♦ Chapitre 16. — Suites réelles

I. — Généralités

1) Définition (Rappels)

Définition 1

Une suite réelle u est une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2. Plus concrètement, une suite peut être vue comme une liste de nombres indexés par une partie A de $\mathbb{N}$. Les différents nombres de la liste sont appelés les termes de la suite. L'entier n associé au terme $u(n)$ est appelé le rang de $u(n)$.

Notation 3. On considère une suite $u : A \longrightarrow \mathbb{R}$ où $A \subset \mathbb{N}$.

1. Pour tout $n \in A$, le terme $u(n)$ de la suite u se note également u_n (« u indice n »).
2. La suite u se note également $(u(n))_{n\in A}$ ou encore $(u_n)_{n\in A}$. Pour alléger les notations, on la note également $(u(n))$ ou (u_n).

⚠ Il ne faut pas confondre u_n qui désigne le terme de rang n de la suite (c'est donc un nombre réel) et (u_n) qui désigne la suite u (c'est donc une fonction).

2) Mode de génération d'une suite

Il existe différentes façons de définir une suite.

a) Par une expression explicite

On peut définir une suite par une expression explicite de u_n en fonction de n pour tout $n \in A$. C'est la façon la plus simple et la plus directe de définir une suite. Elle permet en particulier de calculer n'importe quel terme de la suite.

Exemple 4. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$. Alors, on peut calculer directement u_4 :

$$u_4 = \frac{2^4 - 1}{2^4 + 1} = \frac{15}{17}.$$

Remarque 5. La suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = a$ et de raison r est définie explicitement par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nr$ et la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = a$ et de raison q est définie explicitement par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = aq^n$.

b) Par une relation de récurrence

Une autre façon de définir une suite consiste à donner son premier terme et une relation permettant, connaissant un terme, de calculer le suivant. Une telle relation s'appelle une **relation de récurrence**.

Il s'agit d'une façon un peu plus compliquée et surtout beaucoup moins directe de définir une suite. En particulier, pour déterminer un terme, il faut connaître le précédent.

Exemple 6. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2}$. Calculer u_4.

Remarque 7. La suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = a$ et de raison r est définie par récurrence par : $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ et la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = a$ et de raison q est définie par récurrence par : $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.

Il ne faut pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$. Dans le premier cas, on ajoute 1 à n alors que, dans le second, on ajoute 1 à u_n.

Remarque 8. Il est possible de définir une suite par une relation de récurrence liant plus de deux termes consécutifs.

Exemple 9. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$. Calculer u_4.

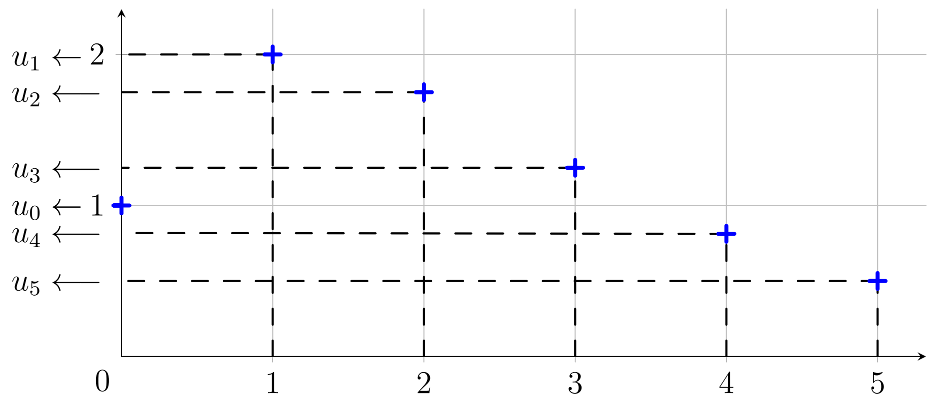
3) Représentation graphique

On peut représenter graphiquement une suite $u : A \longrightarrow \mathbb{N}$ dans un repère par l'ensemble des points de coordonnées (n, u_n) lorsque $n \in A$. Une telle représentation s'appelle un **nuage de points**.

L'ensemble A étant en général infini, on ne représentera dans la pratique qu'une partie du nuage de points correspondant aux premières valeurs de n.

Exemple 10. On considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3n+1}{2^n}$.

On peut représenter la suite (u_n) par le nuage de points suivants :



4) Opérations sur les suites

Les opérations vues sur les fonctions s'appliquent aux suites qui sont des fonctions particulières. Ainsi, si $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ sont deux suites définies à partir du rang N et si λ et μ sont des réels, on définit

- la suite $w = \lambda u + \mu v$ par : pour tout entier $n \geqslant N$, $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$;
- la suite $t = uv$ par : pour tout entier $n \geqslant N$, $t_n = u_n v_n$;
- si, pour tout $n \geqslant N$, $v_n \neq 0$, la suite $s = \dfrac{u}{v}$ par : pour tout entier $n \geqslant N$, $s_n = \dfrac{u_n}{v_n}$;

Exemple 11. On considère les suites a et b définies par $a_0 = 2$, $b_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 4b_n}{5}$.

Montrer que $s = b - a$ est une suite géométrique et que $t = 3a + 10b$ est une suite constante. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de s_n et de t_n en fonction de n puis celle de a_n et de b_n en fonction de n.

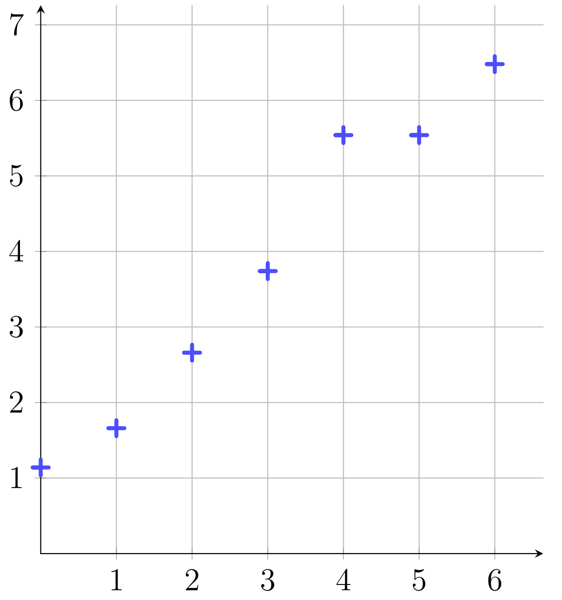
II. — Variations

1) Définitions

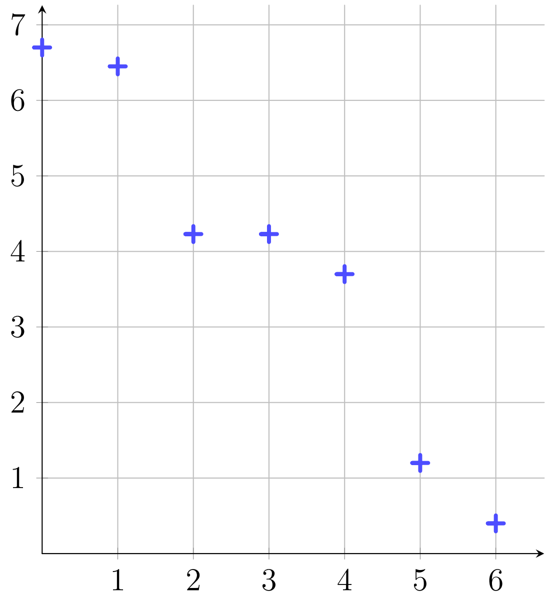
Définition 12

Soit N un entier naturel et (u_n) une suite réelle définie (au moins) à partir du rang N. On dit que :

- (u_n) est **croissante** à partir du rang N si, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- (u_n) est **décroissante** à partir du rang N si, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- (u_n) est **constante** à partir du rang N si, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_{n+1} = u_n$;
- (u_n) est **monotone** à partir du rang N si elle ne change pas de variations à partir du rang N (i.e. si (u_n) reste croissante ou reste décroissante à partir du rang N).



Nuage de points d'une suite croissante



Nuage de points d'une suite décroissante

Remarque 13.

1. Il existe des suites qui ne sont pas monotones. Par exemple, la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n$. En effet, si n est pair alors $(-1)^n = 1$ et $(-1)^{n+1} = -1$ donc $u_n \geqslant u_{n+1}$ mais, si n est impair, $(-1)^n = -1$ et $(-1)^{n+1} = 1$ donc $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi, la suite (u_n) change constamment de variation. C'est le cas de toutes les suites qui ont un signe qui change en fonction de la parité de n. Ces suites sont appelées des suites alternées.

2. Si, dans la définition précédente, les inégalités sont strictes, on parle de suite strictement croissante ou strictement décroissante.

3. Par définition, les suites constantes sont à la fois croissantes et décroissantes et ce sont les seules à posséder cette propriété.

2) Méthodes d'étude des variations

Pour étudier les variations d'une suite (u_n) (au moins à partir d'un certain rang N), on dispose de diverses méthodes.

Méthode 14 : utiliser la définition

Comparer directement u_n et u_{n+1}

Exemple 15. Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

Méthode 16 : étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Si, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors (u_n) est croissante à partir du rang N et si, pour tout $n \geqslant N$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors (u_n) est décroissante à partir du rang N

Exemple 17. Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 - 5n + 1$.

Méthode 18 : comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1

On suppose que (u_n) est une suite <u>à termes strictement positifs</u>.
Si, pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors (u_n) est croissante à partir du rang N et si, pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors (u_n) est décroissante à partir du rang N.

Exemple 19. Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{5^n}{7^n}$.

Méthode 20 : étudier les variations d'une fonction

On suppose qu'il existe une fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Si f est croissante (resp. décroissante) sur $[N\,; +\infty[$ alors (u_n) est croissante (resp. décroissante) à partir du rang N.

Exemple 21. Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1}$.

Méthode 22 : utiliser un raisonnement par récurrence

Pour montrer que (u_n) est croissante (resp. décroissante) à partir du rang N, on peut démontrer par récurrence que la proposition P_n : « $u_{n+1} \geqslant u_n$ » (ou P_n : « $u_{n+1} \leqslant u_n$ ») est vraie pour tout $n \geqslant N$.

Exemple 23. Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}3u_n + 1$.

Remarque 24.

1. Plusieurs méthodes peuvent fonctionner pour une même suite. Le premier exemple peut tout aussi bien s'étudier avec la méthode 16 ou la méthode 20.
2. La méthode 16 est celle qu'on utilise le plus souvent et c'est celle qu'il faut privilégier.
3. La méthode 18 peut aussi s'appliquer pour des suites à valeurs strictement négatives mais il faut changer le sens de l'inégalité quand on multiplie par u_n. Elle s'applique principalement aux suites contenant des produits (notamment des puissances). Dans tous les cas, **elle ne s'applique pas aux suites dont les termes changent de signe !**

III. — Suites majorées, minorées, bornées

Définition 25

Soit N un entier naturel et (u_n) une suite réelle définie à partir du rang N. On dit que :

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant M$.
  On dit alors que M est un majorant de la suite $(u_n)_{n \geqslant N}$.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant m$.
  On dit alors que m est un minorant de la suite $(u_n)_{n \geqslant N}$.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée i.e. s'il existe deux réels m et M tels que, pour tout entier $n \geqslant N$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.

Remarque 26. Un majorant (resp. un minorant) n'est pas unique. En effet, si M est un majorant d'une suite $(u_n)_{n \geqslant N}$ alors tout nombre réel $M' \geqslant M$ (resp. $m' \leqslant m$) est également un majorant (resp. un minorant) de $(u_n)_{n \geqslant N}$ car, pour tout entier $n \geqslant N$, $u_n \leqslant M \leqslant M'$ (resp. $u_n \geqslant m \geqslant m'$).

Exemple 27 (À CONNAÎTRE)**.** Démontrer que les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies, pour tout entier naturel n, par $u_n = \cos(n)$, $v_n = \sin(n)$ et $w_n = (-1)^n$ sont bornées.

Exemple 28. Démontrer que la suite (t_n) définie par

$$\forall n \geqslant 1, \quad t_n = 1 + \frac{1}{n}$$

est bornée.

Exemple 29. Démontrer que la suite (s_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = n^2 - n + 1$$

est minorée.

Exemple 30. On considère la suite (b_n) définie par $b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \sqrt{b_n + 2}$.

1. Montrer par récurrence que (b_n) est majorée par 2.

2. La suite (b_n) est-elle bornée ?

Exemple 31 (À CONNAÎTRE)**.** Démonter que toute suite croissante (resp. décroissante) est minorée (resp. majorée).

Propriété 32

Une suite (u_n) est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée.

Exemple 33.

1. Montrer que la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3\cos(n)\sin(n^2) + 5(-1)^n$$

est bornée.

2. Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q \in [-1\,;1]$. Montrer que (v_n) est bornée.

IV. — Comportement asymptotique

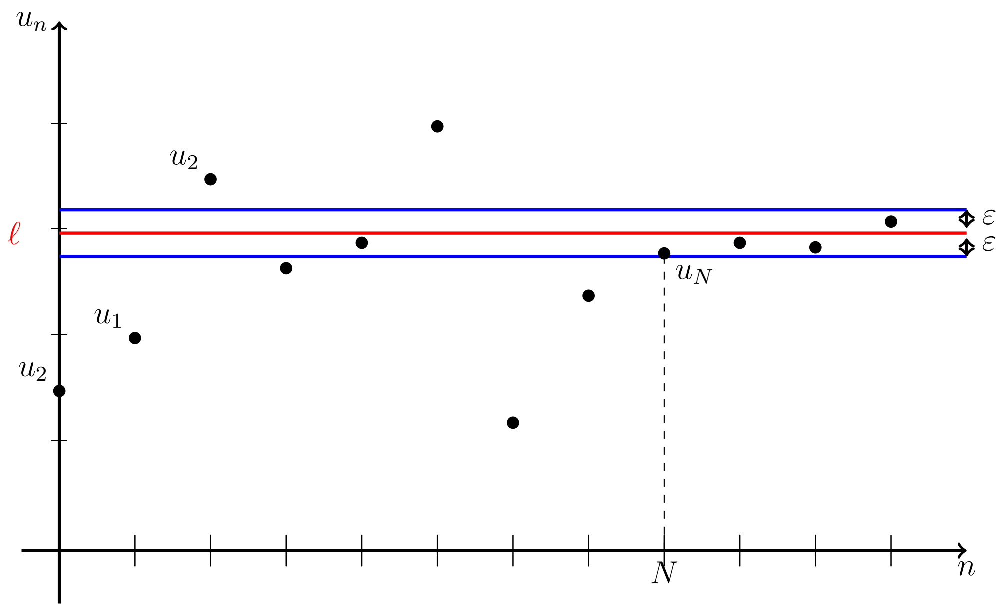
1) Définitions

a) Suites convergentes

Définition 34

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) **converge** (ou **est convergente**) s'il existe un réel ℓ tel que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N (dépendant de ε) tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Cette définition signifie qu'on peut rendre l'écart entre les valeurs u_n de la suite et le nombre ℓ aussi petit que l'on veut dès que n est suffisamment grand.



Propriété 35

Si une suite réelle (u_n) converge alors le nombre ℓ de la définition précédente est unique.

Définition 36

Si (u_n) converge, le réel ℓ de la définition précédente s'appelle la **limite** de (u_n).
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exemple 37. Montrer, en utilisant la définition, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Remarque 38.

1. Par définition, une suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si $|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En particulier, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si et seulement si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. S'il existe une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \geqslant a$, $u_n = f(n)$ et si f converge vers un réel ℓ en $+\infty$ alors (u_n) converge vers ℓ.

Exemple 39. Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Propriété 40

Toute suite convergente est bornée.

b) Suites divergentes

Définition 41

On dit qu'une suite **diverge** (ou **est divergente**) si elle ne converge pas.

Exemple 42. Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ diverge et en déduire que la réciproque de la propriété 40 est fausse.

Définition 43

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que :

- (u_n) **tend (ou diverge) vers** $+\infty$ si, pour tout réel A positif, il existe un entier N (dépendant de A) tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant A$. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
- (u_n) **tend (ou diverge) vers** $-\infty$ si, pour tout réel B négatif, il existe un entier N (dépendant de B) tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant B$. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

Remarque 44. En particulier, s'il existe une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \geqslant a$, $u_n = f(n)$ et si f diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) alors (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple 45. Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$.

Propriété 46

La caractère convergeant ou divergeant d'une suite, ainsi que son éventuellement limite, est indépendant des premières valeurs de la suite. En particulier, si (u_n) est une suite admettant une limite (finie ou infinie) ℓ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.

2) Théorèmes sur les limites

a) Limites de référence

Toutes les limites en $+\infty$ vues dans le cadre des fonctions s'appliquent évidemment aux suites. Ainsi, par exemple,

1. Pour tout entier $k \geqslant 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0\,;$

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty\,;$

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$ et

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty\,;$

b) Opérations sur les limites

On dispose des mêmes propriétés sur les opérations que celles vues pour les fonctions.
Dans tous les tableaux suivants, (u_n) et (v_n) sont des suites réelles et ℓ et ℓ' sont des réels.

1. Limite d'une somme

si (u_n) tend vers	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si (v_n) tend vers	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ tend vers						

L'étude de $(u_n - v_n)$ se ramène à celle d'une somme en écrivant que $u_n - v_n = u_n + (-v_n)$.

2. Limite d'un produit

si (u_n) tend vers	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si (v_n) tend vers	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(u_n v_n)$ tend vers									

Les suites du type (kv_n) où k est un réel sont des cas particuliers de ce qui précède en prenant pour (u_n) la suite constante égale à k.

3. Limite d'un quotient

- Cas où (v_n) ne tend pas vers 0

si (u_n) tend vers	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si (v_n) tend vers	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers							

- Cas où (v_n) tend vers 0

si (u_n) tend vers	$\ell > 0$	$+\infty$	$\ell > 0$	$+\infty$	$\ell < 0$	$-\infty$	$\ell < 0$	$-\infty$	0
et si (v_n) tend vers	0^+	0^+	0^-	0^-	0^+	0^+	0^-	0^-	0
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers									

4. Composition par une fonction

Théorème 47

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que (u_n) est une suite telle que $u_n \in I$ pour tout n suffisamment grand et que (u_n) tend vers une limite ℓ (finie ou infinie). Si f admet une limite (finie ou infinie) en ℓ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{x\to\ell} f(x)$.

Enfin, pour lever les indéterminations, on dispose des mêmes outils que pour les fonctions : factoriser par le terme prépondérant et multiplier par la quantité conjuguée lorsqu'on a une différence de racines carrées.

Exemple 48. Dans chaque cas, déterminer la limite de (u_n).

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{4n+3}{n^2+n+1}$ b) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$ c) $\forall n \geqslant 2,\ u_n = \sqrt{n-2}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n} + \sqrt{n}$ e) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ f) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^3 \mathrm{e}^n$

3) Limites et ordre

a) Comparaisons

Théorème 49

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que, pour tout n (à partir d'un certain rang), $u_n \leqslant v_n$. On suppose, de plus, que (u_n) converge vers ℓ et que (v_n) converge vers ℓ'. Alors, $\ell \leqslant \ell'$.

Remarque 50.

1. En particulier, si (u_n) est majorée (resp. minorée) par M (resp. m) à partir d'un certain rang et si (u_n) converge vers un réel ℓ alors $\ell \leqslant M$ (resp. $u_n \geqslant m$).
2. Si on sait que $u_n < v_n$ pour tout n (à partir d'un certain rang), on NE PEUT PAS en déduire que $\ell < \ell'$ mais seulement que $\ell \leqslant \ell'$. Penser par exemple à $u_n = 0$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Théorème 51 (Théorème d'encadrement ou « des gendarmes »)

Soit (u_n), (d_n) et (g_n) trois suites réelles. On suppose que :

- pour tout entier n (à partir d'un certain rang), $g_n \leqslant u_n \leqslant d_n$;
- les suites (g_n) et (d_n) **convergent vers** **<u>la même limite</u>** i.e. qu'il existe **un réel** ℓ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \ell$.

Alors, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple 52. — Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{n+\cos(n)}{2n+(-1)^n}.$$

Étudier la limite de la suite (u_n).

Théorème 53 (Théorème de comparaison)

Soit (u_n) et (a_n) deux suites réelles. Soit $N \in \mathbb{N}$.

1. Si, pour tout $n \geqslant N$, $a_n \leqslant u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
2. Si, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant a_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exemple 54. Étudier le comportement asymptotique des suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n + \sin(n)$ et $v_n = (-1)^n - n$.

Propriété 55

Soit q un réel.

- Si $q \leqslant -1$ alors (q^n) diverge sans avoir de limite.
- Si $|q| < 1$ (i.e. si $-1 < q < 1$) alors (q^n) converge vers 0.
- Si $q = 1$ alors (q^n) est constante égale à 1 donc converge vers 1.
- Si $q > 1$ alors (q^n) diverge vers $+\infty$.

Exemple 56. Étudier le comportement asymptotique des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = \dfrac{1}{2^n}$, $v_n = 3^n + 0{,}5^n$ et $w_n = 3^n - 2^n$.

b) Théorème de la limite monotone

Théorème 57 (Théorème de la limite monotone)

Toute suite réelle monotone admet une limite (finie ou infinie). Plus précisément,

1. Une suite réelle croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
2. Une suite réelle décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.
3. Une suite réelle croissante et majorée par un réel M converge vers un réel $\ell \leqslant M$.
4. Une suite réelle décroissante et minorée par un réel m converge vers un réel $\ell \geqslant m$.

Remarque 58. Il n'y a aucune raison *a priori* pour que, dans ce théorème, $\ell = M$ ou $\ell = m$ et ce pour la bonne et simple raison que si (u_n) est majorée par M (resp. minorée par m), elle l'est aussi par tout réel $M' \geqslant M$ (resp. par tout réel $m' \leqslant m$).

Exemple 59. Soit $a \in]0\,;1[$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

1. Étudier les variations de (u_n).
2. Démontrer par récurrence que (u_n) est minorée par 0.
3. En déduire que (u_n) converge puis déterminer sa limite.

Exemple 60. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - \mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Démontrer que (u_n) est majorée par 2.
2. Démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge vers une limite ℓ.
4. A-t-on $\ell = 2$?

Exemple 61. On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \mathrm{e}^{v_n}$.

1. Démontrer par récurrence que (v_n) est croissante.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.
3. Déduire des questions précédentes la limite de (v_n).

V. — Suites équivalentes

Définition 62

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Les suites (u_n) et (v_n) sont dites **équivalentes**, si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On note alors $u_n \sim v_n$.

Exemple 63.

1. Démontrer que $n^2 - n + 1 \sim n^2$.
2. Donner un équivalent simple de la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(n^2+1)$.

Théorème 64

1. Deux suites équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Deux suites équivalentes ont le même comportement asymptotique : elles sont de même nature (convergente ou divergente) et si l'une admet une limite finie ou infinie, alors l'autre possède la même limite.
3. En particulier, si ℓ est un réel <u>non nul</u> alors $u_n \sim \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

L'objectif de l'utilisation des équivalents est de se ramener à une suite plus simple dont on connaît le comportement asymptotique.

Propriété 65 (Propriété et opérations sur les suites équivalentes)

On considère des suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n).

1. Si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$ (symétrie)
2. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$ (transitivité)
3. On peut multiplier les équivalents :
   - si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$;
   - si $u_n \sim v_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\lambda u_n \sim \lambda v_n$;
   - si $u_n \sim v_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ et, en particulier, $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$ et $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.
4. On **ne peut pas additionner** des équivalents.
5. On **ne peut pas composer** les équivalents avec une fonction.

Propriété 66

Une suite polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré.

Exemple 67. En utilisant des équivalents, déterminer la limite de (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = n^3 - n^2 + 1$ **2.** $u_n = \dfrac{n^3+1}{n^2+n+1}$ **3.** $u_n = \dfrac{n\sqrt{n+3}}{n^2+1}$.

Propriété 68 (Équivalents usuels au voisinage de 0)

Si une suite réelle (u_n) tend vers 0 alors

$$e^{u_n}-1\sim u_n \qquad \ln(1+u_n)\sim u_n \qquad (1+u_n)^\alpha-1\sim \alpha u_n\ (\alpha\in\mathbb{R}^*)$$

$$\sin(u_n)\sim u_n \qquad \cos(u_n)-1\sim -\frac{{u_n}^2}{2} \qquad \tan(u_n)\sim u_n$$

Exemple 69.

1. Déterminer un équivalent simple de (u_n) définie par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$.
2. Déterminer un équivalent simple de (u_n) définie par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{1-\cos(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\sin(\frac{1}{n})}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

VI. — Exercices

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, déterminer à partir de quel rang la suite (u_n) est définie puis calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).

a) $u_n=-n^2+n+1$; *b)* $u_n=\sqrt{2n-9}$; *c)* $u_n=\sin\left(\dfrac{5\pi}{n}\right)$; *d)* $u_n=(-1)^n$.

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants,

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n).
2. Conjecturer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture.

a) $\begin{cases}u_0=1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+2n+3\end{cases}$; *b)* $\begin{cases}u_0=0\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=1-e^{u_n}\end{cases}$; *c)* $\begin{cases}u_0=-1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{u_n-1}\end{cases}$.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, étudier la monotonie de la suite (u_n) (éventuellement à partir d'un certain rang).

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=n^2-3n+1$;
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{1}{n+2}$;
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{3^n}{n!}$.
4. $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=-2u_n$.
5. $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n(1-2u_n)$.
6. $u_0=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+\ln(u_n^2+4u_n+5)$

Exercice 4. Déterminer les variations des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par

a. $u_n=\dfrac{e^{-n}}{n+1}$ **b.** $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}$ **c.** $w_n=\dfrac{(n+1)!}{2^n}$.

Exercice 5.

1. Étudier les variations de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n!$.
2. Étudier les variations de la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{n^2}{n!}$.
3. Étudier les variations de la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

Exercice 6. Dans chaque cas, étudier les variations de la suite (u_n).

$$a)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\ ; \qquad b)\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\ ; \qquad c)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 7. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{n+2}{n+3}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3 sous forme de fractions irréductibles.
2. Étudier les variations de (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 8. Soit (u_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 4n + 6$. Montrer que (u_n) est minorée par 2.

Exercice 9. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$.

1. Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que (u_n) est majorée par 3.
2. En déduire le sens de variation de (u_n).

Exercice 10. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est bien définie et que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Démontrer que $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11. Dans chaque cas, déterminer le comportement asymptotique de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\text{a) } u_n = n^2 + \sqrt{n} \qquad \text{b) } u_n = -n^3 + n^2 - 2n + 1 \qquad \text{c) } u_n = \frac{n^2 + n - 1}{2n^3 + n + 1}$$
$$\text{d) } u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n} \qquad \text{e) } u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad \text{f) } u_n = \frac{3^n + 4^n}{5^n}$$

Exercice 12. Calculer les limites des suites définies par leur terme général ci-dessous.

1. $u_n = \dfrac{1}{1 + e^n}$ **2.** $u_n = \sqrt{4 + \dfrac{1}{n}}$ **3.** $u_n = \dfrac{e^{-n}}{n+1}$ **4.** $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

Exercice 13. Dans chaque cas, déterminer le comportement asymptotique de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

a) $u_n = 2n + \sin(n)$ b) $u_n = \dfrac{\cos(n^2)}{n+1}$ c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ d) $u_n = (-1)^n \cos(n) - \sqrt{n}$.

Exercice 14. On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{2n + \sin(n)}{n + \cos(n)}$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\dfrac{2n-1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2n+1}{n-1}$.
2. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 15. Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ dont on donne le terme général.

a. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ **b.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$ **c.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$ **d.** $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 16. Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n) dont on donne le terme général.

a. $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$ **b.** $u_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$ **c.** $u_n = \dfrac{\sin(n!)}{n + (-1)^{n+1}}$

Exercice 17. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
2. En déduire que (u_n) est convergente.
3. Déterminer la valeur de la limite de (u_n).

Exercice 18. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. En déduire que (u_n) est convergente.
3. Déterminer la valeur de la limite de (u_n).

Exercice 19. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Toute suite réelle monotone est convergente.
2. Toute suite réelle convergente est monotone.
3. Si (u_n) est une suite divergente alors (u_n^2) est une suite divergente.
4. Si (u_n) est une suite convergente alors (u_n^2) est une suite convergente.

Exercice 20. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est strictement positive.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 21. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]1\,;3[$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

2. a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(3-u_n)(u_n-1)}{u_n}$.

b. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 22. Dans chacun des cas suivants, déterminer un équivalent simple de (u_n) définie par son terme général.

1. $u_n = n^2 - n + 1$ **2.** $u_n = n + \sqrt{n}$ **3.** $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$

4. $u_n = \dfrac{n^2+5}{n+1}$ **5.** $u_n = (n+3)^{2024}$ **6.** $u_n = \ln(1+\mathrm{e}^n)$

Exercice 23. Dans chaque cas, déterminer un équivalent simple puis la limite de la suite (u_n) dont on donne le terme général.

1. $u_n = n^2 - n$ **2.** $u_n = \sin\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$ **3.** $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

4. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$ **5.** $u_n = \sqrt{n^2+1} + n$ **6.** $u_n = \dfrac{\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n^3}} - 1}$

7. $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$ **8.** $u_n = \sin\left(\dfrac{3n+4}{(n+1)^2}\right)$ **9.** $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Exercice 24. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + u_n^2.$$

1. Justifier que, pour tout réel x, $x^2 - x + 1 > 0$.

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge et on note ℓ sa limite.

a. Justifier que $\ell = \ell^2 + 1$.

b. En déduire une contradiction.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 25. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2}$. On admet que (u_n) est bien définie.

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.

2. Montrer que la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ est géométrique.

3. En déduire le terme général de (u_n) ainsi que sa limite.

Exercice 26. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Soit la fonction $f : x \longmapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Dresser le tableau de variations de f .

c. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en 0.

d. Étudier les positions relatives de T et de $\mathscr{C}_f$.

e. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$.

2. Conjecturer graphiquement le comportement de la suite (u_n).

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 27. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}.$$

1. Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+2}{2x}$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b. En déduire que la suite (u_n) est bien définie et que $u_n \geqslant \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ définie sur $]0\,;+\infty[$.

a. Déterminer, pour tout réel x, le signe de $g(x)$ en fonction de x.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

3. Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

4. a. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant (u_n - \sqrt{2})^2.$$

b. En déduire par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)^{2^n}.$$

5. Sachant que $1,4 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1,5$, donner un rang n pour lequel le développement décimal de u_n donne les mille premiers chiffres de l'écriture décimale de $\sqrt{2}$.

Exercice 28. Une puce saute le long d'un axe gradué, en faisant soit des grands sauts de deux unités, soit des petits sauts d'une unité. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n le nombre de façons qu'a la puce d'arriver à l'abscisse n.

1. Calculer F_n pour $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (F_n).
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.
   a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
   b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [1\,;2]$.
   c. Justifier que $1 = -\varphi(1-\varphi)$.
   d. Quelle est la seule limite possible pour (u_n) ? On la note φ dans la suite. On admettra que $1{,}6 \leqslant \varphi \leqslant 1{,}7$.
   e. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi\,|u_{n+1} - \varphi| \leqslant |u_n - \varphi|$.
   f. En déduire, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \varphi| \leqslant \dfrac{1}{\varphi^n}$.
   g. Démontrer finalement que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$.

Exercice 29. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies pour toutes suites réelles (u_n) et (v_n) et tout réel ℓ.

1. Si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $u_n = \ell$ à partir d'un certain rang.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n-1} - u_n) = 0$ alors (u_n) converge.
3. Si (u_n) est bornée, alors elle converge.
4. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
5. Si (u_n) et (v_n) divergent alors $(u_n + v_n)$ diverge.
6. Si (u_n) converge et (v_n) diverge alors $(u_n + v_n)$ diverge.
7. Si (u_n) est monotone alors elle admet une limite (finie ou infinie).
8. Si (u_n) est décroissante et minorée par 0 alors elle converge vers 0.
9. Si (u_n) est bornée et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

Exercice 30. Déterminer si les propositions suivantes sont vraies.

1. Pour toutes suites réelles (u_n) et (v_n), si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ alors $u_n \sim v_n$.
2. Pour toute suite réelle (u_n), $u_{n+1} \sim u_n$.
3. $\mathrm{e}^n + \cos(n) \sim \mathrm{e}^n$.
4. Pour toutes suites réelles (u_n) et (v_n), si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n \sim v_n$ alors $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.

Exercice 31. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{5 \times 7 \times 9 \times \cdots \times (5+2n)}{4 \times 7 \times 10 \times \cdots \times (4+3n)}$.

1. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.