⧫ Chapitre 15. Probabilités sur un univers fini

I. — Expériences aléatoires et évènements

1) Expériences aléatoires

Définition 1

Une **expérience aléatoire** (ou épreuve) est une expérience qui possède les 3 propriétés suivantes :

- l'ensemble des résultats possibles de l'expérience est connu *a priori* ;
- on peut répéter l'expérience dans les mêmes conditions ;
- le résultat d'une réalisation de l'expérience est le fruit du hasard.

Exemple 2.

1. Lancer une pièce équilibrée est une expérience aléatoire. Il y a deux résultats possibles : *pile* ou *face*, on peut répéter l'expérience autant de fois qu'on le désire et, si on lance la pièce, le résultat est bien le fruit du hasard.
2. De même, lancer un dé cubique équilibré est une expérience aléatoire. C'est un exemple historique important. En effet, le mot « aléatoire » vient du latin *alea* qui signifie *dé* et le mot « hasard » vient de l'arabe *al-zahr* qui signifie également *dé*.
3. Un tirage au loto est une expérience aléatoire.

Remarque 3. Toutes les expériences dont les résultats sont le fruit du hasard ne sont pas des expériences aléatoires. Par exemple, si on rencontre quelqu'un dans la rue « par hasard », cela ne constitue pas une expérience aléatoire.

Définition 4

L'ensemble des résultats (ou issues) possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** de cette expérience. On le note, en général, Ω.

Exemple 5.

1. L'univers du lancer de pièce équilibrée est $\Omega = \{pile, face\}$.
2. L'univers du lancer de dé cubique équilibré est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. L'univers du tirage du loto est l'ensemble de toutes les combinaisons possibles : on choisit 5 nombres différents entre 1 et 49 puis un numéro chance entre 1 et 10 donc $\Omega = \{C \in \mathcal{P}([\![1, 49]\!]) \mid \mathrm{Card}(C) = 5\} \times [\![1, 10]\!]$.

Remarque 6. Les trois expériences de l'exemple précédent ont un univers qui contient un nombre fini d'éléments (2 pour la première, 6 pour la deuxième et $\binom{49}{5} \times 10 = 19\,068\,840$ pour la troisième). Il existe des expériences dont l'univers contient une infinité d'éléments (par exemple, choisir un réel au hasard dans l'intervalle $[0\,;1]$).

Dans tout ce chapitre, nous ne considérerons que des expériences ayant un univers fini.

2) Évènements

Dans tout ce paragraphe, on considère une expérience aléatoire. On note Ω son univers et on suppose que Ω est fini.

Définition 7

On définit :

1. un **évènement** lié à cette expérience comme étant une partie quelconque de Ω ;
2. un **évènement élémentaire** lié à cette expérience comme un singleton de Ω.

Si A est un évènement et si $a \in A$, on dit que l'issue a **réalise** l'évènement A. Ainsi, un évènement élémentaire est un évènement qui n'est réalisé que par une seule issue.

Remarque 8. Cette vision est la vision moderne des évènements comme étant des parties de l'univers. Cependant, historiquement, les évènements ont d'abord été définis à l'aide de phrases les décrivant. On a gardé aujourd'hui cette double vision et il faut savoir passer de l'une à l'autre.

Exemple 9. On lance un dé cubique équilibré. L'univers est alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. L'évènement A : « Obtenir 6 » est l'évènement $A = \{6\}$. C'est un évènement élémentaire. Il n'est réalisé que par l'issue 6.
2. L'évènement B : « Obtenir un chiffre pair » est l'évènement $B = \{2, 4, 6\}$. Il est réalisé par les trois issues 2, 4 et 6.
3. L'évènement C : « Obtenir un chiffre supérieur à 7 » est l'évènement $C = \varnothing$. Il n'est réalisé par aucune issue de l'expérience.
4. L'évènement D : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6 » est l'évènement $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$. Il est réalisé par toutes les issues de l'expérience.

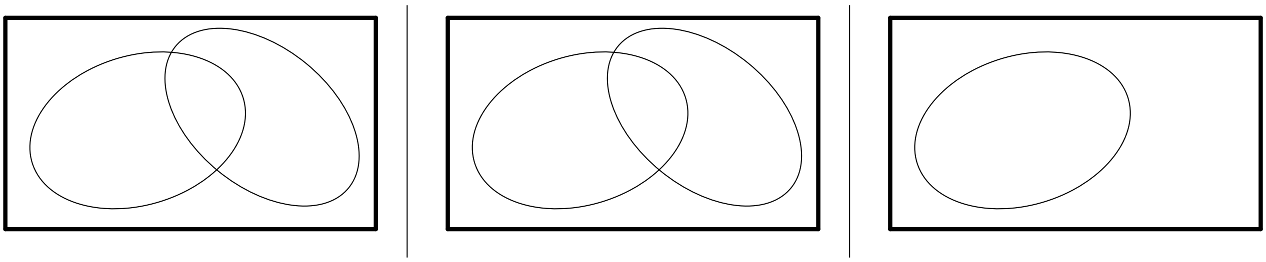
Définition 10

1. L'évènement $\varnothing$ est appelé l'**évènement impossible**. Il n'est réalisé par aucune issue de l'expérience.
2. L'évènement Ω est appelé l'**évènement certain**. Il est réalisé par toutes les issues de l'expérience.

Définition 11

Soit A et B deux évènements de Ω. On définit alors les évènements :

1. « A ou B » qui est réalisé si (au moins) l'un des deux évènements A ou B est réalisé. D'un point de vue ensembliste, il correspond à $A \cup B$.
2. « A et B » qui est réalisé si les deux évènements A et B sont réalisés (simultanément). D'un point de vue ensembliste, il correspond à $A \cap B$.
3. « contraire de A » qui est réalisé si A ne l'est pas. D'un point de vue ensembliste, il correspond au complémentaire $\overline{A}$ de A dans Ω.



Exemple 12. On lance deux fois successivement le même dé équilibré et on note les nombres obtenus dans leur ordre d'apparation.

1. Quel est l'univers de cette expérience ?

2. On considère les évènements A : « obtenir 5 au premier lancer et 1 au second », B : « obtenir un nombre pair au premier lancer » et C : « la somme des nombres obtenus est paire ».

a. Écrire les évènements A et B sous forme d'ensembles.

b. Déterminer $\overline{B}$, $A \cap B$ et $B \cap C$.

Remarque 13. De façon plus générale, si A_1, A_2, ..., A_n sont des évènements, on peut définir l'évènement $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ qui est réalisé si et seulement si l'un (au moins) des A_i est réalisé et l'évènement $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ qui est réalisé si et seulement si tous les A_i sont réalisés. On note, de plus,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

Propriété 14. — Lois de de Morgan

Soit A et B deux évènements de Ω. Alors, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
De manière plus générale, si A_1, A_2, ..., A_n sont des évènements alors

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

Définition 15

On dit que deux évènements A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**) si $A \cap B = \varnothing$.

Remarque 16. Dire que deux évènements sont incompatibles signifie qu'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément.

Exemple 17. On lance un dé cubique.

1. Les évènements A : « Obtenir un chiffre pair » et B : « Obtenir un chiffre impair » sont incompatibles.

2. Les évènements A : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2 » et B : « Obtenir un chiffre supérieur ou égal à 4 » sont incompatibles.

3. Les évènements A : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 3 » et B : « Obtenir un chiffre supérieur ou égal à 3 » ne sont pas incompatibles car $3 \in A \cap B$.

Remarque 18. De manière générale, pour tout évènement A, les évènements A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

Définition 19

Soit un entier $n \geqslant 2$. On dit que n évènements A_1, A_2, ..., A_n sont **mutuellement incompatibles** (ou **deux à deux incompatibles**) si, pour tous entiers i et j compris entre 1 et n tels que $i \neq j$, A_i et A_j sont incompatibles.

Exemple 20.

1. On lance un dé cubique. Les évènements A_1 : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2 », A_2 : « Obtenir un multiple de 3 » et A_3 : « obtenir 4 ou 5 » sont mutuellement incompatibles.

   En revanche, les évènements B_1 : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 2 », B_2 : « Obtenir un multiple de 3 » et B_3 : « obtenir un chiffre supérieur ou égal à 4 » sont pas mutuellement incompatibles car $6 \in B_2 \cap B_3$.
2. Dans l'exemple 12, les évènements A, B et C ne sont pas mutuellement incompatibles car $B \cap C \neq \varnothing$.

Définition 21

Soit un entier $n \geqslant 2$. On dit que des évènements A_1, A_2, ..., A_n forment un **système complet d'évènements** s'ils vérifient les deux conditions suivantes :

1. les évènements A_1, A_2, ..., A_n sont mutuellement incompatibles ;
2. la réunion des évènements A_1, A_2, ..., A_n est égale à Ω.

Exemple 22. Déterminer un système complet d'évènements pour chacune des expériences suivantes :

1. On lance une pièce de monnaie.
2. On lance un dé cubique.
3. On lance deux fois de suite le même dé cubique.

II. — Probabilités sur un univers fini

1) Définition

Définition 23

Soit Ω un univers fini et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω (c'est-à-dire l'ensemble des évènements). Une **loi de probabilité** (ou simplement une **probabilité**) sur Ω est une fonction $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0\,;1]$ telle que :

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
2. pour tous évènements <u>mutuellement incompatibles</u> A_1, A_2, ..., A_n,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ est alors appelé un **espace probabilisé** et, si A est un évènement, le réel $\mathbf{P}(A)$ est appelé la **probabilité** de A.

Remarque 24.

1. Le mot « probabilité » désigne donc, selon cas, soit une fonction de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ soit un nombre réel.
2. Par définition, la probabilité de n'importe quel évènement est un nombre compris entre 0 et 1. Quand on calcule des probabilités, il est donc nécessaire de toujours s'assurer que les résultats obtenus appartiennent à $[0\,;1]$.

Exemple 25. Définir une probabilité dans le cas du lancer de pièce.

2) Propriétés

Propriété 26

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé et A et B deux évènements.

1. $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.
2. Si $A \subset B$ alors $\mathbf{P}(A) \leqslant P(B)$ et $\mathbf{P}(B \setminus A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$.
3. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
4. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Propriété 27

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ un univers fini.

1. Soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$. On pose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i = \mathbf{P}(\{\omega_i\})$. Alors, le n-uplet $(p_1, p_2, ..., p_n)$ défini entièrement la probabilité $\mathbf{P}$.
2. Réciproquement, si $(p_1, p_2, ..., p_n)$ est un n-uplet de réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ alors il existe une unique probabilité $\mathbf{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$.

Remarque 28. Dans la pratique, par abus de notation, on note souvent $\mathbf{P}(\omega_i)$ plutôt que $\mathbf{P}(\{\omega_i\})$.

Exemple 29.

1. Dans l'exemple du lancer de pièce, on définit une probabilité en déterminant $\mathbf{P}(pile)$ et $\mathbf{P}(face)$.
2. Dans l'exemple du lancer de dé cubique, on définit une probabilité en déterminant $\mathbf{P}(1)$, $\mathbf{P}(2)$, $\mathbf{P}(3)$, $\mathbf{P}(4)$, $\mathbf{P}(5)$ et $\mathbf{P}(6)$.
3. Si on tire une boule au hasard dans une urne contenant des boules rouges et des boules noires et si on s'intéresse à la couleur de la boule tirée, on définit une probabilité en déterminant $\mathbf{P}(\text{rouge})$ et $\mathbf{P}(\text{noire})$.

Exemple 30. On considère un dé truqué tel que la probabilité d'apparition d'un nombre est proportionnelle à ce nombre. Déterminer la probabilité de chaque issue.

3) Équiprobabilité

Définition 31

On considère une expérience aléatoire et Ω son univers. La probabilité telle que toutes les évènements élémentaires aient la même probabilité est appelée l'**équiprobabilité** (ou la **probabilité uniforme**) sur Ω.

Remarque 32. De manière générale, on modélise par l'équiprobabilité à chaque fois qu'on lance des objets « équilibrés » (pièce, dé) ou qu'on effectue des tirages « au hasard » (d'une carte dans un jeu, d'une boule dans une urne, d'un objet dans un sac...)

Propriété 33

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ un univers de cardinal n. Si $\mathbf{P}$ est l'équiprobabilité sur Ω alors :

1. pour tout entier i compris entre 1 et n, $\mathbf{P}(\omega_i) = \dfrac{1}{n}$;
2. si A est un évènement alors $\mathbf{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Remarque 34. En cas d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est donc égal au nombre d'issues qui réalisent A, appelées « cas favorables », divisé par le nombre total d'issues, appelées « cas possibles ». On a donc

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exemple 35. On considère une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire une boule au hasard. L'univers de cette expérience est $\Omega_1 = \{R_1, R_2, N_1, N_2, N_3\}$. On considère l'équiprobabilité $\mathbf{P}_1$ sur Ω_1. On a donc $\mathbf{P}_1(\omega) = \frac{1}{5}$ pour tout issue ω de l'expérience. Si on note A : « Tirer une boule rouge » et B : « Tirer une boule noire » alors $\mathbf{P}_1(A) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ et $\mathbf{P}_1(B) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$.

Pour la même expérience, on pourrait ne s'intéresser qu'aux couleurs des boules. L'univers serait alors $\Omega_2 = \{rouge, noire\}$ et, dans ce cas, le modèle précédent conduit à choisir sur Ω_2 la probabilité $\mathbf{P}_2$ telle que $\mathbf{P}_2(rouge) = \frac{2}{5}$ et $\mathbf{P}_2(noire) = \frac{3}{5}$. Dans ce cas, $\mathbf{P}_2$ n'est pas l'équiprobabilité sur Ω_2.

Exemple 36.

1. On tire une carte au hasard 3 cartes dans un jeu de 32.
   - **a.** Déterminer la probabilité de l'évènement A : « Obtenir 3 as » ;
   - **b.** Déterminer la probabilité de l'évènement B : « Obtenir 3 pique » ;
   - **c.** Déterminer la probabilité de l'évènement C : « Obtenir au moins un roi ».
2. On lance deux fois de suite un même dé équilibré. Déterminer la probabilité d'obtenir deux fois le même nombre.

III. — Probabilité conditionnelle

Dans toute la suite, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ où Ω est un univers fini.

1) Définition

Définition 37

Soit A un évènement de probabilité non nulle et soit B un évènement quelconque. On définit la **probabilité de** B **sachant** A, notée $\mathbf{P}(B \mid A)$ ou $\mathbf{P}_A(B)$, par

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Exemple 38. On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité que le chiffre obtenu soit 6 sachant que ce chiffre est pair ?

Propriété 39

Soit A et B deux évènements.

1. Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A)$.

2. Si $\mathbf{P}(B) \neq 0$ alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A \mid B)$.

3. Si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$ alors $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A \mid B)$.

Exemple 40. On considère une urne qui contient des boules numérotées. On sait que $\frac{3}{4}$ des boules sont rouges et que $\frac{1}{3}$ des boules rouges portent un numéro pair. On tire une boule au hasard dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge portant un numéro pair ?

Propriété 41

Soit A un évènement de probabilité non nulle. Alors, la fonction $\mathbf{P}_A$ qui à tout évènement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ associe la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B \mid A)$ est une probabilité.

En particulier, pour tous évènements B et C,

- $0 \leqslant \mathbf{P}(B \mid A) \leqslant 1$;
- $\mathbf{P}(\overline{B} \mid A) = 1 - \mathbf{P}(B \mid A)$;
- $\mathbf{P}(B \cup C \mid A) = \mathbf{P}(B \mid A) + \mathbf{P}(C \mid A) - \mathbf{P}(B \cap C \mid A)$.

Exemple 42. On reprend la situation de l'exemple 40. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro impair sachant que cette boule est rouge ?

2) Arbres pondérés

Les arbres pondérés (ou arbres de probabilités) constituent une manière particulièrement efficace de représenter une expérience aléatoire et de mettre en évidence les probabilités (éventuellement conditionnelles) en jeu.

Exemple 43. On considère une urne qui contient exactement 5 boules : 3 boules rouges et deux boules noires. On effectue successivement et sans remise deux tirages d'une boule dans l'urne.

Représenter la situation par un arbre pondéré.

3) Théorème des probabilités composées

Théorème 44

Soit un entier $n \geqslant 2$ et A_1, A_2, ..., A_n des évènements tels que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$. Alors,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 \mid A_1)\mathbf{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbf{P}\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Exemple 45. On considère une urne qui contient 30 boules dont 10 sont rouges. On tire successivement et sans remise 4 boules de l'urne. Déterminer la probabilité de ne tirer que des boules rouges.

4) Formule des probabilités totales

Théorème 46

Soit un entier $n \geqslant 2$ et A_1, A_2, ..., A_n un système complet d'évènements. Alors, pour tout évènement B,

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \cap A_1) + \mathbf{P}(B \cap A_2) + \cdots + \mathbf{P}(B \cap A_n)$$

Si, de plus, $\mathbf{P}(A_i) \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ alors

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B \mid A_1) + \mathbf{P}(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_n)\mathbf{P}(B \mid A_n).$$

Exemple 47. On dispose de 2 urnes. La première contient 3 boules rouges et 2 boules noires et la seconde 4 boules rouges et 7 boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne au hasard.

Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

Remarque 48. Une autre façon de présenter les probabilités est d'utiliser un tableau comme ci-dessous.

	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

La formule des probabilités totales assure que les nombres des cases marginales (i.e. les cases de la colonne et de la ligne « Total ») sont les sommes des cases centrales correspondantes :

$$P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A) \qquad P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})$$
$$P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B) \qquad P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B})$$

5) Théorème de Bayes

Propriété 49

Soit un entier $n \geqslant 2$ et A_1, A_2, ..., A_n un système complet d'évènements tel que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(A_i) \neq 0$. Alors, pour tout évènement B tel que $\mathbf{P}(B) \neq 0$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{P}(A_j \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(B \mid A_j)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A_j)\mathbf{P}(B \mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(B \mid A_i)}.$$

Remarque 50.

1. Le théorème de Bayes permet « d'inverser la dépendance ». Si on connaît, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la probabilité de B sachant A_i, on peut retrouver, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la probabilité de A_j sachant B.
2. En particulier, si A est un évènement dont la probabilité est différente de 0 et 1 et si B est un évènement de probabilité non nulle alors

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B \mid A) + \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(B \mid \overline{A})}.$$

Exemple 51. Dans l'exemple 47, déterminer la probabilité que la boule tirée provienne de la première urne sachant que cette boule est rouge.

IV. — Indépendance d'évènements

Définition 52

On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

Exemple 53. On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Étudier l'indépendance des évènements A : « On obtient un chiffre pair », B : « On obtient un chiffre supérieur ou égal à 4 » et C : « On obtient un chiffre inférieur ou égal à 4 ».

Il ne faut pas confondre évènements indépendants et évènements incompatibles. La notion d'évènements incompatibles est une notion ensembliste intrinsèque aux évènements (ont-ils des éléments en commun ?) alors que la notion d'évènements indépendants est une notion qui dépend de la probabilité $\mathbf{P}$.

Propriété 54

Soit A et B deux évènements tels que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. Alors, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}_A(B)$.

Remarque 55. Ainsi, l'indépendance de deux évènements A et B s'interprète de la manière suivante : le fait que A soit réalisé ou non n'a pas d'influence sur la probabilité que B se réalise.

Cela éclaire les résultats de l'exemple 53.

En effet, si A est réalisé, l'univers devient $\{2, 4, 6\}$. Sur ce nouvel univers (toujours muni de l'équiprobabilité), la probabilité que B se réalise est $\frac{2}{3}$ et cette probabilité (conditionnelle) est différente de la probabilité de B sur l'univers Ω. Ainsi, le fait que A soit réalisé modifie la probabilité que B se réalise : les évènements ne sont pas indépendants.

En revanche, la probabilité que C se réalise sachant que A est réalisé est aussi $\frac{2}{3}$ mais cette fois-ci cette probabilité (conditionnelle) est égale à la probabilité de C sur l'univers Ω. Ainsi, le fait que A soit réalisé ne modifie pas la probabilité que C se réalise : les évènements sont indépendants.

Théorème 56

Soit A et B deux évènements indépendants. Alors, $\overline{A}$ et B sont également indépendants.

Remarque 57. Soit A et B deux évènements indépendants. Alors, $\overline{A}$ et B sont indépendants et, de la même façon, A et $\overline{B}$ sont indépendants. De plus, en appliquant le théorème précédent à A et $\overline{B}$, on en déduit que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également indépendants.

Il s'ensuit que dans un tableau comme celui de la remarque 48, chaque case centrale est le produit des cases marginales correspondantes :

	B	$\overline{B}$	Total
A	$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$	$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B})$	$\mathbf{P}(A)$
$\overline{A}$	$\mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(B)$	$\mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{B})$	$\mathbf{P}(\overline{A})$
Total	$\mathbf{P}(B)$	$\mathbf{P}(\overline{B})$	1

Ceci n'est vrai que si les évènements sont indépendants.

Définition 58

On dit que des évènements A_1, A_2, ..., A_n sont

- **deux à deux indépendants** si, pour tout $(i\,;j) \in [\![1,n]\!]^2$, A_i et A_j sont indépendants ;
- **mutuellement indépendants** si, pour toute partie $\{B_1, B_2, ..., B_m\}$ incluse dans $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{m} B_j\right) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(B_2)\cdots\mathbf{P}(B_m).$$

Remarque 59. Si A_1, A_2, ..., A_n sont mutuellement indépendants alors il sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse en général.

Exemple 60. On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. On considère les évènements A : « Obtenir deux fois de suite le même résultat », B : « Obtenir *pile* au premier lancer » et C : « Obtenir *face* au second lancer ».

1. Les évènements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ?
2. Sont-ils mutuellement indépendants ?

V. — Exercices

Exercice 1. Dans une classe, les élèves peuvent étudier, parmi d'autres langues, l'anglais et l'espagnol. On choisit un élève au hasard et on considère les évènements suivants :

A : « l'élève étudie l'anglais »
E : « l'élève étudie l'espagnol »
Pour chacun des évènements suivants, le décrire par une phrase en français :

$$A \cap E \qquad A \cup E \qquad \overline{E} \qquad \overline{A} \cap E \qquad A \cup \overline{E} \qquad \overline{A \cup E}.$$

Exercice 2. Une agence de voyage a effectué un sondage auprès de ses clients pendant la saison estivale. Les résultats de ce sondage sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Le client a voyagé à l'étranger	Le client a voyagé en France	Total
Le client est satisfait		305	
Le client n'est pas satisfait	155		220
Total		370	1 000

1. Compléter le tableau ci-dessus directement sur l'énoncé.
2. On choisit au hasard un client de cette agence.
   a. Quel est univers de l'expérience ?
   Par quelle probabilité va-t-on modéliser l'expérience ?
   b. Quelle est la probabilité de l'évènement A : « le client est satisfait » ?
   c. Quelle est la probabilité de l'évènement B : « le client a voyagé en France » ?
   d. Quelle est la probabilité de l'évènement C : « le client est satisfait et il a voyagé en France » ?
   e. Définir par une phrase l'évènement $\overline{A \cup B}$ puis calculer sa probabilité.
3. On choisit au hasard un client ayant voyagé à l'étranger.
   Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas satisfait ?

Exercice 3. On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{12}$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Écrire chacun des évènements suivants sous forme d'un ensemble puis déterminer sa probabilité.
   a. A : « Obtenir un chiffre pair »
   b. B : « Obtenir un chiffre inférieur ou égal à 5 »
   c. C = A ∪ B.

Exercice 4. On dispose de deux dés cubiques parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer simultanément ces deux dés et à soustraire le plus petit des deux nombres au plus grand. Par exemple, si on obtient 3 et 5, l'issue est $5 - 3 = 2$. Si on obtient le même nombre sur les deux dés, l'issue est 0.

1. Compléter directement sur l'énoncé le tableau ci-dessous et en déduire l'univers de cette expérience.

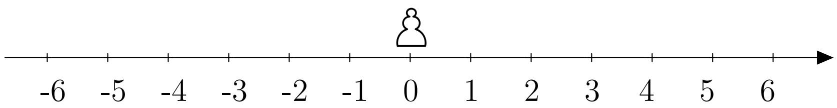
dé 2 / dé 1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. Les issues de l'expérience sont-elles équiprobables ?

3. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
A : « Obtenir 5 »
B : « Obtenir un nombre pair »
C : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 »

4. Un jeu consiste à deviner quel va être le résultat de cette expérience. Sur quelle valeur doit-on parier pour avoir la plus grande probabilité de gagner ?

Exercice 5. On dispose un pion sur un axe gradué. Initialement, le pion se trouve à l'abscisse 0.



On lance plusieurs fois de suite une pièce équilibrée. À chaque fois qu'on obtient *pile*, on déplace le pion d'une unité vers la droite et à chaque fois qu'on obtient *face*, on déplace le pion d'une unité vers la gauche.

Par exemple, si on lance la pièce 3 fois et qu'on obtient *face*, *pile* et *face* alors le pion se trouve successivement à l'abscisse -1 puis 0 puis -1.

1. Dans cette question, on suppose qu'on lance la pièce 3 fois.

a. Représenter les différentes séries de lancers possibles à l'aide d'un arbre.

b. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 1 à l'issue des 3 lancers.

c. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 2 à l'issue des 3 lancers.

2. Dans cette question, on suppose qu'on lance la pièce 2024 fois.

a. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 1 à l'issue des 2024 lancers.

b. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'abscisse 2024 à l'issue des 2024 lancers.

3. Dans cette question, on suppose qu'on lance la pièce n fois où $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Combien y a-t-il de séries différentes de n lancers ?

b. Déterminer la probabilité que le pion soit à l'absbisse 0 à l'issue des n lancers.

Exercice 6. Un loto est organisé. On tire au hasard, successivement et sans remise des jetons dans une urne qui contient 100 jetons numérotés de 0 à 99.

Pour jouer, on utilise une grille composée de 3 lignes. Sur chaque ligne, il y a 5 numéros et tous les numéros de la grille sont différents.

1. Quelle est la probabilité que le premier numéro tiré figure sur la grille ?

2. On suppose que le premier numéro tiré n'est pas sur la grille. Quelle est la probabilité que le second numéro tiré figure sur la grille ?

3. On suppose que le premier numéro tiré est sur la grille. Quelle est la probabilité que le second numéro tiré figure également sur la grille ?

Exercice 7. Une urne contient 20 boules blanches, 10 boules noires et un certain nombre n de boules rouges. On tire au hasard une boule dans l'urne et on considère les évènements :

B : « la boule tirée est blanche »
N : « la boule tirée est noire »
R : « la boule tirée est rouge »

1. Dans cette question, on suppose que l'urne contient en tout 50 boules.

a. Déterminer la valeur de n.

b. Déterminer les probabilités des évènements B, N et R.

2. Dans cette question, on suppose que le nombre total de boules dans l'urne est inconnu (et donc n est également inconnu).

a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité de l'évènement R.

b. Déterminer n de telle façon que $\mathbf{P}(R) = 0{,}75$.

c. Déterminer le plus petit entier n tel que $\mathbf{P}(R) \geqslant 0{,}99$.

d. Déterminer la plus grande valeur de n telle la probabilité que la boule tirée ne soit pas rouge soit au moins égale à $\dfrac{3}{4}$.

Exercice 8. Dans une population, les individus peuvent posséder (ou non) un caractère génétique a ou un caractère génétique b (ou les deux caractères). La probabilité, pour un individu choisi au hasard, de posséder le caractère a est 0,8, la probabilité de posséder le caractère b est 0,6 et la probabilité de posséder les deux caractères est 0,45.

On choisit un individu au hasard dans la population et on considère les évènements :

A : « l'individu possède la caractère a » B : « l'individu possède le caractère b »

1. Donner les probabilités des évènements A, B et A $\cap$ B et en déduire la probabilité A $\cup$ B.

2. On considère l'évènement C : « l'individu ne possède aucun des deux caractères ».
Exprimer C à l'aide de A et B et en déduire la probabilité de C.

Exercice 9. Un octet est une suite de 8 chiffres 0 ou 1. Par exemple, 01000110 est un octet. On choisit un octet au hasard. Quelle est la probabilité qu'il contienne au moins un 0 et un 1 ?

Exercice 10. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. Les boules 1 à 4 sont vertes et les autres sont jaunes. On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1. Quel est le cardinal de l'univers ?

2. Quelle est la probabilité que toutes les boules tirées soient jaunes ?

3. Quelle est la probabilité qu'au moins une des boules tirées soit jaune ?

4. Quelle est la probabilité de tirer 1 boule verte et 2 boules jaunes ?

Exercice 11. Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Les probabilités des évènements B et $A \cap B$ sont données par les égalités :

$$\mathbf{P}(B) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{2}{5}.$$

1. Calculer $\mathbf{P}_B(A)$.

2. La probabilité de B sachant A est $\frac{2}{3}$. En déduire la probabilité de A.

3. Déterminer $\mathbf{P}(A \cup B)$.

Exercice 12. On considère deux évènements A et B liés à une même expérience aléatoire modélisée par une probabilité $\mathbf{P}$. On donne

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}, \qquad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{4}, \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{3}{16}.$$

Déterminer les probabilités suivantes.

a) $\mathbf{P}(\overline{A})$ b) $\mathbf{P}(A \cup B)$ c) $\mathbf{P}_A(B)$ d) $\mathbf{P}_B(A)$ e) $\mathbf{P}_A(\overline{B})$ f) $\mathbf{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$.

Exercice 13. Un sac S_1 contient 9 boules dont 5 sont rouges et un sac S_2 contient 5 boules dont 3 sont rouges. On choisit un sac au hasard et on tire une boule au hasard dans ce sac.

On note A : « Choisir le sac S_1 » et B : « Tirer une boule rouge ».

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.

2. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge et provienne du sac S_1 ?

3. Quelle la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

4. Sachant que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne du sac S_1 ?

Exercice 14. Une urne contient 7 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage ?

2. **a.** Si on a obtenu une boule blanche au premier tirage, quelle est probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième ?

b. Si on a obtenu une boule noire au premier tirage, quelle est probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième ?

c. En déduire la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage.

3. Si la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première l'ait été ?

4. Si on tire 5 boules (toujours sans remise), quelle est la probabilité que toutes les boules soient blanches ?

Exercice 15. On dispose de deux urnes U_1 et U_2. On sait que l'urne U_1 contient exactement 5 boules dont 2 blanches et 3 rouges et l'urne U_2 contient exactement 7 boules dont 3 blanches et 4 rouges. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule au hasard dans cette urne.
On note A l'évènement « Choisir l'urne U_1 » et B l'évènement « Tirer un boule blanche ».

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que la boule tirée soit une boule blanche et qu'elle provienne de l'urne U_1.

3. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

4. On a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?

Exercice 16. Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Les probabilités des évènements A, B et $A \cap B$ sont données par les égalités : $\mathbf{P}(A) = \dfrac{5}{3}$, $\mathbf{P}(B) = \dfrac{3}{4}$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{2}{5}$.

1. L'une des données ci-dessus est aberrante. Laquelle et pourquoi ?

2. Modifier cette donnée de telle façon que les évènements A et B soient indépendants.

3. Que vaut alors $\mathbf{P}_A(B)$?

Exercice 17. On considère deux évènements A et B liés à une même expérience aléatoire modélisée par une probabilité $\mathbf{P}$. On sait que $\mathbf{P}(A) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbf{P}(B) = \dfrac{1}{4}$. Déterminer $\mathbf{P}(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants.

1. A et B sont incompatibles. **2.** A et B sont indépendants. **3.** B est une partie de A.

Exercice 18. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules blanches. On y effectue 4 tirages avec remise. Pour chaque entier $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on définit les évènements suivants :

- R_k : « on tire une boule rouge au lancer numéro k »
- B_k : « on tire une boule blanche au lancer numéro k »

Calculer les probabilités des évènements suivants :

1. E : « N'obtenir que des boules rouges ».

2. F : « Obtenir au moins une boule blanche ».

3. G : « Obtenir exactement une boule blanche ».

Exercice 19. On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k.

Ce dé a été pipé de telle sorte que $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier $k \in [\![1, 6]\!]$.

1. On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :

- A : « le nombre obtenu est pair »
- B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »
- C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».

a. Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.

b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Même question avec A et C ?

2. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :

- d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires,
- d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.

Le joueur lance le dé. S'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1 et, sinon, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.

On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche. On note G cet évènement.

a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Déterminer la probabilité de l'évènement G.

c. Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

Exercice 20. Dans une population, on étudie un caractère génétique C. Le caractère C dépend de deux gènes (et deux seulement) g_1 et g_2. Chaque gène peut-être *normal* ou *muté*. Si au moins un des deux gènes g_1 ou g_2 est normal alors le caractère C est normal. Si les deux gènes sont mutés alors le caractère C est anormal. On sait que, dans la population, 5% des personnes ont un gène g_1 muté et 1% des personnes ont un gène g_2 muté. On suppose de plus que le fait d'être normal ou muté pour un gène est indépendant de l'état de l'autre gène.

Déterminer la probabilité qu'une personne prise au hasard dans la population présente un caractère C normal. (On prendre soin de bien rédiger sa réponse en introduisant notamment les évènements nécessaires à la rédaction.)

Exercice 21. Un couple a deux enfants. On suppose que les sexes des enfants sont indépendants et équiprobables et on considère les évènements :

- F_1 : « le premier enfant est une fille »
- F_2 : « le deuxième enfant est une fille ».

1. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

2. Sachant que l'aîné des deux enfants est une fille, quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

3. Sachant que l'un des deux enfants est une fille, quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?

Exercice 22. Une urne contient 2 boules noires, 3 boules blanches et 1 boule jaune. On dispose d'une cagnotte initiale de 0 euro et on effectue des tirages avec remise dans l'urne. À chaque tirage,

— si on tire une boule jaune, on ajoute un euro à la cagnotte ;
— si on tire une boule blanche, on garde la même cagnotte ;
— si on tire une boule noire, l'argent de la cagnotte est perdu et elle revient à 0 euro.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'évènement N_k (resp. B_k, resp. J_k) qui est réalisé lorsqu'on tire une boule noire (resp. blanche, resp. jaune) au k-ième tirage. On considère également l'évènement Z_k : « à l'issue du k-ième tirage, la cagnotte est de 0 euros ».

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbf{P}(N_k)$, $\mathbf{P}(B_k)$ et $\mathbf{P}(J_k)$.

2. Calculer $\mathbf{P}(Z_1)$.

3. **a.** Déterminer les valeurs de $\mathbf{P}_{N_2}(Z_2)$ et $\mathbf{P}_{J_2}(Z_2)$.

b. Montrer que $\mathbf{P}_{B_2}(Z_2) = \mathbf{P}_{B_2}(Z_1)$ et en déduire la valeur de $\mathbf{P}_{B_2}(Z_2)$.

c. Calculer $\mathbf{P}(Z_2)$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le système complet d'évènements $(N_{k+1}, B_{k+1}, J_{k+1})$ et en procédant comme à la question précédente, démontrer que :

$$\mathbf{P}(Z_{k+1}) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(Z_k) + \frac{1}{3}.$$

5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \mathbf{P}(Z_k) - \dfrac{2}{3}$.

a. Démontrer que (u_k) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1.

b. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une expression de u_k, puis de $\mathbf{P}(Z_k)$, en fonction de k.

Exercice 23. Une maladie rare touche une personne sur un million. On dispose d'un test de dépistage de cette maladie qui est positif chez 99,9 % des malades mais aussi chez 1 % des personnes qui ne sont pas malades. On choisit un individu au hasard, on lui fait subir le test et on considère les évènements T : « le test est positif » et M : « l'individu est malade ».

1. Donner les valeurs de $\mathbf{P}(M), \mathbf{P}(T \mid M)$ et $\mathbf{P}(T \mid \overline{M})$.
2. Calculer la probabilité que le test soit positif.
3. Si le test est positif, quelle est la probabilité que l'individu soit malade ?

Exercice 24. Chaque individu d'une espèce animale a au cours de sa vie 0, 1 ou 2 enfants, avec les probabilités respectives $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$. On suppose que les nombres d'enfants des différents individus sont indépendants.

1. Si un individu a 1 enfant, calculer la probabilité qu'il n'ait pas de petits-enfants.
2. Si un individu a 2 enfants, calculer la probabilité qu'il n'ait pas de petits- enfants.
3. En déduire la probabilité qu'un individu choisi au hasard n'ait pas de petits-enfants.

Exercice 25. Un boîte rectangulaire est séparée en deux compartiments appelés A et B. Une ouverture permet de passer d'un compartiment à l'autre. Un rat est placé dans le compartiment A à l'instant 0 de l'expérience et on observe sa position à chaque seconde suivante. La position du rat est aléatoire et, après observation, il semble que le compartiment dans lequel le rat se trouve à une seconde donnée influe sur celui dans lequel il sera à la seconde suivante :

— si le rat est en A, il a une probabilité $\frac{1}{3}$ d'y rester et $\frac{2}{3}$ de passer en B ;

— si le rat est en B, il a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'y rester et $\frac{1}{2}$ de passer en A.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les évènements suivants :

— A_n : « à la n-ième seconde, le rat se trouve dans le compartiment A »,

— B_n : « à la n-ième seconde, le rat se trouve dans le compartiment B »,

et on note $a_n = \mathbf{P}(A_n)$ et $b_n = \mathbf{P}(B_n)$. On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

1. Calculer a_1 et b_1.
2. Déterminer $\mathbf{P}(A_2 \mid A_1)$ et $\mathbf{P}(A_2 \mid B_1)$ puis en déduire a_2.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a. Calculer $\mathbf{P}(A_{n+1} \mid A_n)$ et $\mathbf{P}(A_{n+1} \mid B_n)$.
   b. À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire que $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$.
   c. Démontrer de même que $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la matrice $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
   a. Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. Démontrer par récurrence que $X_n = M^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
   a. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   b. Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$.
   c. Exprimer M en fonction de D, P et P^{-1}.
   d. Démontrer par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. En utilisant les questions précédentes, déterminer des expressions de a_n et b_n en fonction de n.