⧫ Chapitre 13. Fonctions polynomiales

I. — Définition et exemples

1) Définition

Définition 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est un **polynôme** (ou une **fonction polynomiale**) s'il existe un entier naturel n et des réels c_0, c_1, ..., c_n tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k.$$

Exemple 2.

1. La fonction nulle $x \longmapsto 0$ est un polynôme appelé polynôme nul.
2. La fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$, et plus généralement, les fonctions affines sont des polynômes.
3. La fonction carrée $x \longmapsto x^2$, et plus généralement, les fonctions polynômes du second degré sont des polynômes.
4. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \frac{1}{5}x^7 + \sqrt{2}x^4 - \pi x^3 + 2x - 1$ est un polynôme.

Définition 3

Un **monôme** (ou fonction monomiale) est une fonction f qui peut s'écrire sous la forme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & cx^n \end{array}$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 4.

1. Le polynôme nul est un monôme.
2. La fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : x \longmapsto x$ est un monôme.
3. La fonction carrée $x \longmapsto x^2$ est un monôme.
4. La fonction $x \longmapsto -\frac{\sqrt{3}}{7}x^{12}$ est un monôme.

Propriété 5

1. Un monôme est un polynôme.
2. Tout polynôme peut s'écrire comme une somme de monômes.

Remarque 6. Un binôme est la somme de deux monômes et un trinôme est la somme de trois monômes. Ainsi, la fonction trinôme du second degré $f : x \longmapsto 3x^2 - 5x + 7$ est la somme des trois monômes $x \longmapsto 3x^2$, $x \longmapsto -5x$ et $x \longmapsto 7$.

2) Fonctions affines

Définition 7

On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **affine** s'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b.$$

Exemple 8. Les fonctions suivantes sont des fonctions affines :

1. $f_1 : x \longmapsto 2x + 1$ ($a = 2$ et $b = 1$) ;
2. $f_2 : x \longmapsto 1 - 5x$ ($a = -5$ et $b = 1$) ;
3. $f_3 : x \longmapsto x\sqrt{2} - 3$ ($a = \sqrt{2}$ et $b = -3$) ;
4. $f_4 : x \longmapsto \frac{2}{3}x + \pi$ ($a = \frac{2}{3}$ et $b = \pi$) ;
5. $f_5 : x \longmapsto \frac{5x-3}{7}$ ($a = \frac{5}{7}$ et $b = -\frac{3}{7}$) ;
6. $f_6 : x \longmapsto 3$ ($a = 0$ et $b = 3$) ;
7. $f_7 : x \longmapsto -4x$ ($a = -4$ et $b = 0$) ;
8. $f_8 : x \longmapsto 0$ ($a = 0$ et $b = 0$).

Remarque 9. Dans la définition précédente, si $a = 0$, on obtient des fonctions constantes et si $a = 0$, on obtient des fonctions linéaires.

Théorème 10

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Alors, f est une fonction affine si et seulement s'il existe un nombre réel a tel que, pour tous réels x_1 et x_2 différents, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = a$. Dans ce cas, f est de la forme $f : x \longmapsto ax + f(0)$.

Remarque 11. Soit x_1 et x_2 deux réels distincts.

1. Une autre façon de formuler le théorème précédent est de dire qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est affine si et seulement si son taux de variation ne dépend pas de x_1 et x_2.
2. Étant donné des réels y_1 et y_2, il existe une unique fonction affine f telle que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.

Exemple 12.

1. Déterminer la fonction affine f telle que $f(3) = -2$ et $f(-1) = 5$.
2. Montrer que la fonction carrée n'est pas une fonction affine.

Propriété 13

Soit a et b deux réels et $f : x \longmapsto ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$.

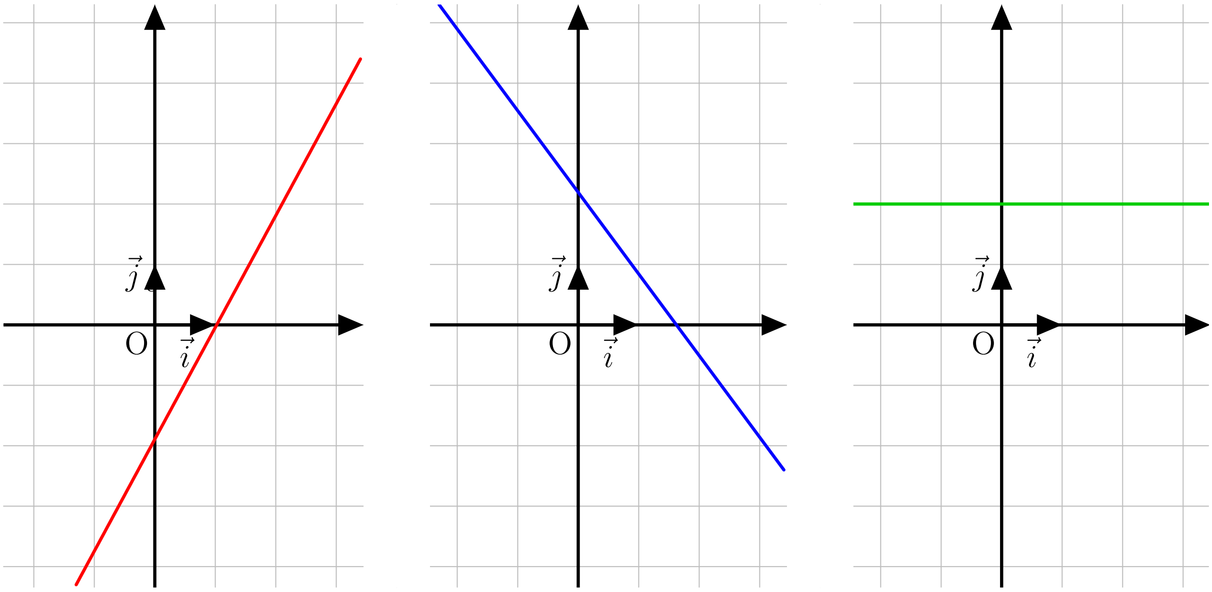
1. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 0$.
2. La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 0$.
3. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$ si $a = 0$.

Exemple 14. Si on reprend les fonctions de l'exemple 8, les fonctions f_1, f_3, f_4 et f_5 sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, les fonctions f_2 et f_7 sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$ et les fonctions f_6 et f_8 sont constantes sur $\mathbb{R}$.

Propriété 15

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite sécante à l'axe des ordonnées.

L'allure d'une droite représentant la fonction affine $x \longmapsto ax + b$ dépend de la valeur de a :



$a > 0$ $a < 0$ $a = 0$

Définition 16

Soit a et b deux réels et D la droite représentant la fonction affine $x \longmapsto ax + b$. Alors,

1. On dit que D est la **droite d'équation** $y = ax + b$.

2. Le nombre a est appelé le **coefficient directeur** (ou la pente) de D.

3. Le nombre b est appelé l'**ordonnée à l'origine** de D.

Remarque 17. Toute fonction affine est représentée par une droite mais une droite parallèle à l'axe des ordonnées ne représente pas une fonction affine (car elle ne peut pas représenter une fonction). C'est le seul cas où une droite n'est pas la courbe d'une fonction affine.

3) Polynômes du second degré

Définition 18

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **polynôme du second degré** s'il existe trois réels a, b et c avec $a \neq 0$ tels que, pour tout réel x,

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Exemple 19. Les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du second degré :

1. $x \longmapsto x^2 - 5x + 4$ $(a = 1,\ b = -5,\ c = 4)$;

2. $x \longmapsto -\frac{5}{3}x^2 + \sqrt{5}x - \pi$ $(a = -\frac{5}{3},\ b = \sqrt{5},\ c = -\pi)$;

3. $x \longmapsto -x^2 + 3 - \frac{x}{7}$ $(a = -1,\ b = -\frac{1}{7},\ c = 3)$;

4. $x \longmapsto 2 - \frac{x^2}{2}$ $(a = -\frac{1}{2},\ b = 0,\ c = 2)$;

5. $x \longmapsto 3x^2 - 5x$ $(a = 3,\ b = -5,\ c = 0)$;

6. $x \longmapsto x^2$ $(a = 1,\ b = 0,\ c = 0)$.

Théorème 20

Soit $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré.

1. Si $a > 0$ alors f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right[$. En particulier, f admet un minimum en $-\frac{b}{2a}$.
2. Si $a < 0$ alors f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right[$. En particulier, f admet un maximum en $-\frac{b}{2a}$.

On a donc les tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	↘	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	↗	$+\infty$

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	↗	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	↘	$-\infty$

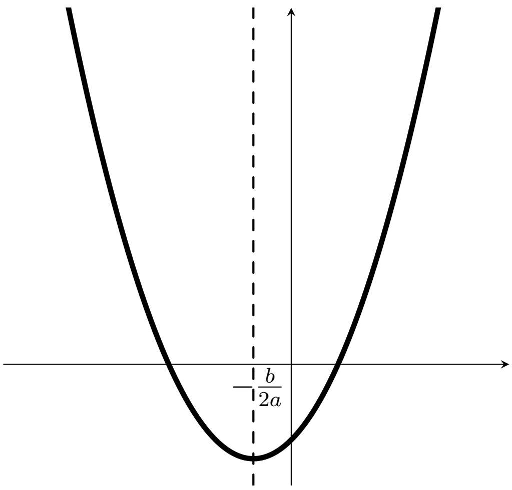
$a < 0$

Exemple 21. Soit $f : x \longmapsto -x^2 + 2x + 7$. On a $a = -1 < 0$ et $-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\times(-1)} = 1$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;1]$ et f est strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

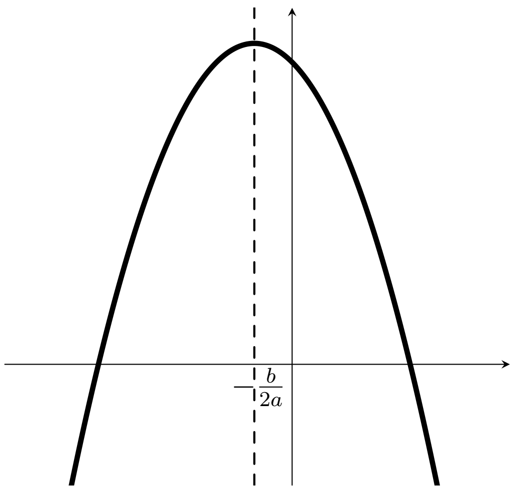
Définition 22

La courbe d'une fonction polynôme du second degré est appelée **une parabole**.

Si $a > 0$, on dit que la parabole est tournée vers le haut et, si $a < 0$, on dit que la parabole est tournée vers la bas.



$a > 0$
la parabole est tournée vers le haut

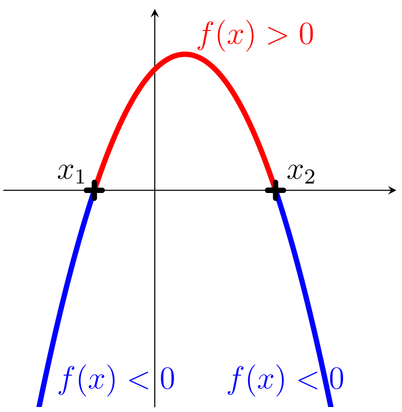
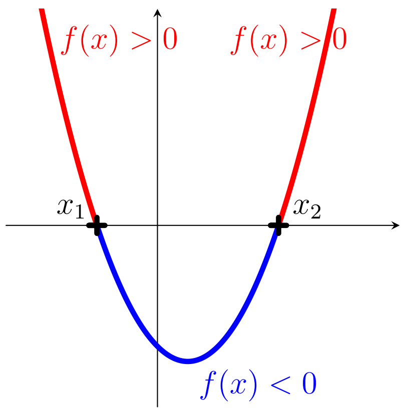
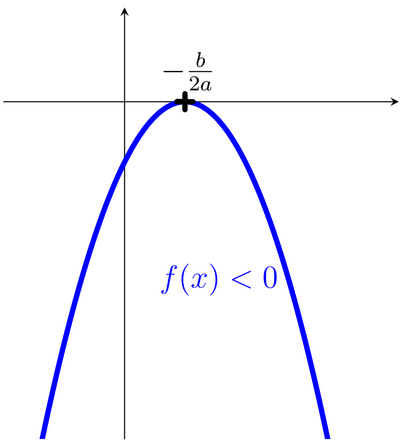
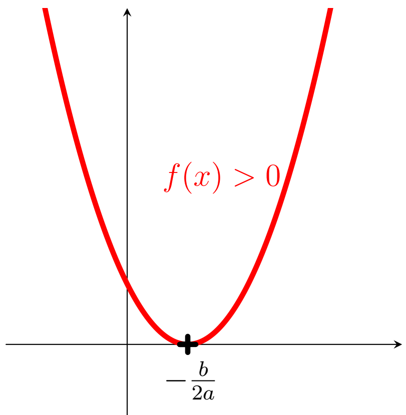
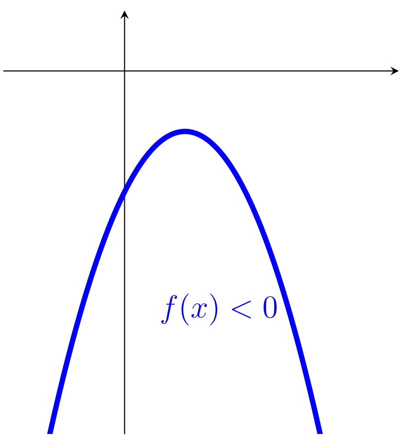
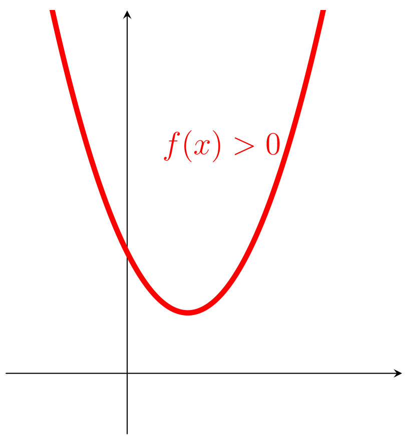


$a < 0$
la parabole est tournée vers le bas

Propriété 23

La parabole $\mathcal{P}$ représentative de la fonction f est symétrique par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Le signe d'une fonction trinôme peut être facilement retrouvé grâce à l'allure de la parabole qui la représente.

	$a < 0$	$a > 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

II. — Opérations sur les polynômes

Propriété 24

Soit f et g deux polynômes. Alors,

1. pour tous réels λ et μ, $\lambda f + \mu g$ est un polynôme ;
2. fg est un polynôme ;
3. pour tout entier naturel n, f^n est un polynôme ;
4. $g \circ f$ est un polynôme.

Exemple 25. On considère les polynôme $f : x \longmapsto x^2 - 1$ et $g : x \longmapsto x^3 - x + 1$. Expliciter les polynômes $2f - 3g$, fg et $f \circ g$ et $g \circ f$.

On peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la polynôme $x \longmapsto x^n$ est la puissance n-ième de la fonction $\mathrm{id}_\mathbb{R} : x \longmapsto x$. Ainsi, tout polynôme peut s'écrire comme combinaison linéaire des puissances de cette fonction. Plus précisément, si f s'écrit sous la forme

$$f : x \longmapsto c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots c_1 x + c_0$$

alors, pour tout réel x,

$$f(x) = c_n(\mathrm{id}_\mathbb{R}(x))^n + c_{n-1}(\mathrm{id}_\mathbb{R}(x))^{n-1} + \cdots + c_1 \mathrm{id}_\mathbb{R}(x) + c_0$$

de sorte que

$$f = c_n \mathrm{id}_\mathbb{R}^n + c_{n-1} \mathrm{id}_\mathbb{R}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathrm{id}_\mathbb{R} + c_0.$$

Dans le cadre des polynômes, il est d'usage de plutôt noter X la fonction $\mathrm{id}_\mathbb{R}$ de sorte que

$$f = c_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \cdots + c_1 X + c_0 = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k.$$

Notation 26. L'ensemble des polynômes se note $\mathbb{R}[X]$.

Propriété 27

Soit $f = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ un polynôme. Alors, f est nulle si et seulement si, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $c_k = 0$.

Corollaire 28

L'écriture d'un polynôme non nul sous la forme $f = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ avec $c_n \neq 0$ est unique. Autrement, si $f = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ et $g = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ sont deux polynômes tels que $c_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$ alors, $f = g$ si et seulement si $n = m$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $c_k = b_k$.

Exemple 29. Déterminer tous les polynômes f tels que

$$X^4 + 4X^3 - 8X + 4 = f^2.$$

III. — Degré, racine et polynôme dérivé

Définition 30

Soit $f = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$ avec $c_n \neq 0$.

1. L'entier n est appelé le **degré** de f. On le note $\deg(f)$.
2. Les nombres c_0, c_1, ..., c_n sont appelés les **coefficients** de f.
3. Le nombre c_n est appelé le **coefficient dominant** de f et le nombre c_0 est appelé le **coefficient constant** de f.

   On dit que f est **unitaire** si son coefficient dominant est égal à 1.

On convient, de plus, que le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Exemple 31.

1. Les fonctions constantes non nulles sont exactement les polynômes de degré 0.
2. Les fonctions affines non constantes sont exactement les polynômes de degré 1.
3. Les polynômes du second degré sont exactement les polynômes de degré 2.
4. $\deg(X^{2023} - X + 1) = 2023$ et $\deg(1 + X + X^2 + X^3) = 3$.

Notation 32. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal** à n se note $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, $\mathbb{R}_0[X]$ est l'ensemble des fonctions constantes et $\mathbb{R}_1[X]$ est l'ensemble des fonctions affines.

Propriété 33

Soit $(f, g) \in \mathbb{R}[X]^2$. Alors,

1. Pour tous réels λ et μ, $\deg(\lambda f + \mu g) \leqslant \max(\deg(f), \deg(g))$;
2. $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$;
3. $\deg(g \circ f) = \deg(f \circ g) = \deg(f) \times \deg(g)$;

Définition 34

Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ et $r \in \mathbb{R}$. On dit que a est une **racine** de f si $f(r) = 0$.

Exemple 35.

1. Si $f : x \longmapsto ax + b$ avec $a \neq 0$ alors l'unique racine de f est $-\frac{b}{a}$.
2. Si f est un polynôme du second degré alors les racines de f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Ainsi, f possède 2 racines si $\Delta > 0$, un unique racine si $\Delta = 0$ et aucune racine si $\Delta < 0$.
3. 1 est racine de $f = X^3 + 5X^2 - 4X - 2$ car $f(1) = 1^3 + 5 \times 1^2 - 4 \times 1 - 2 = 0$.

Propriété 36

Soit $f \in \mathbb{R}_n[X]$. La fonction dérivée d'un polynôme f est un polynôme appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On appelle le **polynôme dérivé** de f.

Exemple 37.

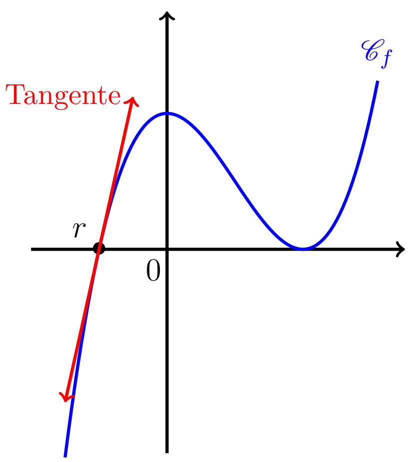
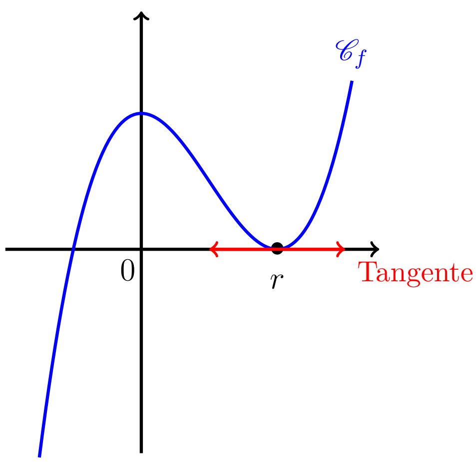
1. Si f est un polynôme constant alors f' est le polynôme nul.
2. Si f est une fonction affine alors f' est un polynôme constant.
3. Si $f = X^3 + 5X^2 - 3X + 4$ alors $f' = 3X^2 + 10X - 3$.

Définition 38

Soit $f \in \mathbb{R}[X]$ et $r \in \mathbb{R}$. On dit que f est une **racine multiple** de f si $f(r) = 0$ et $f'(r) = 0$. Dans le cas contraire, on dit que r est une **racine simple** de f.

Exemple 39. Montrer que 2 est une racine multiple du polynôme $f = X^3 - 3X^2 + 4$.

Graphiquement, un polynôme f admet une racine multiple r si sa courbe coupe l'axe des abscisse en r **et** si, en ce point, l'axe des abscisse est tangente horizontale à la courbe de f.

	
r est racine simple de f $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en r mais sa tangente n'est pas horizontale en ce point	r est racine multiple de f $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en r et sa tangente est horizontale en ce point

Théorème 40

Soit $f \in \mathbb{R}_n[X]$ et $r \in \mathbb{R}$. Alors,

1. r est un racine de f si et seulement s'il existe un polynôme $g \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $f = (X - a)g$.
2. r est un racine multiple de f si et seulement s'il existe un polynôme $g \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que $f = (X - a)^2 g$.

Exemple 41.

1. Factoriser le polynôme $f = X^3 + 5X^2 - 4X - 2$ de l'exemple 35.
2. Factoriser le polynôme de l'exemple 39.

Corollaire 42

Soit $n \in \mathbb{N}$. Un polynôme de degré n possède au plus n racines.

Exemple 43. On considère le polynôme $f = X^3 + 2X^2 - X - 2$. Calculer $f(-2)$, $f(-1)$ et $f(1)$ et en déduire l'ensemble des racines de f.

Propriété 44

Soit $f = aX^2 + bX + c$ une fonction polynôme du second degré. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de f.

1. Si $\Delta = 0$ alors f possède une racine multiple x_0 et, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - x_0)^2$.
2. Si $\Delta > 0$ alors f possède deux racines simples x_1 et x_2 et, pour tout nombre réel x, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Dans les deux cas, cette forme s'appelle la **forme factorisée** de f.

Remarque 45. Si $\Delta < 0$, f n'a pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

Exemple 46. Factoriser les polynômes $f = X^2 - X - 6$ et $g = 4X^2 + 4X + 1$.

IV. — Exercices

Exercice 1. Dans chaque cas, déterminer l'unique fonction affine f telle que :

1. $f(-3) = 4$ et $f(5) = 0$ **2.** $f(-3) = -2$ et $f(-5) = -2$ **3.** $f(-5) = 3$ et $f(0) = 0$.

Exercice 2. Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la fonction affine et étudier sa parité.

1. $f : x \longmapsto 6x - 8$ **2.** $g : x \longmapsto -6x$ **3.** $h : x \longmapsto 8$ **4.** $k : x \longmapsto -8 - 6x$.

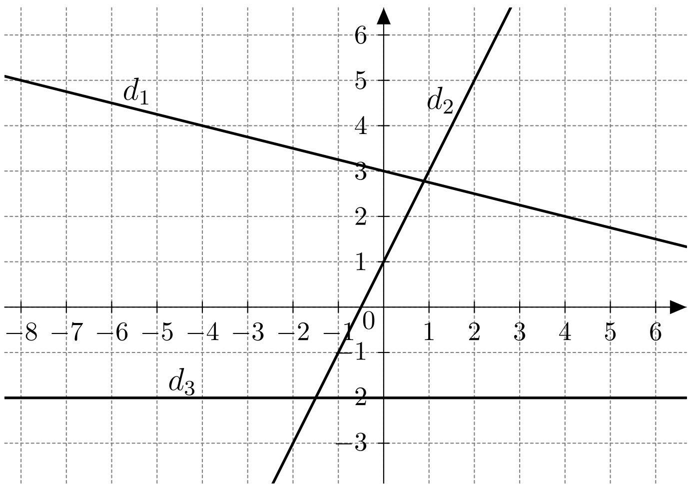
Exercice 3. On a tracé sur le graphique ci-contre 3 droites d_1, d_2 et d_3 qui représentent les fonctions :

$$f : x \longmapsto 2x + 1$$

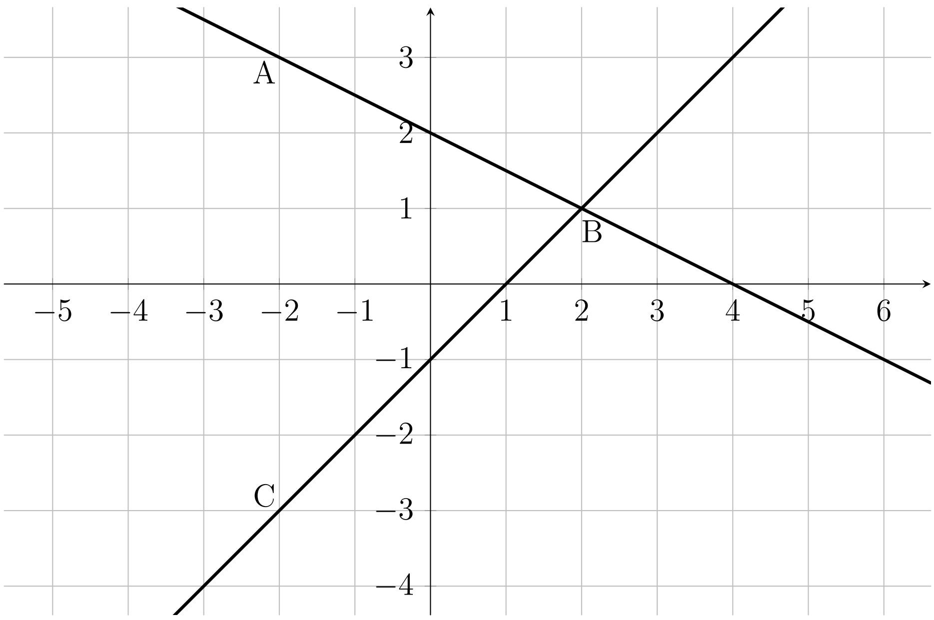
$$g : x \longmapsto -2$$

$$h : x \longmapsto -\frac{1}{4}x + 3.$$

Associer, en justifiant, chaque courbe à la fonction qu'elle représente.



Exercice 4. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé les droites (AB) et (BC) où A(−2 ; 3), B(2 ; 1) et C(−2 ; −3).



1. Pour chaque droite, déterminer graphiquement son équation réduite.
2. Déterminer par le calcul les équations réduites des droites (AB) et (BC).

Exercice 5. La fonction $f : x \longmapsto (x+1)^2 - x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est-elle affine ?

Exercice 6. Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes.

$$f : x \longmapsto 3x^2 + x - 1 \qquad g : x \longmapsto -x^2 + 4x + 1 \qquad h : x \longmapsto 2 - x + x^2.$$

Exercice 7. Démontrer que, pour tout réel p, $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

Exercice 8. La fonction $f : x \longmapsto (x+1)^3 - x^3$ est-elle une fonction polynôme du second degré ?

Exercice 9. On considère les polynômes $P = X + 1$ et $Q = X^4 + X^2 + 1$. Expliciter les polynômes $P - Q$, PQ, $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

Exercice 10.

1. Démontrer qu'il existe une unique paire $\{P, Q\}$ de polynômes unitaire et de degré 2, tels que $PQ = X^4 + 1$.
2. Soit P un polynôme du second degré. Montrer qu'il existe un unique polynôme du second degré Q tel que $P = Q(X+1)$.

Exercice 11. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $P = -X^2 + 4X + c$. Déterminer c tel que -5 soit racine de P.

Exercice 12. Soit $m \in \mathbb{R}^*$ et $P = X^3 + 2X^2 + m^2X + 2m^2$.

1. Vérifier que -2 est racine de P.
2. Factoriser P et en déduire l'ensemble des racines de P.

Exercice 13. On considère le polynôme $P = X^3 - 12X + 16$.

1. Vérifier que 2 est racine multiple de P.
2. Factoriser P et en déduire l'ensemble des racines de P.

Exercice 14. On considère le polynôme $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

1. Trouver une racine « évidente » de P.
2. Factoriser P puis en déduire l'ensemble des racines de P.

Exercice 15. En s'inspirant de l'exercice 14, résoudre les équations suivantes.

1. $(E_1) : 2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$
2. $(E_2) : 4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 0$
3. $(E_3) : -x^3 + 7x^2 - 7x - 15 = 0$

Exercice 16. Factoriser, lorsque cela est possible, les polynômes du second degré suivants.

$$P = 2X^2 + 5X - 7 \qquad Q = X^2 - 2X - 1 \qquad R = X^2 - X + 2 \qquad S = 9X^2 - 6X + 1.$$

Exercice 17. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $P = (m-1)X^2 + 2mX + 1 - 3m$.

1. Déterminer l'ensemble D des valeurs de m pour lesquelles P est un polynôme du second degré.
2. Montrer que 1 est racine de P.
3. On suppose que $m \in D$. Factoriser P.

Exercice 18. On considère le polynôme $P = 2X^4 - 9X^3 + 14X^2 - 9X + 2$.

1. **a.** Le nombre 0 est-il racine de P ?
   b. Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que si r est une racine de P alors $\frac{1}{r}$ est également une racine de P.
2. **a.** Montrer que l'équation $P(x) = 0$ est équivalente à l'équation

$$(E) : 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0.$$

   b. On pose $u = x + \frac{1}{x}$. Déduire de la question précédente que (E) est équivalente à

$$(E') : 2u^2 - 9u + 10 = 0.$$

   c. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).
   d. Factoriser P.

Exercice 19.

1. Déterminer deux fonctions f et g non nulles telles que fg soit la fonction nulle.
2. Montrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, PQ est le polynôme nul si et seulement si P ou Q est nul.