♦ Chapitre 14. Équations différentielles

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle non réduit à un point.

I. — Généralités

1) Deux exemples

Désintégration du carbone 14. Le carbone est naturellement présent dans les végétaux sous une forme stable (le carbone 12). La collision entre des particules cosmiques et des atomes d'azote présents dans l'atmosphère entraîne la formation d'une forme instable de carbone (le carbone 14). Tout au long de leur vie, lors de la photosynthèse, les végétaux absorbent des atomes de carbone 14 et, dans un végétal donné, le rapport entre la concentration de carbone 12 et de carbone 14 reste stable autour de 1,3%.

Lorsqu'un organisme végétal meurt, il n'absorbe plus de carbone 14 et, comme ce dernier est instable, il se désintègre en carbone 12 et sa concentration diminue. Si on note N cette concentration en fonction du temps alors la vitesse de désintégration N' est proportionnelle à N. Plus précisément, on a, pour tout $t \geqslant 0$,

$$N'(t) = -1{,}21 \cdot 10^{-4} N(t)$$

Mouvement d'une masse attachée à un ressort. Une masse m coulisse sur une tige, et est accrochée à un ressort.

On note x l'abscisse de la masse en fonction du temps, en prenant pour origine le point d'équilibre. La masse subit une force de rappel $F = -kx$ (pour une constante $k > 0$), donc d'après le principe fondamental dynamique, la fonction x vérifie, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$mx''(t) + kx(t) = 0.$$

Dans les deux exemples précédents, la fonction en jeu (N dans le premier exemple et x dans le second) vérifie une égalité qui la relie à sa dérivée ou sa dérivée seconde. Ce type d'égalité s'appelle une équation différentielle.

Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui vérifient l'égalité (qu'on pourrait simplement écrire $N' = -1{,}21 \cdot 10^{-4} N$ dans le premier cas et $mx'' + kx = 0$ dans le second).

2) Définition

Définition 1

Une **équation différentielle** est une égalité entre fonctions faisant intervenir une fonction et/ou certaines de ses dérivées sur un certain intervalle I. Dans une telle équation, l'inconnue est une fonction en général notée y.

Exemple 2.

1. L'égalité $y' = y$ sur $\mathbb{R}$ est une équation différentielle. Une solution de cette équation est la fonction exponentielle. Ce n'est cependant pas la seule. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto 5\mathrm{e}^x$ en est également une solution.
2. L'égalité $y'' = -y$ sur $\mathbb{R}$ est une équation différentielle dont les fonctions sinus et cosinus sont solutions.
3. Si $f : x \longmapsto 4\mathrm{e}^{-x}$, l'égalité $y'' + y' + 4y = f$ sur $\mathbb{R}$ est une équation différentielle dont une solution est est la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.
4. L'égalité $y' = y^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est une équation différentielle dont une solution est la fonction $x \longmapsto -\frac{1}{x}$.

Exemple 3. Soit $f : x \longmapsto \frac{(3x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto \ln(x)\mathrm{e}^x$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{x}\mathrm{e}^x + \ln(x)\mathrm{e}^x = \left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right)\mathrm{e}^x.$$

La fonction g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables et, pour tout réel $x > 0$,

$$g''(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x + \left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right)\mathrm{e}^x = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \ln(x)\right)\mathrm{e}^x.$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} g''(x) + g'(x) - 2g(x) &= \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \ln(x)\right)\mathrm{e}^x + \left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right)\mathrm{e}^x - 2\ln(x)\mathrm{e}^x \\ &= \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}\right)\mathrm{e}^x = \frac{3x-1}{x^2}\mathrm{e}^x = f(x). \end{aligned}$$

Ainsi, g est bien solution de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = f$.

Remarque 4. Dans la pratique, on écrit l'équation différentielle sous la forme $y''+y'-2y = \frac{(3x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$. Il s'agit d'un abus de notation car $y'' + y' - 2y$ est une fonction alors que $\frac{(3x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$ est un nombre.

II. — Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Définition 5

Une **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** (EDL1) sur I est une équation différentielle de la forme

$$y' + ay = f$$

où f est une fonction continue sur I et a est une constante réelle.

Résoudre une telle équation sur I, c'est déterminer l'ensemble des solutions c'est-à-dire l'ensemble des fonctions g dérivables sur I telles que

$$\forall t \in I \quad g'(t) + ag(t) = f(t).$$

Exemple 6.

1. L'équation différentielle vérifiée par N est équivalente à l'EDL1 $(E_1) : y' + 1{,}21 \cdot 10^{-4} y = 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. $(E_2) : y' + 3y = t$ et $(E_3) : y' - 7y = \mathrm{e}^t$ sont des EDL1 sur $\mathbb{R}$.

Définition 7

Soit $(E) : y' + ay = f$ une EDL1. On appelle **équation homogène** associée à (E) l'EDL1

$$(H) : y' + ay = 0.$$

Exemple 8.

1. L'équation (E_1) est une équation homogène.
2. Écrire les équations homogènes associées à (E_2) et (E_3).

Solution. L'équation homogène associée à (E_2) est $(H_2) : y' + 3y = 0$ et l'équation homogène associée à (E_3) est $(H_3) : y' - 7y = 0$.

Théorème 9. — Ensemble des solutions d'une EDL1 homogène

Soit a un réel. Alors, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(H) : y' + ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ est $\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{-at} \mid C \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration. Supposons que g est une solution de (H) et considérons $h : t \longmapsto g(t)\mathrm{e}^{at}$. Alors, h est dérivable sur I comme produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout $t \in I$,

$$h'(t) = g'(t)\mathrm{e}^{at} + g(t)(a\mathrm{e}^{at}) = (g'(t) + ag(t))\mathrm{e}^{at}.$$

Or, comme g est solution de (H) sur I, pour tout $t \in I$, $g'(t) + ag(t) = 0$ donc, pour tout $t \in I$, $h'(t) = 0$. Comme I est un intervalle, on en déduit que h est constante sur I donc il existe un réel C tel que, pour tout $t \in I$, $h(t) = C$. Alors, pour tout $t \in I$, $g(t)\mathrm{e}^{at} = C$ donc $g(t) = C\mathrm{e}^{-at}$.

Réciproquement, soit $C \in \mathbb{R}$ et $g : t \longmapsto C\mathrm{e}^{-at}$. Alors, g est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $t \in I$,

$$g'(t) + ag(t) = C(-a\mathrm{e}^{-at}) + aC\mathrm{e}^{-at} = (-Ca + aC)\mathrm{e}^{-at} = 0$$

donc g est solution de (H) sur I.

□

Exemple 10. Déterminer la fonction N dans l'exemple de la désintégration du carbone.

Solution. Par le théorème précédent, l'ensemble des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}_+$ est

$$\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{-1{,}21\cdot 10^{-4}t} \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \geqslant 0$, $N(t) = C\mathrm{e}^{-1{,}21\cdot 10^{-4}t}$. De plus, $N(0) = 0{,}013$ donc $C\mathrm{e}^0 = 0{,}013$ i.e. $C = 0{,}013$. On en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad N(t) = 0{,}013\mathrm{e}^{-1{,}21\cdot 10^{-4}t}.$$

Théorème 11. — Ensemble des solutions d'une EDL1 quelconque

Soit a un réel, f une fonction continue sur I et $(E) : y' + ay = f$. Supposons que g_0 soit une solution particulière de (E) sur I. Alors, l'ensemble des solutions (E) sur I est

$$\{t \longmapsto g_0(t) + C\mathrm{e}^{-at} \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

Autrement dit, les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à la solution particulière g_0 les solutions de l'équation homogène (H) associée à (E).

Démonstration. Supposons que g est une solution de (E). Alors, $g' + ag = f$ et, comme g_0 est aussi solution de (E), $g_0' + ag_0 = f$, donc $g' + ag = g_0' + ag_0$. Ainsi, $g' - g_0' + ag - ag_0 = 0$ donc $(g - g_0)' + a(g - g_0) = 0$. Autrement dit, $g - g_0$ est solution de l'équation homogène (H) donc, par le **Théorème 9**, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in I$, $(g - g_0)(t) = C\mathrm{e}^{-at}$. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in I$, $g(t) = g_0(t) + C\mathrm{e}^{-at}$.

Réciproquement, soit $C \in \mathbb{R}$ et $g : t \longmapsto g_0(t) + C\mathrm{e}^{-at}$. Alors, g est dérivable sur I comme somme de fonction dérivable et, comme g_0 est solution de (E), pour tout $t \in I$,

$$g'(t) + ag(t) = g_0'(t) - Ca\mathrm{e}^{-at} + ag_0(t) + aC\mathrm{e}^{-at} = g_0'(t) + ag_0(t) = f(t)$$

donc g est solution de (E) sur I.

□

Exemple 12.

1. Résoudre l'équation (E_2) sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
2. Résoudre l'équation (E_3) sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $g_0 : t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^t$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution.

1. Rappelons que $(E_2) : y' + 3y = t$ et que l'équation homogène associée est $(H_2) : y' + 3y = 0$. L'ensemble des solutions de (H_2) sur $\mathbb{R}$ est $\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{-3t} \mid C \in \mathbb{R}\}$.
   Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $g_0 : t \longmapsto at + b$. Alors, g_0 est une fonction affine donc g_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $g_0'(t) + 3g_0(t) = a + 3(at + b) = 3at + a + 3b$. Ainsi, pour que g_0 soit solution de (E_2), il suffit que $3a = 1$ et $a + 3b = 0$ i.e. que $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{9}$ donc $g_0 : t \longmapsto \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$ est une solution particulière de (E_2).
   On conclut alors que l'ensemble des solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est
   $$\left\{t \longmapsto \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} + C\mathrm{e}^{-3t} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}.$$
2. Rappelons que $(E_3) : y' - 7y = \mathrm{e}^t$ et que l'équation homogène associée est $(H_3) : y' - 7y = 0$. L'ensemble des solutions de (H_3) sur $\mathbb{R}$ est $\{t \longmapsto C\mathrm{e}^{7t} \mid C \in \mathbb{R}\}$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g_0 : t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^t$. Alors, g_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit par une constante d'une fonction dérivable et, pour tout réel t, $g_0'(t) - 7g_0(t) = \lambda\mathrm{e}^t - 7\lambda\mathrm{e}^t = -6\lambda\mathrm{e}^t$. Ainsi, pour que g_0 soit solution de (E_3), il suffit que $-6\lambda = 1$ i.e. que $\lambda = -\frac{1}{6}$ donc $g_0 : t \longmapsto -\frac{1}{6}\mathrm{e}^t$ est une solution particulière de (E_3).
   On conclut alors que l'ensemble des solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ est
   $$\left\{t \longmapsto -\frac{1}{6}\mathrm{e}^t + C\mathrm{e}^{7t} \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Propriété 13. — Principe de superposition

Soit $a \in \mathbb{R}$, f_1 et f_2 deux fonctions continues sur I et $(E_1) : y' + ay = f_1$ et $(E_2) : y' + ay = f_2$. Si g_1 est solution de (E_1) sur I et g_2 est solution de (E_2) sur I alors $g_1 + g_2$ est solution de l'équation $(E) : y' + ay = f_1 + f_2$ sur I.

Démonstration. Supposons que g_1 est une solution de (E_1) sur I et que g_2 est une solution de (E_2) sur I. Alors, $g_1 + g_2$ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables et

$$(g_1 + g_2)' + a(g_1 + g_2) = g_1' + g_2' + ag_1 + ag_2 = (g_1' + ag_1) + (g_2' + ag_2) = f_1 + f_2$$

donc $g_1 + g_2$ est une solution de (E) sur I. □

Exemple 14. Déterminer une solution de $(E_4) : y' + 3y = \mathrm{e}^t$ de la forme $t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ puis résoudre l'équation $(E_5) : y' + 3y = t + \mathrm{e}^t$.

Solution. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, la fonction $h : t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit par une constante d'une fonction dérivable et, pour tout réel t, $h'(t) + 3h(t) = \lambda \mathrm{e}^t + 3\lambda \mathrm{e}^t = 4\lambda \mathrm{e}^t$. Ainsi, pour que h soit solution de (E_4), il suffit que $4\lambda = 1$ i.e. que $\lambda = \frac{1}{4}$. Ainsi, $h : t \longmapsto \frac{1}{4}\mathrm{e}^t$ est une solution de (E_4) sur $\mathbb{R}$. Par le principe de superposition, on déduit de l'**Exemple 12** que $t \longmapsto \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^t$ est une solution de (E_5) sur $\mathbb{R}$ et donc l'ensemble des solution de (E_5) sur $\mathbb{R}$ est

$$\left\{ t \longmapsto \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^t + C\mathrm{e}^{-3t} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.$$

III. — Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 15

Une **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** (EDL2) sur I est une équation différentielle de la forme

$$y'' + ay' + by = f$$

où f est une fonction continue sur I et a et b sont deux constantes réelles.

Résoudre une telle équation sur I, c'est déterminer l'ensemble des solutions c'est-à-dire l'ensemble des fonctions g deux fois dérivables sur I telles que

$$\forall t \in I \quad g''(t) + ag'(t) + bg(t) = f(t).$$

Exemple 16.

1. L'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x de la masse attachée à un ressort est équivalente à l'EDL2 $(E_6) : y'' + \frac{k}{m}y = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. $(E_7) : y'' + 7y' + 6y = t$ et $(E_8) : y'' - 3y = \cos(t)$ sont des EDL2 sur $\mathbb{R}$.

Définition 17

Soit $(E) : y'' + ay' + b = f$ une EDL2.

1. On appelle **équation homogène** associée à (E) l'EDL2

$$(H) : y'' + ay' + by = 0.$$

2. On appelle **équation caractéristique** associée à (E) l'équation du second degré

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Exemple 18.

1. L'équation (E_6) est une équation homogène. Écrire son équation caractéristique.
2. Écrire les équations homogènes et les équations caractéristiques associées à (E_7) et (E_8).

Solution.

1. L'équation caractéristique associée à (E_6) est $x^2 + \frac{k}{m} = 0$.
2. L'équation homogène associée à (E_7) est $(H_7) : y'' + 7y' + 6y = 0$ et l'équation caractéristique associée est $x^2 + 7x + 6 = 0$.
   L'équation homogène associée à (E_8) est $(H_8) : y'' - 3y = 0$ et l'équation caractéristique associée est $x^2 - 3 = 0$.

Théorème 19. — Ensemble des solutions d'une EDL2 homogène

Soit a et b deux réels et $(H) : y'' + ay' + by = 0$.

1. Si l'équation caractéristique associée à (H) possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 alors l'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est

$$S_H = \{t \longmapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

2. Si l'équation caractéristique associée à (H) possède une unique solution r_0 alors l'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est

$$S_H = \{t \longmapsto (At + B)\mathrm{e}^{r_0 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

3. Si l'équation caractéristique associée à (H) possède deux solutions complexes conjuguées $r = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\overline{r} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ alors l'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est

$$S_H = \{t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Démonstration.

1. Supposons que l'équation $x^2 + ax + b = 0$ possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.
   Dans ce cas, on sait que

$$X^2 + aX + b = (X - r_1)(X - r_2) = X^2 - r_2X - r_1X + r_1r_2 = X^2 - (r_1 + r_2)X + r_1r_2$$

   donc, par unicité des coefficients d'un polynôme, $-(r_1 + r_2) = a$ et $r_1r_2 = b$.

Soit g une solution de (H). Considérons les fonctions u et v définie sur I par

$$u : t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-r_1 t}}{r_1 - r_2}(g'(t) - r_2 g(t)) \qquad \text{et} \qquad v : t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-r_2 t}}{r_2 - r_1}(g'(t) - r_1 g(t)).$$

Remarquons que, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r_1 - r_2}(g'(t) - r_2 g(t)) + \frac{1}{r_2 - r_1}(g'(t) - r_1 g(t)) \\
&= \frac{1}{r_1 - r_2}(g'(t) - r_2 g(t) - g'(t) + r_1 g(t)) \\
&= g(t)
\end{aligned}$$

De plus, comme g est deux fois dérivable sur I, u est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \frac{-r_1 \mathrm{e}^{-r_1 t}}{r_1 - r_2}(g'(t) - r_2 g(t)) + \frac{\mathrm{e}^{-r_1 t}}{r_1 - r_2}(g''(t) - r_2 g'(t)) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-r_1 t}}{r_1 - r_2}\left[g''(t) - (r_1 + r_2)g'(t) + r_1 r_2 g(t)\right] \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-r_1 t}}{r_1 - r_2}\left[g''(t) + ag'(t) + bg(t)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, comme I est un intervalle, u est constante sur I. Ainsi, il existe un réel A tel que, pour tout $t \in I$, $u(t) = A$.
De même, v est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}
v'(t) &= \frac{-r_2 \mathrm{e}^{-r_2 t}}{r_2 - r_1}(g'(t) - r_1 g(t)) + \frac{\mathrm{e}^{-r_2 t}}{r_2 - r_1}(g''(t) - r_1 g'(t)) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-r_2 t}}{r_2 - r_1}\left[g''(t) - (r_1 + r_2)g'(t) + r_1 r_2 g(t)\right] \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-r_2 t}}{r_2 - r_1}\left[g''(t) + ag'(t) + bg(t)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc il existe un réel B tel que, pour tout $t \in I$, $v(t) = B$.
Étant donné que, pour tout $t \in I$, $g'(t) = u(t)\mathrm{e}^{r_1 t} + v(t)\mathrm{e}^{r_2 t}$, on conclut alors que, pour tout $t \in I$, $g(t) = A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$.
Réciproquement, soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $g : t \longmapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$. Alors, g est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaires et composées de fonctions deux fois dérivables et, pour tout $t \in \mathrm{i}$,

$$\begin{aligned}
g''(t) + ag'(t) + bg(t) &= Ar_1^2 \mathrm{e}^{r_1 t} + Br_2^2 \mathrm{e}^{r_2 t} + a(Ar_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + Br_2 \mathrm{e}r_2 t) + b(A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}) \\
&= (r_1^2 + ar_1 + b)A\mathrm{e}^{r_1 t} + (r_2^2 + ar_2 + b)B\mathrm{e}^{r_2 t} \\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque r_1 et r_2 sont racine de $X^2 + aX + b$. Ainsi, g est solution de (H).

2. Supposons que l'équation $x^2 + ax + b = 0$ possède une unique solution réelle r_0.
Dans ce cas, on sait que $X^2 + aX + b = (X - r_0)^2 = X^2 - 2r_0 X + r_0^2$ donc, par unicité des coefficients d'un polynôme, $-2r_0 = a$ et $r_0^2 = b$.

Soit g une solution de (H). Considérons la fonctions u définie sur I par

$$u : t \longmapsto g(t)\mathrm{e}^{-r_0 t}.$$

Comme g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, u est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in I$,

$$u'(t) = g'(t)\mathrm{e}^{-r_0 t} + g(t)(-r_0\mathrm{e}^{-r_0 t}) = (g'(t) - r_0 g(t))\mathrm{e}^{-r_0 t}$$

et

$$\begin{aligned} u''(t) &= (g''(t) - r_0 g'(t))\mathrm{e}^{-r_0 t} + (g'(t) - r_0 g(t))(-r_0\mathrm{e}^{-r_0 t}) \\ &= (g''(t) - 2r_0 g'(t) + r_0^2 g(t))\mathrm{e}^{-r_0 t} \\ &= (g''(t) + ag(t) + bg''(t))\mathrm{e}^{-r_0 t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc, comme I est un intervalle, u' est constante sur I. On en déduit qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in I$, $u'(t) = A$ et donc il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in I$, $u(t) = At + B$.
Ainsi, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $t \in I$, $g(t)\mathrm{e}^{-r_0 t} = At + B$ i.e. $g(t) = (At + B)\mathrm{e}^{r_0 t}$.
Réciproquement, soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $g : t \longmapsto (At+B)\mathrm{e}^{r_0 t}$ définie sur I. Alors, g est deux fois dérivable sur I comme produit de fonctions deux fois dérivables et, pour tout $t \in I$,

$$g'(t) = A\mathrm{e}^{r_0 t} + (At + B)(r_0\mathrm{e}^{r_0 t}) = (Ar_0 t + A + Br_0)\mathrm{e}^{r_0 t}$$

et

$$g''(t) = (Ar_0)\mathrm{e}^{r_0 t} + (Ar_0 t + A + Br_0)(r_0\mathrm{e}^{r_0 t}) = (Ar_0^2 t + 2Ar_0 + Br_0^2)\mathrm{e}^{r_0 t}$$

donc, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} g''(t) + ag'(t) + bg(t) &= (Ar_0^2 t + 2Ar_0 + Br_0^2)\mathrm{e}^{r_0 t} + a(Ar_0 t + A + Br_0)\mathrm{e}^{r_0 t} + b(At + B)\mathrm{e}^{r_0 t} \\ &= ((r_0^2 + ar_0 + b)At + (2r_0 + a)A + (r_0^2 + ar_0 + b)B)\mathrm{e}^{r_0 t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car r_0 est racine de $X^2 + aX + b$ et on a vu précédemment que $a = -2r_0$. Ainsi, g est solution de (H).

3. Supposons que l'équation $x^2 + ax + b = 0$ possède deux solutions complexes conjuguées $r = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\overline{r} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\beta \neq 0$.
Dans ce cas, on sait que

$$\begin{aligned} X^2 + aX + b = (X - r)(X - \overline{r}) &= X^2 - rX - \overline{r}X + r\overline{r} \\ &= X^2 - 2\operatorname{Re}(r)X + |r|^2 = X^2 - 2\alpha + (\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

donc, par unicité des coefficients d'un polynôme, $-2\alpha = a$ et $\alpha^2 + \beta^2 = b$.
Soit g une solution de (H). Considérons la fonctions h définie sur I par

$$h : t \longmapsto g(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Par le même raisonnement que dans le point **2.** en remplaçant u est deux fois dérivable sur I et, pour tout $t \in I$, $g(t) = h(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$ donc, pour tout $t \in\ I$,

$$g'(t) = (h'(t) + \alpha g(t))\mathrm{e}^{\alpha t} \qquad \text{et} \qquad g''(t) = (h''(t) + 2\alpha h'(t) + \alpha^2 u(t))\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Comme g est solution de (H), on en déduit que, pour tout $t \in I$,

$$(h''(t) + 2\alpha h'(t) + \alpha^2 h(t))\mathrm{e}^{\alpha t} + a(h'(t) + \alpha h(t))\mathrm{e}^{\alpha t} + bh(t)\mathrm{e}^{\alpha t} = 0$$

donc, en divisant par $\mathrm{e}^{\alpha t} \neq 0$,

$$h''(t) + (2\alpha + a)h'(t) + (\alpha^2 + a\alpha + b)h'(t) = 0.$$

Or, on a vu que $-2\alpha = a$ et que $\alpha^2 + \beta^2 = b$ donc $2\alpha + a = 0$ et

$$\alpha^2 + a\alpha + b = \alpha^2 + a\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = \alpha(2\alpha + a) + \beta^2 = \beta^2$$

donc, pour tout $t \in I$,

$$h''(t) + \beta^2 h(t) = 0.$$

Considérons à présent les fonctions u et v définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u : t \longmapsto \cos(\beta t)h(t) - \frac{1}{\beta}\sin(\beta t)h'(t) \qquad \text{et} \qquad v : t \longmapsto \sin(\beta t)h(t) + \frac{1}{\beta}\cos(\beta t)h'(t).$$

On remarque que, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} u(t)cos(\beta t) + v(t)\sin(\beta t) &= \cos^2(\beta t)h(t) - \frac{1}{\beta}\cos(\beta t)\sin(\beta t)h'(t) \\ &\qquad + \sin^2(\beta t)h(t) + \frac{1}{\beta}\cos(\beta t)\sin(\beta t)h'(t) \\ &= (\cos^2(\beta t) + \sin^2(\beta t))h(t) \\ &= h(t). \end{aligned}$$

Or, comme h est deux fois dérivable sur I, les fonctions u et v sont dérivables sur I et, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} u'(t) &= -\beta\sin(\beta t)h(t) + \cos(\beta t)h'(t) - \cos(\beta t)h'(t) - \frac{1}{\beta}\sin(\beta t)h''(t) \\ &= -\frac{1}{\beta}\sin(\beta t)(\beta^2 h(t) + h''(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v'(t) &= \beta\cos(\beta t)h(t) + \sin(\beta t)h'(t) - \sin(\beta t)h'(t) + \frac{1}{\beta}\cos(\beta t)h''(t) \\ &= \frac{1}{\beta}\cos(\beta t)(\beta^2 h(t) + h''(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc u et v sont constantes sur l'intervalle I. On en déduit qu'il existe des réels A et B tels que, pour tout $t \in I$, $h(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ i.e. $g(t)\mathrm{e}^{-\alpha t} = A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$ et donc $g(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$.
Réciproquement, soit A et B deux réels et $g : t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$ définie sur I. La fonction g est deux fois dérivable sur I comme somme et produit de fonctions deux fois dérivables et, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \alpha\mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) + \mathrm{e}^{\alpha t}(-A\beta\sin(\beta t) + B\beta\cos(\beta t)) \\ &= ((\alpha A + B\beta)\cos(\beta t) + (\alpha B - A\beta)\sin(\beta t))\mathrm{e}^{\alpha t} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g''(t) &= (-(\alpha A + B\beta)\beta\sin(\beta t) + (\alpha B - A\beta)\beta\cos(\beta t))\mathrm{e}^{\alpha t} \\ &\qquad + ((\alpha A + B\beta)\cos(\beta t) + (\alpha B - A\beta)\sin(\beta t))(\alpha \mathrm{e}^{\alpha t}) \\ &= (\alpha^2 A + 2\alpha\beta B - A\beta^2)\cos(\beta t) + (\alpha^2 B - 2\alpha\beta A - B\beta^2)\sin(\beta t))\mathrm{e}^{\alpha t} \end{aligned}$$

donc, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} g''(t) + ag'(t) + bg(t) &= (\alpha^2 A + 2\alpha\beta B - A\beta^2)\cos(\beta t) + (\alpha^2 B - 2\alpha\beta A - B\beta^2)\sin(\beta t))\mathrm{e}^{\alpha t} \\ &\qquad + a((\alpha A + B\beta)\cos(\beta t) + (\alpha B - A\beta)\sin(\beta t))\mathrm{e}^{\alpha t} \\ &\qquad + b\mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) \\ &= (C\cos(\beta t) + D\sin(\beta t))\mathrm{e}^{\alpha t} \end{aligned}$$

avec

$$C = \alpha^2 A + 2\alpha\beta B - A\beta^2 + a\alpha A + aB\beta + bA$$

et

$$D = \alpha^2 B - 2\alpha\beta A - B\beta^2 + a\alpha B - aA\beta + bB.$$

Or, en réutilisant le fait que $a + 2\alpha = 0$ et $b = \alpha^2 + \beta^2$, il vient

$$C = (\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b)A + (2\alpha + a)\beta B = (\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + \alpha^2 + \beta^2)A = \alpha(2\alpha + a)A = 0$$

et

$$D = (\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b)B - (2\alpha + a)\beta A = (\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + \alpha^2 + \beta^2)B = \alpha(2\alpha + a)B = 0.$$

Ainsi, pour tout $t \in I$, $g''(t) + ag'(t) + bg(t) = 0$ donc g est solution de (H).

□

Exemple 20. Déterminer la forme de x dans l'exemple de la masse attachée à un ressort.

Solution. On a vu que l'équation caractéristique associée au (E_6) est $x^2 + \frac{k}{m} = 0$. Or, comme $k > 0$ et $m > 0$,

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{k}{m} = 0 &\iff x^2 - \left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 = 0 \iff \left(x - \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(x + \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}\right) = 0 \\ &\iff x = \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ ou } x = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha = \mathrm{Re}(\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}) = 0$ et $\beta = \mathrm{Im}(\mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{m}}) = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc l'ensemble des solution de (E_6) est

$$\left\{ t \longmapsto A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Ainsi, il existe deux réels A et B tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$.

Pour déterminer A et B, il faut des données supplémentaires (comme, par exemple, la position et la vitesse à l'instant initial).

Théorème 21. — Ensemble des solutions d'une EDL2 quelconque

Soit a un réel, f une fonction continue sur I et $(E) : y'' + ay' + by = f$. Supposons que g_0 soit une solution particulière de (E) sur I. Alors, l'ensemble des solutions (E) sur I est

$$\{t \longmapsto g_0(t) + h(t) \mid h \in S_H\}$$

où S_H est l'ensemble des solutions de l'équation homogène (H) associée à (E). Autrement dit, les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à la solution particulière g_0 les solutions de l'équation homogène (H).

Démonstration. Supposons que g est un solution de (E) sur I. Alors, comme g_0 est également une solution de (E) sur I, $g'' + ag' + bg = f = g_0'' + g_0' + g_0$ donc $g'' + ag' + g - (g_0'' + ag_0' + bg_0) = 0$ i.e. $(g - g_0)'' + a(g - g_0)' + b(g - g_0) = 0$ donc $g - g_0 \in S_H$. Ainsi, il existe $h \in S_H$ telle que $g - g_0 = h$ donc $g = g_0 + h$.

Réciproquement, soit $h \in S_H$ et $g = g_0 + h$. Alors, g est deux fois dérivable sur I comme somme de fonctions deux fois dérivable et

$$g'' + ag' + bg = (g_0 + h)'' + a(g_0 + h)' + b(g_0 + h) = g_0'' + ag_0' + bg_0 + h'' + ah' + bh = f + 0 = f$$

donc g est solution de (E). □

Exemple 22.

1. Résoudre l'équation (E_7) sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
2. Résoudre l'équation (E_8) sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $g_0 : t \longmapsto \lambda \cos(t)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution.

1. Rappelons que $(E_7) : y'' + 7y' + 6y = t$, que l'équation homogène associée est $(H_7) : y'' + 7y' + 6y = 0$ et que l'équation caractéristique associée est $x^2 + 7x + 6 = 0$. Le discriminant de cette dernière est $\Delta = 7^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 > 0$ donc l'équation caractéristique admet deux solutions réelles

$$r_1 = \frac{-7 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -6 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-7 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = -1.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de (H_7) est

$$\{t \longmapsto A\mathrm{e}^{-6t} + B\mathrm{e}^{-t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $g_0 : t \longmapsto at + b$. Alors, g_0 est une fonction affine donc elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t,

$$g_0''(t) + 7g_0'(t) + 6g_0(t) = 0 + 7a + 6(at + b) = 6at + 7a + 6b.$$

Ainsi, pour g_0 soit solution de (E_7), il suffit que $6a = 1$ et $7a + 6b = 0$ i.e. que $a = \frac{1}{6}$ et que $b = -\frac{7}{36}$ donc $g_0 : t \longmapsto \frac{1}{6}t - \frac{7}{36}$ est une solution de (E_7).
On conclut donc que l'ensemble des solutions de (E_7) est

$$\left\{t \longmapsto \frac{1}{6}t - \frac{7}{36} + A\mathrm{e}^{-6t} + B\mathrm{e}^{-t} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2. Rappelons que $(E_8) : y'' - 3y = \cos(t)$, que l'équation homogène associée est $(H_8) : y'' - 3y = 0$ et que l'équation caractéristique associée est $x^2 - 3 = 0$.L'équation caractéristique admet deux solutions réelles

$$r_1 = \sqrt{3} \text{ et } \qquad r_2 = -\sqrt{3}.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de (H_8) est

$$\{t \longmapsto A\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t} + B\mathrm{e}^{\sqrt{3}t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $g_0 : t \longmapsto \lambda \cos(t)$. Alors, g_0 deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit par une constante d'une fonction deux fois dérivable et, pour tout réel t,

$$g_0''(t) - 3g_0(t) = -\lambda \cos(t) - 3\lambda \cos(t) = -4\lambda \cos(t).$$

Ainsi, pour g_0 soit solution de (E_8), il suffit que $-4\lambda = 1$ i.e. que $\lambda = -\frac{1}{4}$ donc $g_0 : t \longmapsto -\frac{1}{4}\cos(t)$ est une solution de (E_8).
On conclut donc que l'ensemble des solutions de (E_8) est

$$\left\{t \longmapsto -\frac{1}{4}\cos(t) + A\mathrm{e}^{-\sqrt{3}t} + B\mathrm{e}^{\sqrt{3}t} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Propriété 23. — Principe de superposition

Soit $a \in \mathbb{R}$, f_1 et f_2 deux fonctions continues sur I et $(E_1) : y'' + ay' + by = f_1$ et $(E_2) : y'' + ay' + by = f_2$. Si g_1 est solution de (E_1) et g_2 est solution de (E_2) alors $g_1 + g_2$ est solution de $(E) : y'' + ay' + b = f_1 + f_2$.

Démonstration. Supposons que g_1 est une solution de (E_1) sur I et que g_2 est une solution de (E_2) sur I. Alors, $g_1 + g_2$ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables et

$$(g_1 + g_2)'' + a(g_1 + g_2)' + b(g_1 + g_2) = g_1'' + ag_1' + bg_1 + g_2'' + ag_2' + bg_2 = f_1 + f_2$$

donc $g_1 + g_2$ est une solution de (E) sur I.

□

Exemple 24. Déterminer une solution de l'équation $(E_9) : y'' + 7y' + 6y = \cos(t)$ sous la forme $t \longmapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ puis résoudre l'équation $(E_{10}) : y'' + 7y' + 6y = t + \cos(t)$.

Solution. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $h : t \longmapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$. Alors, h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions deux fois dérivable et, pour tout réel t,

$$\begin{aligned} h''(t) + 7h'(t) + 6h(t) &= -\lambda \cos(t) - \mu \sin(t) + 7(-\lambda \sin(t) + \mu \cos(t)) + 6(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)) \\ &= (5\lambda + 7\mu) \cos(t) + (-7\lambda + 5\mu) \sin(t). \end{aligned}$$

Ainsi, pour que h soit solution de (E_9), il suffit que $5\lambda + 7\mu = 1$ et $-7\lambda + 5\mu = 0$ i.e. que $\mu = \frac{7}{5}\lambda$ et que $5\lambda + \frac{49}{5}\lambda = 1$ soit $\lambda = \frac{5}{74}$ et $\mu = \frac{7}{74}$. Ainsi, $t \longmapsto \frac{5}{74}\cos(t) + \frac{7}{74}\sin(t)$ est une solution de (E_9). Par le principe de superposition, on déduit de l'**Exemple 22** que l'ensemble des solutions de (E_{10}) est

$$\left\{t \longmapsto \frac{1}{6}t - \frac{7}{36} + \frac{5}{74}\cos(t) + \frac{7}{74}\sin(t) + A\mathrm{e}^{-6t} + B\mathrm{e}^{-t} \;\middle|\; (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$