition, $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ce qui peux aussi s'écrire, en posant $x = a+h$, $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Ceci peut parfois servir pour calculer des limites.

Définition 74

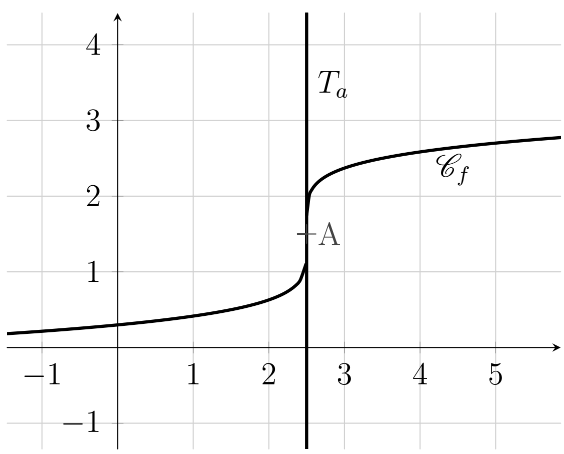
On suppose que a n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$ et on note A le point de coordonnées $(a\,; f(a))$

1. Si f est dérivable en a, on appelle **tangente** à $\mathscr{C}_f$ au point A la droite passant par A et dont le coefficient directeur $f'(a)$.

2. Si f n'est pas dérivable en a mais si son taux de variation en a diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque h tend 0, on dit que $\mathscr{C}_f$ possède une **tangente verticale** en A.



Tangente dans le cas où f est dérivable en a



Tangente verticale en A

Remarque 75. Si a est une borne de $\mathcal{D}_f$, on peut prolonger la définition précédente mais on parle plutôt, dans ce cas, de demi-tangente.

Propriété 76

Soit a n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$ et si f est dérivable en a alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ point d'abscisse a a pour équation réduite

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

2) Fonction dérivée

a) Définition

Définition 77

1. Si f est dérivable en tout point $a \in \mathcal{D}_f$, on dit que f est **dérivable** sur $\mathcal{D}_f$.
2. Si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, on définit la **fonction dérivée** (ou simplement la **dérivée**) de f comme la fonction qui à tout $a \in \mathcal{D}_f$ associe le nombre $f'(a)$. On note cette fonction f' ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

b) Dérivées des fonctions usuelles

On désigne par c, a, b et α des constantes réelles et par n un entier naturel non nul.

La dérivée de	est	sur
$x \longmapsto c$	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto ax + b$	$x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$	$x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto x^\alpha$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$]0\,;+\infty[$
exp	exp	$\mathbb{R}$
ln	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$
sin	cos	$\mathbb{R}$
cos	$-\sin$	$\mathbb{R}$
tan	$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque 78. Toutes les fonctions de référence sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs SAUF :

1. la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en 0 car, pour tout $h > 0$,

$$t(h) = \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h \to 0^+]{} +\infty$$

Cela dit, la courbe de la fonction racine carrée admet une demi-tangente verticale en 0 ;

2. la fonction valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0 car son taux de variation en 0 a une limite à gauche égale à -1 et une limite à droite égale à 1.

3) Lien avec la continuité

Propriété 79

1. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

2. Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Remarque 80.

1. La réciproque de la propriété précédente est fausse : la fonction valeur absolue est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.

2. Comme toutes les fonctions de référence (à l'exeption de la valeur absolue et de la racine carrée en 0) sont dérivables sur leurs ensembles de définition, elles sont aussi continues sur leurs ensembles de définition.

4) Dérivée et opérations algébriques

Propriété 81

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que u et v sont dérivables en x_0.

1. Pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda u + \mu v$ est dérivable en x_0 et

$$(\lambda u + \mu v)'(x_0) = \lambda u'(x_0) + \mu v'(x_0).$$

2. La fonction uv est dérivable en x_0 et

$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0).$$

3. Si $v(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{v}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{v(x_0)^2}.$$

4. Si $v(x_0) \neq 0$ alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}.$$

Corollaire 82

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I. On suppose que u et v sont dérivables sur I.

1. Pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda u + \mu v$ est dérivable sur I et
$$(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'.$$
2. La fonction uv est dérivable sur I et
$$(uv)' = u'v + uv'.$$
3. Si v ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$
4. Si v ne s'annule pas sur I alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Exemple 83. On considère la fonction $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

5) Dérivée d'une fonction composée

Propriété 84

Soit v une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. Soit $x_0 \in I$. Si u est dérivable en x_0 et si v est dérivable en $u(x_0)$ alors la composée $v \circ u$ est dérivable en x_0 et
$$(v \circ u)'(x_0) = v'(u(x_0)) \times u'(x_0)$$

Corollaire 85

Soit v une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. Si u est dérivable sur I et si v est dérivable sur J alors la composée $v \circ u$ est dérivable sur I et
$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$$

Exemple 86. On a vu dans l'exemple 55 que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
est continue sur $\mathbb{R}$. Étudier sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

6) Dérivée d'une réciproque

Propriété 87

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans un intervalle J. Soit $x_0 \in J$. On pose $y_0 = f^{-1}(x_0)$. On suppose que f est dérivable en y_0 et que $f'(y_0) \neq 0$. Alors, f^{-1} est dérivable en x_0 et

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}.$$

Corollaire 88

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans un intervalle J. On suppose que f est dérivable sur I et que f' ne s'annule pas sur I. Alors, f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Propriété 89

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $D_n = \mathbb{R}$ si n est impair et $D_n = \mathbb{R}^*$ si n est pair. La fonction racine n-ième $f_n : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $D_n \setminus \{0\}$ et, pour tout réel $x \in D_n \setminus \{0\}$,

$$f_n'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

2. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

7) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Définition 90

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I.

Exemple 91.

1. La fonction f de l'exemple 86 est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ g(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais qu'elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Propriété 92

1. Toutes les fonctions de références sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de dérivabilité.
2. Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I.
   a. Pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda u + \mu v$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
   b. La fonction uv est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
   c. Si v ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
3. Soit u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J telles que $u(I) \subset J$. On suppose que u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et que v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J. Alors, $v \circ u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

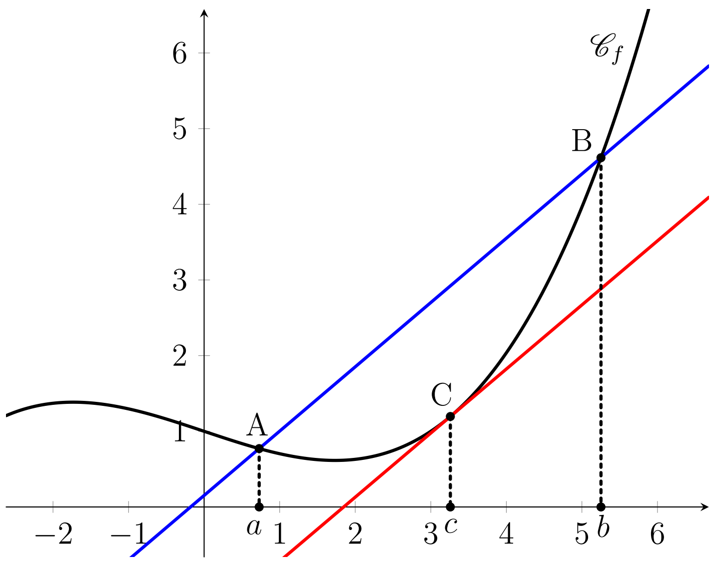
8) Théorème des accroissements finis et conséquences

Théorème 93. — Théorème des accroissements finis

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I. Alors, pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, il existe $c \in]a\,;b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Interprétation graphique. Ceci signifie que si f est dérivable sur I alors, pour toute sécante (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$, il existe un point C en lequel à $\mathscr{C}_f$ est parallèle (AB).



Exemple 94. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $\arctan(x) > \dfrac{x}{1+x^2}$.

Théorème 95

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

1. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et si $f'(x)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I alors f est strictement croissante sur I.
2. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ et si $f'(x)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Exemple 96. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2 \arctan(\frac{1}{x})$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

IV. — Exercices

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x + \frac{1}{x}$	**2.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{2023} - x^{2024}$	**3.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$	**5.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^5+x^3}$	**6.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$	**8.** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$	**9.** $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}$	**11.** $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln(x)$	**12.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x$
13. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$	**14.** $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \ln(1-\mathrm{e}^x)$	**15.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln(1-\mathrm{e}^x)$

Exercice 2. Étudier le comportement de chacune des fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ **2.** $h : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$ **3.** $k : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{2x+1}$

Exercice 3. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2-x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
2. Étudier la comportement de f aux bornes de D_f.

Exercice 4. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3-7x-6}{x^2+x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2+\sin(x)}{x^2+1}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $\dfrac{1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3}{x^2+1}$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 6. On considère la fonction f définie sur $[0\,;3]$ par

$$\forall x \in [0\,;3] \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0\,;1[\\ 1 & \text{si } x \in [1\,;2] \\ 2x-2 & \text{si } x \in]2\,;3] \end{cases}$$

1. Tracer la représentation graphique de f.
2. La fonction f est-elle continue en 1 ?
3. La fonction f est-elle continue en 2 ?

Exercice 7. Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} ax+2 & \text{si } x < 1 \\ 2ax-b & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3\,. \\ 2x+2b & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$. Montrer que g admet un prolongement par continuité en 1 et déterminer la valeur de ce prolongement en 1.

Exercice 9. Soit f la fonction définie pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x > 0 \quad f(x) = x^2 \ln(x) + 1.$$

1. Justifier que f est continue sur $]0\,;+\infty[$.
2. Démontrer que f est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de son prolongement en 0.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^{2023}+x+1}{x^{2024}+1}$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1\,;0]$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout réel x,

$$|f(x)| = 1.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(x)$?
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que f est constante.

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Dresser le tableau de variations de f . On y fera apparaître ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. La fonction f est-elle injective ?
3. Démontrer que f réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $[1\,;+\infty[$.
4. Déterminer une expression de la bijection réciproque.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x.

1. $(E_1) : x^3 = 7$ **2.** $(E_2) : x^4 = 8$ **3.** $(E_3) : x^6 + x = 0.$

Exercice 14. En reconnaissant des taux d'accroissement, calculer, dans chacun des cas suivant, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

1. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ **2.** $f(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$ **3.** $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ **4.** $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 15. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer sur quel ensemble f est dérivable et calculer sa dérivée.

1. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ **2.** $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ **3.** $f : x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4. $f : x \longmapsto x\sqrt[3]{x}$ **5.** $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ **6.** $f : x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 16. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$\forall x > 0 \quad f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Justifier que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 0$.

2. En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

3. Déduire de la question précédente que, pour tout réel $x < 0$,

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Exercice 17. Soit $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^x$ définie sur $[-1\,;+\infty[$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ sur $\left[-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$.
On note w la bijection réciproque de f.

2. Déterminer $w(0)$.

3. Justifier que w est dérivable sur $\left]-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$, que $w'(0) = 1$ et que

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[\setminus \{0\}, \quad w'(x) = \frac{w(x)}{x(w(x)+1)}.$$

Exercice 18. En utilisant le théorème des accroissements finis, donner une valeur approchée de $\sqrt{10\,001}$ en majorant l'erreur commise.

Exercice 19.

1. Soit un réel $a > 0$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{a+1} \leqslant \ln(a+1) - \ln(a) \leqslant \frac{1}{a}.$$

2. Vérifier que, pour tout réel $x > 0$, $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

3. Déduire des questions précédentes la limite de $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 20. Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2 - \cos\left(\frac{u_n}{2}\right) \end{cases}.$$

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = 2 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) - x$.

a. Démontrer que g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$.

d. Déterminer le signe de g sur $[0\,;+\infty[$ et justifier que $\alpha \in [0\,;\pi]$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\alpha]$ par $f(x) = 2 - \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

a. Calculer $f(0)$ et justifier que $f(\alpha) = \alpha$.

b. Montrer que f est croissante sur $[0\,;\alpha]$.

c. Déduire des questions précédentes que $\alpha \geqslant 1$.

d. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

e. Démontrer que (u_n) converge puis déterminer sa limite.

Exercice 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(E_n)\ x^3 + nx = 1.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction

$$f_n : x \longmapsto x^3 + nx - 1$$

définie sur $\mathbb{R}$.

a. Dresser le tableau de variations de f_n sur $\mathbb{R}$. On y fera apparaître ses limites ainsi que ses valeurs en 0 et en 1.

b. Démontrer que l'équation (E_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et que cette solution appartient à $[0\,;1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n l'unique solution de l'équation (E_n). On définit ainsi une suite réelle u. D'après la question précédente, $u_n \in [0\,;1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. **a.** Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(u_{n+1}) = -u_{n+1}$.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $f_n(u_{n+1})$.

c. En utilisant la question précédente et le tableau de variations de f_n, démontrer que u est décroissante.

3. **a.** Justifier que u converge.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

c. En déduire la limite de u.

4. Démontrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 22. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0\,;1]$ par

$$f_n(x) = 1 - x - x^n.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $\alpha_n \in [0\,;1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$.

3. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et qu'elle converge vers un réel ℓ.

4. En utilisant un raisonnement par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Exercice 23. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

1. Justifier que f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 2x(x-1)(x+1)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

2. En déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

5. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède exactement deux solutions que l'on notera u_n et v_n (avec $u_n < v_n$).

On définit ainsi deux suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$.

6. Déterminer les variations de (u_n) et (v_n).

7. Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes puis déterminer leurs limites.

Exercice 24. Déterminer, en justifiant sa réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

(A1) Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

(A2) Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(A3) Une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$.

(A4) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x+1}{2x^2-1} = \frac{1}{2}$.

(A5) Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution alors f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

(A6) Il existe un entier naturel $n \geqslant 2$ tel que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admette au moins 2 solutions dans $[0\,;+\infty[$.

Exercice 25.

1. Démontrer que si $f : [0\,;1] \longrightarrow [0\,;1]$ est une fonction continue alors il existe un réel $c \in [0\,;1]$ tel que $f(x) = x$. On pourra considérer la fonction $\varphi : x \longmapsto f(x) - x$.

2. Démontrer que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et décroissante alors il existe un réel c tel que $f(x) = x$.