⧫ Chapitre 14. Équations différentielles

Dans toute le chapitre, I désigne un intervalle non réduit à un point.

I. — Généralités

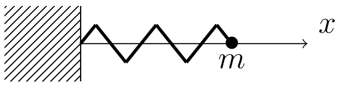
1) Deux exemples

Désintégration du carbone 14. Le carbone est naturellement présent dans les végétaux sous une forme stable (le carbone 12). La collision entre des particules cosmiques et des atomes d'azote présents dans l'atmosphère entraîne la formation d'une forme instable de carbone (le carbone 14). Tout au long de leur vie, lors de la photosynthèse, les végétaux absorbent des atomes de carbone 14 et, dans un végétal donné, le rapport entre la concentration de carbone 12 et de carbone 14 reste stable autour de 1,3%.

Lorsqu'un organisme végétal meurt, il n'absorbe plus de carbone 14 et, comme ce dernier est instable, il se désintègre en carbone 12 et sa concentration diminue. Si on note N cette concentration en fonction du temps alors la vitesse de désintégration N' est proportionnelle à N. Plus précisément, on a, pour tout $t \geqslant 0$,

$$N'(t) = -1{,}21 \cdot 10^{-4} N(t)$$

Mouvement d'une masse attachée à un ressort. Une masse m coulisse sur une tige, et est accrochée à un ressort.



On note x l'abscisse de la masse en fonction du temps, en prenant pour origine le point d'équilibre. La masse subit une force de rappel $F = -kx$ (pour une constante $k > 0$), donc d'après le principe fondamental dynamique, la fonction x vérifie, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$mx''(t) + kx(t) = 0.$$

Dans les deux exemples précédents, la fonction en jeu (N dans le premier exemple et x dans le second) vérifie une égalité qui la relie à sa dérivée ou sa dérivée seconde. Ce type d'égalité s'appelle une équation différentielle.

Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui vérifient l'égalité (qu'on pourrait simplement écrire $N' = -1{,}21 \cdot 10^{-4} N$ dans le premier cas et $mx'' + kx = 0$ dans le second).

2) Définition

Définition 1

Une **équation différentielle** est une égalité entre fonctions faisant intervenir une fonction et/ou certaines de ses dérivées sur un certain intervalle I. Dans une telle équation, l'inconnue est une fonction en général notée y.

Exemple 2.

1. L'égalité $y' = y$ sur $\mathbb{R}$ est une équation différentielle. Une solution de cette équation est la fonction exponentielle. Ce n'est cependant pas la seule. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto 5\mathrm{e}^x$ en est également une solution.
2. L'égalité $y'' = -y$ sur $\mathbb{R}$ est une équation différentielle donc les fonctions sinus et cosinus sont solutions.
3. Si $f : x \longmapsto 4\mathrm{e}^{-x}$, l'égalité $y'' + y' + 4y = f$ sur $\mathbb{R}$ est une équation différentielle donc une solution est est la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.
4. L'égalité $y' = y^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est une équation différentielle dont une solution est la fonction $x \longmapsto -\frac{1}{x}$.

Exemple 3. Soit $f : x \longmapsto \frac{(3x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $x \longmapsto \ln(x)\mathrm{e}^x$ est solution de l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = f$ sur $]0\,;+\infty[$.

Remarque 4. Dans la pratique, on écrit l'équation différentielle sous la forme $y''+y'-2y = \frac{(3x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$. Il s'agit d'un abus de notation car $y'' + y' - 2y$ est une fonction alors que $\frac{(3x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}$ est un nombre.

II. — Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

Définition 5

Une **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** (EDL1) sur I est une équation différentielle de la forme

$$y' + ay = f$$

où f est une fonction continue sur I et a est une constante réelle.

Résoudre une telle équation sur I, c'est déterminer l'ensemble des solutions c'est-à-dire l'ensemble des fonctions g dérivables sur I telles que

$$\forall t \in I \quad g'(t) + ag(t) = f(t).$$

Exemple 6.

1. L'équation différentielle vérifiée par N est équivalente à l'EDL1 $(E_1) : y' + 1{,}21 \cdot 10^{-4} y = 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. $(E_2) : y' + 3y = t$ et $(E_3) : y' - 7y = \mathrm{e}^t$ sont des EDL1 sur $\mathbb{R}$.

Définition 7

Soit $(E) : y' + ay = f$ une EDL1. On appelle **équation homogène** associée à (E) l'EDL1

$$(H) : y' + ay = 0.$$

Exemple 8.

1. L'équation (E_1) est une équation homogène.
2. Écrire les équations homogènes associées à (E_2) et (E_3).

Théorème 9. — Solutions d'une EDL1 homogène

Soit a un réel. Alors, les solutions de l'équation différentielle $(H) : y' + ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-at}$ où C est une constante quelconque.

Exemple 10. Déterminer la fonction N dans l'exemple de la désintégration du carbone.

Théorème 11. — Solutions d'une EDL1 quelconque

Soit a un réel, f une fonction continue sur I et $(E) : y' + ay = f$. Supposons que g_0 soit une solution particulière de (E) sur I. Alors, l'ensemble des solutions (E) sur I est l'ensemble des fonctions

$$g : t \longmapsto g_0(t) + C\mathrm{e}^{-at}$$

où C est une constante réelle. Autrement dit, les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à la solution particulière g_0 les solutions de l'équation homogène (H) associée à (E).

Exemple 12.

1. Résoudre l'équation (E_2) sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
2. Résoudre l'équation (E_3) sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $g_0 : t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^t$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propriété 13. — Principe de superposition

Soit $a \in \mathbb{R}$, f_1 et f_2 deux fonctions continues sur I et $(E_1) : y' + ay = f_1$ et $(E_2) : y' + ay = f_2$. Si g_1 est solution de (E_1) et g_2 est solution de (E_2) alors $g_1 + g_2$ est solution de l'équation $(E) : y' + ay = f_1 + f_2$.

Exemple 14. Déterminer une solution de $(E_4) : y' + 3y = \mathrm{e}^t$ de la forme $t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ puis résoudre l'équation $(E_5) : y' + 3y = t + \mathrm{e}^t$.

III. — Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 15

Une **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** (EDL2) sur I est une équation différentielle de la forme

$$y'' + ay' + by = f$$

où f est une fonction continue sur I et a et b sont deux constantes réelles.

Résoudre une telle équation sur I, c'est déterminer l'ensemble des solutions c'est-à-dire l'ensemble des fonctions g deux fois dérivables sur I telles que

$$\forall t \in I \quad g''(t) + ag'(t) + bg(t) = f(t).$$

Exemple 16.

1. L'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x de la masse attachée à un ressort est équivalente à l'EDL2 $(E_6) : y'' + \frac{k}{m}y = 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
2. $(E_7) : y'' + 7y' + 6y = t$ est une EDL2 sur $\mathbb{R}$.
3. $(E_8) : y'' - 3y = \cos(t)$ est une EDL2 sur $\mathbb{R}$.

Définition 17

Soit $(E) : y'' + ay' + b = f$ une EDL2.

1. On appelle **équation homogène associée** à (E) l'EDL2
$$(H) : y'' + ay' + by = 0.$$
2. On appelle **équation caractéristique** associée à (E) l'équation du second degré
$$x^2 + ax + b = 0.$$

Exemple 18.

1. L'équation (E_6) est une équation homogène. Écrire son équation caractéristique.
2. Écrire les équations homogènes et les équations caractéristiques associées à (E_7) et (E_8).

Théorème 19. — Solutions d'une EDL2 homogène

Soit a et b deux réels et $(H) : y'' + ay' + by = 0$.

1. Si l'équation caractéristique associée à (H) possède deux solutions réelles r_1 et r_2 alors les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $g : t \longmapsto A\mathrm{e}^{r_1 t} + B\mathrm{e}^{r_2 t}$ où A et B sont des constantes réelles.
2. Si l'équation caractéristique associée à (H) possède une unique solution r_0 alors les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $g : t \longmapsto (At + B)\mathrm{e}^{rt}$ où A et B sont des constantes réelles.
3. Si l'équation caractéristique associée à (H) possède deux solutions complexes conjuguées $r = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\overline{r} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ alors les solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $g : t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$ où A et B sont des constantes réelles.

Exemple 20. Déterminer la fonction x dans l'exemple de la masse attachée à un ressort.

Théorème 21. — Solutions d'une EDL2

Soit a un réel, f une fonction continue sur I et $(E) : y'' + ay' + by = f$. Supposons que g_0 soit une solution particulière de (E) sur I. Alors, l'ensemble des solutions (E) sur I est l'ensemble des fonctions
$$g : t \longmapsto g_0(t) + h(t)$$
où h est une solution de l'équation homogène (H) associée à (E). Autrement dit, les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à la solution particulière g_0 les solutions de l'équation homogène (H).

Exemple 22.

1. Résoudre l'équation (E_7) sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
2. Résoudre l'équation (E_8) sur $\mathbb{R}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $g_0 : t \longmapsto \lambda \cos(t)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propriété 23. — Principe de superposition

Soit $a \in \mathbb{R}$, f_1 et f_2 deux fonctions continues sur I et $(E_1) : y'' + ay' + by = f_1$ et $(E_2) : y'' + ay' + by = f_2$. Si g_1 est solution de (E_1) et g_2 est solution de (E_2) alors $g_1 + g_2$ est solution de $(E) : y'' + ay' + b = f_1 + f_2$.

Exemple 24. Déterminer une solution de l'équation $(E_9) : y'' + 7y' + 6y = \cos(t)$ sous la forme $t \longmapsto \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ puis résoudre l'équation $(E_{10}) : y'' + 7y' + 6y = t + \cos(t)$.

IV. — Exercices

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

1. $(E_1) : y' + 4y = 0$.
2. $(E_2) : y' = 2y$
3. $(E_3) : y' = -3y$ avec la condition initiale $y(1) = 2$.
4. $(E_4) : y' = -4y + 3$. (On cherchera une solution particulière constante.)
5. $(E_5) : y = 2y' + 5$. (On cherchera une solution particulière constante.)
6. $(E_6) : y' + y = t^2 + 1$. (On cherchera la solution particulière sous la forme d'un trinôme du second degré.)
7. $(E_7) : y' - y = 4t\mathrm{e}^{-t}$, avec la condition initiale $y(0) = 1$. (On cherchera la solution particulière sous la forme $t \longmapsto (at + b)\mathrm{e}^{-t}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.)

Exercice 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle $(E) : y' = 7y - 1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 1$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle $(F) : y' = -2y + \mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (F).
2. Résoudre (F).

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $(E_1) : y' + 2y = x^2 - 2x + 3$. (On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2.)
2. $(E_2) : y' + y = x\mathrm{e}^{-x}$. (On cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto P(x)\mathrm{e}^{-x}$ où P est un polynôme du second degré.)
3. $(E_3) : y' + 2y = \sin(3x)$. (On cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto A\cos(3x) + B\sin(3x)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.)

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $(H_1) : y'' - 5y' + 6y = 0$ **2.** $(H_2) : y'' - 4y' + 4y = 0$ **3.** $(H_3) : y'' - 2y' + 4y = 0$.

Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

1. $(E_1) : y'' + 2y' + y = t^2$. (On cherchera la solution particulière sous la forme d'un trinôme du second degré.)
2. $(E_2) : y'' - 6y' + 5y = 25t$, avec les conditions initiales $y(0) = 7$ et $y'(0) = 2$. (On cherchera la solution particulière sous la forme d'une fonction affine.)
3. $(E_3) : y'' + y = \cos(t)$. (On cherchera la solution particulière sous la forme $t \longmapsto at\cos(t) + bt\sin(t)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.)
4. $(E_4) : y'' - 5y' + 6y = t$. (On cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.)

Exercice 7. Les aquariophiles ont l'habitude de transporter les poissons vivants dans des sacs en plastique fermés contenant de l'eau et un mélange gazeux (habituellement de l'air). Dans de telles conditions, la concentration y en oxygène dissous (en mg.L^{-1}) vérifie l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = p - qt$$

où p et q sont des constantes réelles strictement positives et t le temps de transport exprimé en heures.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière sous la forme d'une fonction affine.
3. Résoudre (E).

Exercice 8. La loi de refroidissement de Newton stipule de la température T d'un objet placé, à l'instant $t = 0$, dans un milieu dont la température ambiante est T_a vérifie l'équation différentielle :

$$T' = -k(T - T_a)$$

Le coefficient de proportionnalité k dépend essentiellement de la surface de contact entre l'objet et son milieu.

1. On note T_0 la température initiale. Déterminer, pour tout réel $t \geqslant 0$, $T(t)$.
2. On suppose maintenant que la température ambiante varie avec le temps.
   Déterminer, pour tout $t \geqslant 0$, $T(t)$ lorsque $T_a : t \longmapsto T_m \sin(\omega t)$ où T_m et ω sont des constantes réelles. (On chercher une solution particulière sous la forme $t \longmapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ avec $(a\,; b) \in \mathbb{R}^2$).

Exercice 9. On applique une tension constante U aux bornes d'un circuit RL contenant une résistance et une bobine en série. La loi des mailles permet alors d'écrire que l'intensité I, en fonction du temps, vérifie l'équation différentielle

$$U = RI + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

On a, de plus, la condition initiale $I(0) = 0$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à cette équation différentielle. On notera $\tau = \frac{L}{R}$.
2. Trouver une solution particulière constante.
3. En déduire, avec la condition initiale, l'intensité du courant dans le circuit en fonction du temps.
4. Déterminer l'instant t à partir duquel l'intensité du courant devient supérieure ou égale à $0{,}99 \times \frac{U}{R}$ (c'est-à-dire quasi-permanent à 1% près).

Exercice 10. On étudie les populations de deux espèces, un prédateur (le lynx) et une proie (le lièvre des neiges). On note $x(t)$ le nombre de proies et $y(t)$ le nombre de prédateurs à l'instant t. On admet que x et y sont solutions des équations différentielles

$$\forall t \geqslant 0 \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) - x(t)y(t) \\ y'(t) = -cy(t) + x(t)y(t) \end{cases}$$

où a et c sont des constantes strictement positives.

1. Déterminer les points d'équilibre du système, c'est-à-dire les valeurs de x et y pour lesquelles les deux populations sont constantes.
2. Dans la suite, on étudie l'évolution du système lorsqu'il est proche du point d'équilibre (non nul). On pose, pour tout $t \geqslant 0$, $u(t) = x(t) - c$ et $v(t) = y(t) - a$. Pour tout $t \geqslant 0$, $u(t)$ et $v(t)$ sont « petits » donc on néglige les termes en $u(t)v(t)$ par rapport à $u(t)$ et à $v(t)$.
   a. Vérifier qu'on a alors approximativement, pour tout $t \geqslant 0$,
   $$\begin{cases} u'(t) = -cv(t) \\ v'(t) = au(t) \end{cases}.$$
   b. En déduire une équation différentielle vérifiée par u.
   c. Résoudre l'équation différentielle de la question précédente.
   d. Déterminer, pour tout $t \geqslant 0$, une expression de $u(t)$ en fonction de a, c, $x(0)$ et $x'(0)$.
   e. En déduire, pour tout $t \geqslant 0$, une expression de $v(t)$ en fonction de a, c, $x(0)$ et $x'(0)$.

Exercice 11. En s'inspirant des exercices 1 et 4, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a. $(E_1) : y' + y = x^2$ **b.** $(E_2) : y' + y = 2\sin(x)$ **c.** $(E_3) : y' - y = (x+1)\mathrm{e}^x$

Exercice 12. Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tous réels t et x,

$$f(t+x) = f(t)f(x).$$

Indication. On pourra dériver par rapport à t puis évaluer l'égalité obtenue en $t = 0$ pour faire apparaître une équation différentielle.

Exercice 13. On cherche les fonctions numériques f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x,

$$f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x.$$

1. Supposons que f soit solution du problème.
   a. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   b. Démontrer que f est solution de l'équation (E) $y'' + y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.
   c. Résoudre (E) (on cherchera une solution sous la forme $x \longmapsto a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x}$ où $(a\,; b) \in \mathbb{R}^2$).
   d. En considérant $f'(0) + f(0)$, déterminer les valeurs possibles pour la fonction f.
2. Réciproquement, vérifier que les fonctions ainsi déterminées sont bien solutions du problème et conclure.