⧫ Chapitre 17. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

I. — Définition

1) Introduction

Étant donné deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan (resp. de l'espace), on peut définir le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ et, pour tout réel k, le vecteur $k\overrightarrow{u}$.

Si on se donne un repère du plan (resp. de l'espace), on peut déterminer les coordonnées $(x\,;y)\in\mathbb{R}^2$ (resp. $(x\,;y\,;z)\in\mathbb{R}^3$) du vecteur $\overrightarrow{u}$ et les coordonnées $(x'\,;y')$ (resp. $(x'\,;y'\,;z')$) du vecteur $\overrightarrow{v}$. Dans ce cas, les coordonnées de $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ sont $(x+x'\,;y+y')$ (resp. $(x+x'\,;y+y'\,;z+z')$) et les coordonnées de $k\overrightarrow{u}$ sont $(kx\,;ky)$ (resp. $(kx\,;ky\,;kz)$).

Ainsi, les opérations sur les vecteurs se traduisent par les mêmes opérations sur les coordonnées. Le but du chapitre est de généraliser cela.

2) Définition

Définition 1 : (Rappel)

On désigne par $\mathbb{R}^n$ le produit cartésien $\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$ i.e. l'ensemble des n-uplets de réels.

Ainsi,

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid \forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i\in\mathbb{R}\}.$$

Exemple 2. $\mathbb{R}^4$ est l'ensemble des quadruplets de réels i.e.

$$\mathbb{R}^4=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1\in\mathbb{R}\text{ et }x_2\in\mathbb{R}\text{ et }x_3\in\mathbb{R}\text{ et }x_4\in\mathbb{R}\}.$$

Ainsi, $(-1,\frac{2}{3},\pi,\sqrt{2})\in\mathbb{R}^4$ mais $(1,3,-2)\notin\mathbb{R}^4$ et $(1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i})\notin\mathbb{R}^4$.

Définition 3 : Opérations sur $\mathbb{R}^n$

On définit sur $\mathbb{R}^n$,

- une **addition** en posant, pour tous $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ et $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ dans $\mathbb{R}^n$,

$$u+v=(u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n).$$

- une **multiplication par un réel** en posant, pour tout $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\lambda u=(\lambda u_1,\lambda u_2,\ldots,\lambda u_n).$$

Lorsqu'on a muni $\mathbb{R}^n$ de ces deux opérations, on dit que $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel et ses éléments sont appelés des vecteurs.

Remarque 4. Lorsqu'on munit $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace vectoriel, les réels sont aussi appelés des scalaires et la multiplication par un réel s'appelle aussi la multiplication par un scalaire.

Propriété 5

L'addition et la multiplication par un scalaire héritent des propriétés habituelles de l'addition et de la multiplication sur $\mathbb{R}$. Plus précisément,

1. pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $u + v = v + u$ (l'addition est commutative) ;
2. pour tout $(u, v, w) \in (\mathbb{R}^n)^3$, $(u + v) + w = u + (v + w)$ (l'addition est associative) ;
3. le vecteur $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, ..., 0)$ vérifie, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $v + 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n} + v = v$;
4. pour tout $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, le vecteur $-v = (v_1, -v_2, ..., -v_n)$, appelé **opposé de** v, vérifie $v + (-v) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
5. pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $(\lambda+\mu)v = \lambda v+\mu v$ et $\lambda(u+v) = \lambda u+\lambda v$ (distributivité à droite et à gauche de la multiplication sur l'addition) ;
6. pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et tout $v \in \mathbb{R}^n$, $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ (associativité de la multiplication par un scalaire) ;
7. pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, $1v = v$.

Notation 6. Si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et λ est un scalaire alors le vecteur $u + (-\lambda)v$ se note également $u - \lambda v$.

Exemple 7. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u = (1, 0, -1, 2)$ et $v = (3, 1, -2, 6)$. Déterminer le vecteur $3u - 4v$.

Propriété 8

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Alors, $\lambda v = 0_{\mathbb{R}^n}$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $v = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Définition 9

Soit u_1, u_2, ..., u_p des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Une **combinaison linéaire** de u_1, u_2, ..., u_p est une somme de la forme

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i \quad \text{i.e.} \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_p u_p$$

où λ_1, λ_2, ..., λ_p sont des scalaires.

Les nombres réels λ_1, λ_2, ..., λ_p sont alors appelés les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Remarque 10. Une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 11. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le vecteur $w = (2, -6, -1, 1)$.

1. Le vecteur w est-il combinaison linéaire des vecteurs $u = (1, 0, 1, 2)$ et $v = (0, 2, 1, 1)$?
2. Le vecteur w est-il combinaison linéaire des vecteurs $U = (1, 0, 1, -1)$ et $V = (2, 1, 0, 3)$?
3. Le vecteur w est-il combinaison linéaire des vecteurs $U = (1, 0, 1, -1)$, $V = (2, 1, 0, 3)$ et $W = (0, 1, 0, 2)$?

II. — Sous-espaces vectoriels

1) Définition et propriétés

Définition 12

Un **sous-espace vectoriel** de $\mathbb{R}^n$ est une partie F de $\mathbb{R}^n$ telle que :

1. $0_{\mathbb{R}^n} \in F$;
2. F est stable pour l'addition c'est-à-dire, pour tout $(u, v) \in F^2$, $u + v \in F$;
3. F est stable pour la multiplication par un scalaire c'est-à-dire, pour tout $v \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v \in F$.

Remarque 13. D'un point de vue pratique, les deux derniers points peuvent être vérifiés en même temps en montrant que, pour tout $(u, v) \in F^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u + v \in F$.

Exemple 14. Déterminer, dans chaque cas, si F est un sous-espace vectoriel de E

1. $F = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $E = \mathbb{R}^n$.
2. $F = \mathbb{R}^n$ et $E = \mathbb{R}^n$.
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ et $E = \mathbb{R}^3$
4. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 1\}$ et $E = \mathbb{R}^3$
5. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ et $E = \mathbb{R}^2$
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ et $E = \mathbb{R}^2$

Propriété 15

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors, F est stable par combinaison linéaire i.e. si u_1, u_2, ..., u_p appartiennent à F alors toute combinaison linéaire de u_1, u_2, ..., u_p appartient également à F.

Exemple 16. On considère le sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 appartenant à F puis vérifier que $v = 5u_1 - 3u_2 + \dfrac{1}{3}u_3$ est un vecteur de F.

Propriété 17

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Alors, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 18. Montrer que $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 19. La propriété précédente se généralise par récurrence : si F_1, F_2, ..., F_k sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} F_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

⚠ En général, l'union de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exemple 20. En reprenant les notations de l'exemple précédent, montrer que $K = F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

2) Sous-espace engendré par une famille de vecteurs

Définition 21

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Un p-uplet $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est appelé une **famille de** p **vecteurs** de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 22.

1. $\mathcal{F}_1 = ((1,0),(0,1))$ est une famille de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathcal{F}_2 = ((1,0,1),(0,1,2),(4,-1,1),(1,1,-1))$ est une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Théorème et définition 23

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé le **sous-espace engendré** par $\mathcal{F}$. On le note $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, ..., v_p)$ ou $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Remarque 24.

1. On a donc $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, ..., v_p) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p \mid (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\}$.
2. Si $v_1, ..., v_p$ appartiennent à un sous-espace vectoriel F de E alors $\mathrm{Vect}(v_1, ..., v_p) \subset F$ d'après la propriété 15.

Exemple 25.

1. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ où $v_1 = (1,-2)$ et $v_2 = (1,-1)$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 \neq \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ où $w_1 = (1,1,0)$ et $w_2 = (0,1,1)$.

III. — Familles libres, familles génératrices, bases

1) Familles libres

Définition 26

Soit $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille libre** (ou **famille linéairement indépendante**) si

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \qquad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n} \Longleftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) = (0,0,...,0).$$

  Autrement dit, une famille est libre si la seule combinaison linéaire de ses vecteurs qui soit nulle est la combinaison dont tous les coefficients sont nuls.
- Si la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.

Exemple 27.

1. Montrer que $((1,0,1,1),(0,1,1,1),(2,1,0,-1),(1,1,0,0))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que $((0,1),(1,1),(2,-5))$ est une famille liée de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 28. Toute famille de vecteurs contenant $0_{\mathbb{R}^n}$ est liée car $1 0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Propriété 29

Soit u et v des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1. La famille (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.
2. La famille (u, v) est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires c'est-à-dire si et seulement si, pour tout réel λ, $u \neq \lambda v$ et $v \neq \lambda u$.

Remarque 30. Attention ! Le point 2. ne se généralise pas à plus de 2 vecteurs. Par exemple, $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 0)$ sont deux à deux non colinéaires mais $u - v + w = (0, 0, 0)$ donc (u, v, w) est liée.

Propriété 31

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si aucun vecteur de $\mathcal{F}$ n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.

Remarque 32. On en déduit qu'une famille est liée si et seulement si on peut écrire un de ses vecteurs comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

Méthode 33

- Pour montrer qu'une famille est libre, on écrit une combinaison linéaire nulle et on montre que tous les coefficients sont égaux à 0.
- Pour montrer qu'une famille est liée, on essaie d'exprimer un vecteur en fonction des autres.

Exemple 34. On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (-1, 2, 1)$, $u_3 = (-1, 1, 1)$ et $u_4 = (1, 0, 1)$

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est libre.
2. Montrer que (u_1, u_2, u_4) est liée.

Propriété 35

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{G}$ une famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en enlevant éventuellement des vecteurs. Si $\mathcal{F}$ est libre alors $\mathcal{G}$ est libre.

Remarque 36. Autrement dit, toute sous-famille d'une famille libre est libre.

2) Familles génératrices

Définition 37

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de F. On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** de F si $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.
Autrement dit, une famille $(v_1, v_2, ..., v_p)$ de vecteurs de F est génératrice si, pour tout vecteur $v \in F$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k$.

Exemple 38. Déterminer une famille génératrice de $F = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$.

Remarque 39.

1. Par définition, une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ est génératrice de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
2. Dans la pratique, montrer qu'un ensemble F s'écrit sous la forme $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ permet à la fois de montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et d'en déterminer une famille génératrice.

Propriété 40

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de F et $\mathcal{G}$ une famille obtenue à partir de $\mathcal{F}$ en ajoutant éventuellement des vecteurs de F. Si $\mathcal{F}$ est génératrice de F alors $\mathcal{G}$ est génératrice de F.

Remarque 41. Autrement dit, toute famille de vecteurs de F ayant une sous-famille génératrice de F est une famille génératrice de F.

3) Bases

Définition 42

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ de F est une **base** de F si $\mathcal{F}$ est à la fois libre et génératrice de F.

Exemple 43.

1. Montrer que $\mathcal{B}_1 = ((1, -2), (1, -1)$ est une base de $\mathbb{R}_2$.
2. Montrer que $\mathcal{B}_2 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $\mathcal{B}_3 = ((1, -2), (1, -1), (2, 1))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 44

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de F. Alors, $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$.
Autrement dit, une famille $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de vecteurs de F est une base de F si et seulement si, pour tout vecteur v de E, <u>il existe un unique</u> p-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$v = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k.$$

Exemple 45. Tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique sous la forme $v = (a, b, c)$ i.e. sous la forme $v = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$ donc $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

L'exemple précédent se généralise à n'importe quel espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ c'est-à-dire

$$v = v_1(1, 0, 0, ..., 0) + v_2(0, 1, 0, ..., 0) + \cdots + v_i(0, 0, ..., 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i^{\text{e}}}}{1}, 0, ..., 0) + \cdots + v_n(0, 0, ..., 0, 1)$$

Définition 46

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème qui égale à 1. Alors, $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$. On la notera $\mathcal{B}_{\text{can}}$.

Exemple 47.

1. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\mathcal{B}_{\text{can}} = ((1, 0), (0, 1))$.
2. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\mathcal{B}_{\text{can}} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.
3. La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\mathcal{B}_{\text{can}} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

IV. — Dimension d'un sous-espace vectoriel

1) Définition

Théorème et définition 48

Soit F un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ différent de $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Alors, F admet des bases et toutes les bases de F ont le même cardinal p. Ce nombre p est appelé la **dimension** de F et on le note $\dim(F)$. On convient, de plus, que $\dim(\{0_{\mathbb{R}^n}\}) = 0$.

Exemple 49. On a vu que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est composée de n vecteurs donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. Ainsi, toute base de $\mathbb{R}^n$ est également composée de n vecteurs.

Exemple 50. Montrer que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 4x + 3y + 2z + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3.

Définition 51

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1. Si $\dim(F) = 1$, on dit que F est une **droite vectorielle** de $\mathbb{R}^n$.
2. Si $\dim(F) = 2$, on dit que F est un **plan vectoriel** de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 52.

1. Démontrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrer que $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 3z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\}$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

2) Liens entre dimension, famille libre et famille génératrice

Propriété 53

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ une famille de k vecteurs de F.

1. Si $\mathcal{F}$ est libre alors $k \leqslant p$.
2. Si $\mathcal{F}$ est génératrice alors $k \geqslant p$.
3. Si $k = p$ alors il y a équivalente entre
   - $\mathcal{F}$ est libre
   - $\mathcal{F}$ est génératrice
   - $\mathcal{F}$ est une base.

Remarque 54. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$.

1. Une famille de k vecteurs avec $k > p$ est liée et une famille de k vecteurs avec $k < p$ n'est pas génératrice.
2. Pour montrer qu'une famille de $p = \dim(F)$ vecteurs de F est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre ou qu'elle est génératrice.

Exemple 55.

1. Justifier que $\mathcal{B}_1 = ((1,1),(1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que $\mathcal{B}_2 = ((1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,0,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Propriété 56

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1. Si $F \subset G$ alors $\dim(F) \leqslant \dim(G)$.
2. Si $F \subset G$ et si $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.

Remarque 57. En particulier, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ alors $\dim(F) \leqslant n$ et si, de plus, $\dim(F) = n$ alors $F = \mathbb{R}^n$.

V. — Représentation matricielle et rang d'une famille de vecteurs

1) Représentation matricielle d'une famille de vecteurs dans une base

Dans tout ce paragraphe, on considère un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et on se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ de F.

Par théorème, tout vecteur v de E peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

On dit alors qu'on a décomposé le vecteur v dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 58

Avec les notations précédentes,

1. Les scalaires λ_1, λ_2, ..., λ_n sont appelés les **coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$**.
2. la matrice colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est appelé la **matrice des coordonnées v dans la base $\mathcal{B}$** et on la note $\mathcal{M}at_{\mathrm{B}}(v)$.

Exemple 59. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées du vecteur $v = (1,2,3)$ dans la base

$$\mathcal{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$$

et en déduire la matrice des coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 60

Si $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_k)$ est une famille de k vecteurs de F, on appelle **matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$**, notée $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, la matrice de $\mathscr{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, la j-ème colonne de $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est égale à la matrice colonne $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(v_j)$.

Exemple 61. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u, v, w)$ où $u = (1, -1, 2)$, $v = (-4, 0, 5)$ et $w = (1, 2, 1)$.

1. Déterminer la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ de $\mathbb{R}^3$.

2) Rang d'une famille de vecteurs

Définition 62

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle **rang** de $\mathcal{F}$ et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

Remarque 63. Si la famille $\mathcal{F}$ est libre alors c'est une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ donc $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$.

Théorème 64

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Alors,

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}(\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})).$$

Remarque 65. Autrement dit, la dimension du sous-espace engendré par une famille de vecteurs est égale aux nombres de pivots de la matrice de cette famille dans n'importe quelle base de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 66. Déterminer de deux façons différentes le rang de la famille $\mathcal{F} = (u, v, w, t)$ de $\mathbb{R}^3$ où $u = (1, -1, 1)$, $v = (2, 1, 2)$, $w = (1, 2, 1)$ et $t = (0, 3, 0)$.

Propriété 67

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_k)$ une famille de k vecteurs de F.

1. $\mathcal{F}$ est une famille libre si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = k$;
2. $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de F si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = p$
3. $\mathcal{F}$ est une base de F si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = k = p$.

Exemple 68. Démontrer que, quels que soient les éléments a, b, c, d, e et f de $\mathbb{R}$, la famille $((1, a, b, c), (0, 2, d, e), (0, 0, 3, f), (0, 0, 0, 4))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

VI. — Exercices

Exercice 1. Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 5y = 0\}$ et $E = \mathbb{R}^2$.
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 7z = 0\}$ et $E = \mathbb{R}^3$.
3. $F_3 = \{(2a + b, a - 3b, 5b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Démontrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

1. $F_1 = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 3z = 0\}$
3. $F_3 = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0 \text{ et } x + y + 3z = 0\}$.

Exercice 3. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $A = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0\}$.
2. $B = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
3. $C = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.
4. $D = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.

Exercice 4. On considère les ensembles

$$F = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(a - b\,;a + b\,;a - 3b) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 5. On considère les vecteurs $u = (-4\,;4\,;3)$, $v = (-3\,;2\,;1)$, $s = (-1\,;2\,;2)$ et $t = (-1\,;6\,;7)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(s, t)$.

Exercice 6. On considère les vecteurs $u = (1\,;1\,;1)$ et $v = (1\,;0\,;-1)$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\mathrm{Vect}(u, v) = \{(2a\,;a + b\,;2b) \mid (a\,;b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice 7. Déterminer lesquelles des familles suivantes sont libres. Pour chaque famille liée, exprimer l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres.

1. $((1, 2), (-1, 3))$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $((0, 3), (1, 4), (1, 5))$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $((1, 2, 3), (1, 4, 5), (0, 1, 2))$ dans $\mathbb{R}^3$.
4. $((1, 2, 3), (-1, 1, 2), (3, 3, 4))$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8. Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ?

1. $\mathcal{F}_1 = (v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1\,;0\,;1)$ et $v_2 = (1\,;2\,;2)$.
2. $\mathcal{F}_2 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1\,;0\,;0)$, $v_2 = (1\,;1\,;0)$ et $v_3 = (1\,;1\,;1)$.
3. $\mathcal{F}_3 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1\,;2\,;1)$, $v_2 = (2\,;1\,;-1)$ et $v_3 = (1\,;-1\,;-2)$.
4. $\mathcal{F}_4 = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1\,;-1\,;1)$, $v_2 = (2\,;-1\,;3)$ et $v_3 = (-1\,;1\,;-1)$.

Exercice 9. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels d'un certain $\mathbb{R}^n$ et déterminer, pour chacun, une famille génératrice.

1. $E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x + 2y - 5z + t = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$.

2. $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$.

3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = 0 \text{ et } 2x + y + 2z = 0\}$.

Exercice 10. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + 2y + 3z - t = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une famille génératrice de F.

Exercice 11. On considère $e_1 = (1\,;1\,;1)$, $e_2 = (1\,;1\,;0)$ et $e_3 = (0\,;1\,;1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12. Soit $F = \{(x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0 \text{ et } 4x + y = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer une base de F.

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$e_1 = (1, 0, 3) \qquad e_2 = (2, 1, 4) \qquad e_3 = (1, 2, 1).$$

1. Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $\mathcal{B}$.

$$u = (1, 3, 1) \qquad v = (0, -2, 2) \qquad w = (3, 6, 3).$$

Exercice 14. Déterminer les dimensions des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0 \text{ et } -x + 2y - z = 0\}$.

2. $E_2 = \text{Vect}((1, 2, 3), (0, 1, 5))$.

3. $E_3 = \text{Vect}((1, 0, 1), (2, 5, 1), (-1, 5, -2))$.

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$.

1. Montrer que la famille (u, v, w) est liée.

2. On pose $F = \text{Vect}(u, v, w)$. Déterminer une base de F.

3. On pose $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de G.

4. Montrer que $F = G$.

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère, d'une part, les vecteurs

$$u = (1, 0, 1, 0) \qquad v = (0, 1, -1, 0) \qquad \text{et} \qquad w = (1, 1, 1, 1)$$

et, d'autre part, les vecteurs

$$x = (0, 0, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad y = (1, 1, 0, -1).$$

On pose $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$.

1. Déterminer les dimensions de F et de G.

2. On pose $H = F \cap G$.

a. Justifier que $\dim(H) \in \{0, 1, 2\}$.

b. Montrer que si $\dim(H) = 2$ alors $x \in F$ et aboutir à un contradiction.

c. Montrer que si $\dim(H) = 0$ alors (u, v, w, x, y) est libre et aboutir à une contradiction.

d. En déduire la dimension de H.

Exercice 17. Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes :

1. (u, v, w) avec $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1, -1)$ et $w = (1, 0, 1, 1)$.

2. (u, v, w, x) avec $u = (1, 1, 0, 1)$, $v = (1, -1, 1, 0)$, $w = (2, 0, 1, 1)$ et $x = (0, 2, -1, 1)$.