♦ Chapitre 12. Matrices à coefficients réels ou complexes

Dans tout le chapitre, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et m, n et p désignent des entiers naturels non nuls. Les éléments de K sont appelés les scalaires.

I. — Définition

Définition 1

Une **matrice** de taille $n \times m$ est un « tableau » d'éléments de K ayant n lignes et m colonnes. Ce tableau est délimité par des parenthèses (ou des crochets).

Exemple 2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ \pi & \sqrt{7} \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 3×2 et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3.

Définition 3

Soit A une matrice de taille $n \times m$.

1. Si $n = 1$, on dit que la matrice est une **matrice ligne**.
2. Si $m = 1$, on dit que la matrice est une **matrice colonne**.
3. Si $m = n$, on dit que la matrice est une **matrice carrée d'ordre** n.

Exemple 4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\mathrm{i} & \frac{1}{3}+\mathrm{i} \end{pmatrix}$ est une matrice ligne, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de colonne et $C = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{17}) & -\sin(\frac{\pi}{17}) \\ \sin(\frac{\pi}{17}) & \cos(\frac{\pi}{17}) \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

Définition 5

1. Les nombres composant une matrice sont appelés les **coefficients** (ou les termes ou les éléments) de la matrice.
2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in [\![1, m]\!]$, le coefficient se trouvant à l'intersection de la $i-$ème ligne et la $j-$ème colonne est appelé le **coefficient d'indices** i et j. Si la matrice est notée A, on notera en général ce coefficient $a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$.

Exemple 6. Si on reprend les matrices de l'exemple 2, $a_{1,1} = 2$, $b_{1,1} = 0$, $a_{1,2} = -3$, $b_{1,2} = 0$, $a_{3,1} = \pi$ et $a_{1,3}$ n'existe pas.

Définition 7

On dit que deux matrices sont **égales** si elles ont la même taille et les mêmes coefficients.

Notation 8. L'ensemble des matrices de taille $n \times m$ à coefficients dans K se note $\mathscr{M}_{n,m}(K)$ et, si $n = m$, on note simplement $\mathscr{M}_n(K)$. Ainsi, $\mathscr{M}_n(K)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K.

II. — Opérations sur les matrices

1) Addition et soustraction

Définition 9

On considère deux matrices A et B de <u>même taille</u>.

1. On définit la **somme de A et B**, notée $A+B$, comme la matrice obtenue en additionnant terme à terme les coefficients des matrices A et B (c'est-à-dire les coefficients ayant les mêmes indices).
2. On définit la **différence de A et B**, notée $A-B$, comme la matrice obtenue en soustrayant terme à terme les coefficients des matrices A et B (c'est-à-dire les coefficients ayant les mêmes indices).

Les matrices $A+B$ et $A-B$ ont la même taille que A et B.

Exemple 10. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A+B = \begin{pmatrix} 1+2 & -3+4 \\ 2+(-1) & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $A-B = \begin{pmatrix} 1-2 & -3-4 \\ 2-(-1) & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Définition 11

On appelle **matrice nulle de taille** $n \times m$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(K)$ dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n,m}$ (et simplement 0_n si $n = m$).

Exemple 12. $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété 13

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$,

1. $A + 0_{n,m} = 0_{n,m} + A = A$;
2. $A - 0_{n,m} = A$;
3. $A - A = 0_{n,m}$.

Démonstration. Notons, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, $a_{i,j}$ le coefficient d'indices i et j de A.

1. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de $A+0_{n,m}$ est $a_{i,j}+0 = a_{i,j}$ et celui de $0_{n,m}+A$ est $0+a_{i,j} = a_{i,j}$ donc $A+0_{n,m} = 0_{n,m}+A = A$.
2. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de $A-0_{n,m}$ est $a_{i,j}-0 = a_{i,j}$ donc $A-0_{n,m} = A$.
3. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de $A-A$ est $a_{i,j}-a_{i,j} = 0$ donc $A-A = 0_{n,m}$.

□

2) Produit par un scalaire

Définition 14

Soit k un scalaire et A une matrice. On définit la matrice kA comme la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par k. Elle est de même taille que A.

Exemple 15. Si $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{\mathrm{i}}{2} & 1 \\ \frac{5}{6} & -1 & -\frac{2\mathrm{i}}{3} \end{pmatrix}$ alors $6A = \begin{pmatrix} 2 & 3\mathrm{i} & 6 \\ 5 & -6 & -4\mathrm{i} \end{pmatrix} = B$. On a alors $A = \frac{1}{6}B$.

Définition 16

Soit A une matrice. On appelle **opposée de** A la matrice $(-1)A$. On la note $-A$. Elle est de même taille que A et formée des coefficients opposés de ceux de A.

Propriété 17

Soit A, B et C des matrices de même taille $n \times m$ et k et k' des scalaires. Alors,

1. $A + (-B) = A - B$ et, en particulier, $A + (-A) = A - A = 0_{n,m}$.
2. $0_{n,m} - A = -A$.
3. $A + B = B + A$ (l'addition des matrices est commutative).
4. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (l'addition des matrices est associative).
5. $k(A + B) = kA + kB$, $(k + k')A = kA + k'A$ et $k(k'A) = (kk')A$ (le produit par un scalaire est distributif et associatif).

Démonstration. Notons, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ et $c_{i,j}$ les coefficients d'indices i et j respectivement de A, B et C.

1. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de $A+(-B)$ est $a_{i,j}+(-b_{i,j}) = a_{i,j} - b_{i,j}$ donc $A + (-B) = A - B$.
2. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de $O_{n,m} - A$ est $0 - a_{i,j} = -a_{i,j} = (-1)a_{i,j}$ donc $0_{n,m} - A = -A$.
3. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de $A + B$ est $a_{i,j} + b_{i,j} = b_{i,j} + a_{i,j}$ qui est le coefficient d'indices i et j de $B + A$ donc $A + B = B + A$.
4. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de $B + C$ est $b_{i,j} + c_{i,j}$ donc le coefficient d'indices i et j de $A + (B + C)$ est $a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j}) = a_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j}$. De même, le coefficient d'indices i et j de $A + B$ est $a_{i,j} + b_{i,j}$ donc le coefficient d'indices i et j de $A + B$ est $a_{i,j} + (b_{i,j}$ donc le coefficient d'indices i et j de $(A + B) + C$ est $(a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j}$. Ainsi, $A + (B + C) = (A + B) + C$.
5. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$.
   Le coefficient d'indices i et j de $k(A+B)$ est $k(a_{i,j} + b_{i,j}) = ka_{i,j} + kb_{i,j}$ donc $k(A+B) = kA + kB$.
   Le coefficient d'indices i et j de $(k + k')A$ est $(k + k')a_{i,j} = ka_{i,j} + k'a_{i,j}$ donc $(k + k')A = kA + k'A$.
   Le coefficient d'indices i et j de $k(k'A)$ est $k(k'a_{i,j}) = (kk')a_{i,j}$ donc $k(k'A) = (kk')A$.

□

Corollaire 18

Soit A, B et C trois matrices de même taille et k un scalaire non nul. Alors

1. $A = B+C$ si et seulement si $A-C = B$ **2.** $kA = B$ si et seulement si $A = \dfrac{1}{k}B$.

Démonstration. Supposons que A, B et C sont des matrices $n \times m$.

1. $A = B+C$ si et seulement si $A-C = (B+C)-C$ si et seulement si $A-C = B+(C-C)$ si et seulement si $A - C = B + 0_{n,m}$ si et seulement si $A - C = B$.
2. Comme $k \neq 0$, $kA = B$ si et seulement si $\frac{1}{k}(kA) = \frac{1}{k}B$ si et seulement si $(\frac{1}{k}k)A = \frac{1}{k}B$ si et seulement si $A = \frac{1}{k}B$.

□

Exemple 19. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $C = 3A - 2B$.
2. Déterminer les matrices X de taille 3×2 alors que $2X + C = A$.

Solution.

1. $C = 3\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 6 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -6 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 12 & -2 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Pour tout matrice X de taille 3×2,

$$2X + C = A \iff 2X = A - C \iff 2X = A - (3A - 2B) \iff 2X = -2A + 2B$$
$$\iff X = B - A \iff X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'unique matrice $X \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ telle que $2X + C = A$ est $X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Produit de deux matrices

Définition 20

Soit $L = (\ell_1 \ \ell_2 \ \cdots \ \ell_p)$ une matrice ligne ayant p colonnes et $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne ayant p lignes. On définit le **produit de L par C**, noté $L \times C$ ou LC, comme la matrice carrée d'ordre 1 ayant comme seul coefficient le nombre $\ell_1 \times c_1 + \ell_2 \times c_2 + \cdots + \ell_p \times c_p = \sum_{i=1}^{p} \ell_i c_i$.

Exemple 21. Calculer $L \times C$ si $L = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

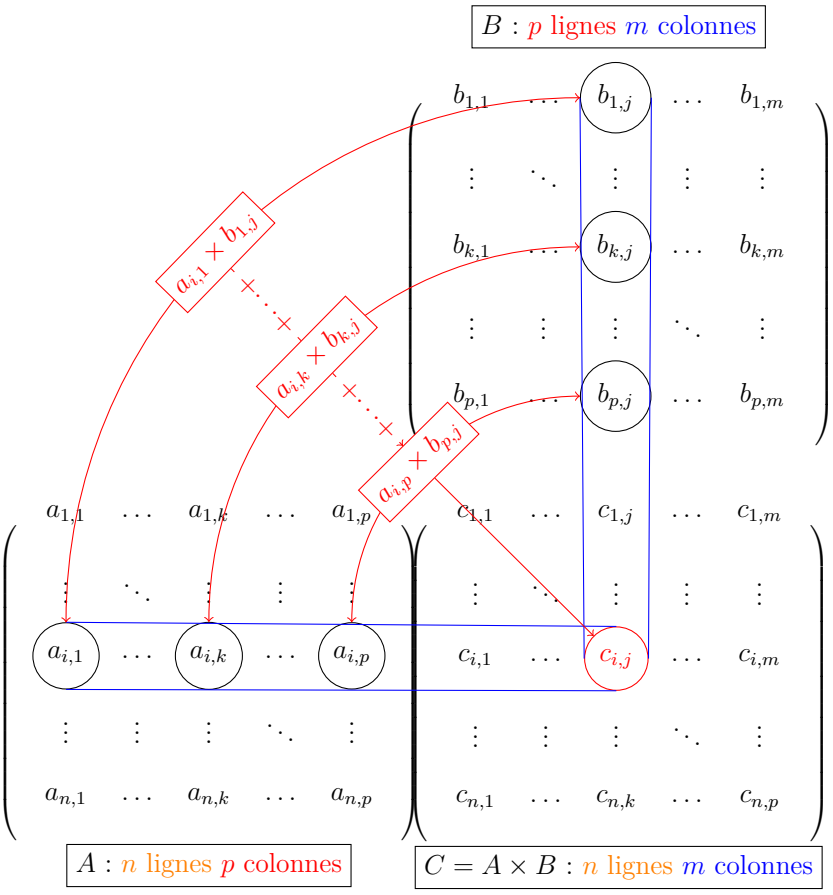
Solution. $LC = \Big(\mathrm{i} \times (-\mathrm{i}) + (-2) \times 1 + 0 \times 1 + (-3) \times 2\Big) = \Big(-7\Big)$.

Remarque 22. Pour des raisons pratiques, on assimile cette matrice à son seul coefficient.

Définition 23

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{p,m}(K)$. On définit le **produit des matrices** A **et** B, noté $A \times B$ ou AB, comme la matrice de taille $n \times m$ dont le coefficient d'indices i et j est le produit de la $i-$ème ligne de A avec la $j-$ème colonne de B (au sens de la définition précédente). Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in [\![1, m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de la matrice AB est

$$[AB]_{i,j} = a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \cdots + a_{i,p} \times b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$



Remarque 24. Le produit AB n'existe que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemple 25. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer tous les produits de deux matrices possibles avec A, B et C.

Solution. On peut calculer 3 produits : BA, AC et C^2. De plus,

$$BA = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -6 & 14 & 4 \\ -3 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 2 \\ 13 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -1 \\ 0 & 16 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Ce n'est pas parce qu'on peut calculer AB qu'on peut automatiquement calculer BA.
2) Même si AB et BA existent, en général $AB \neq BA$. Le produit de matrice n'est pas commutatif.

Exemple 26. Calculer AB et BA si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solution. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Définition 27

Si A et B sont deux matrices telles que $AB = BA$, on dit que A et B **commutent**.

Exemple 28. Quelles sont les matrices qui commutent avec la matrice A de l'exemple 26 ?

Solution. Comme A est une matrice carrée d'ordre 2, une matrice C commute avec A seulement si C est également carrée d'ordre 2. Considérons a, b c et d quatre réels et $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors,

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a & b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad CA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{pmatrix}$$

donc

$$AC = CA \iff \begin{cases} a+c = a+b \\ b+d = a \\ a = c+d \\ b = c \end{cases} \iff \begin{cases} a = b+d \\ c = b \end{cases}.$$

Ainsi, on conclut que l'ensemble des matrices qui commutent à A est $\left\{ \begin{pmatrix} b+d & b \\ b & d \end{pmatrix} \;\middle|\; (b,d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Propriété 29

Soit A, B et C trois matrices et k un scalaire. Sous l'hypothèse que les produits écrits ont un sens alors

1. $A(BC) = (AB)C$ (associativité du produit) ;
2. $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$ (distributivité du produit sur la somme) ;
3. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ (associativité du produit matriciel et du produit par un scalaire).

Démonstration.

1. Supposons que A est de taille $n \times p$, B de taille $p \times q$ et C de taille $q \times m$.
Pour tout $(s,t) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,m]\!]$, le coefficient d'indices s et t de BC est

$$[BC]_{s,t} = \sum_{k=1}^{q} [B]_{s,k}[C]_{k,t}$$

donc, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de $A(BC)$ est

$$[A(BC)]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell}[BC]_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell} \sum_{k=1}^{q} [B]_{\ell,k}[C]_{k,j} = \sum_{\ell=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} [A]_{i,\ell}[B]_{\ell,k}[C]_{k,j}.$$

De même, pour tout $(s,t) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, le coefficient d'indices s et t de AB est

$$[AB]_{s,t} = \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{s,\ell}[B]_{\ell,t}$$

donc, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de $(AB)C$ est

$$[(AB)C]_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} [AB]_{i,k}[C]_{k,j} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell}[B]_{\ell,k} \right) |C]_{k,j} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell}[B]_{\ell,k}[C]_{k,j}.$$

Or, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, $\sum_{\ell=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} [A]_{i,\ell}[B]_{\ell,k}[C]_{k,j} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell}[B]_{\ell,k}[C]_{k,j}$ donc $[A(BC)]_{i,j} = [(AB)C]_{i,j}$ et on conclut que $A(BC) = (AB)C$.

2. Supposons que A est une matrice de taille $n \times p$ et que B et C sont des matrices de taille $p \times m$. Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de $A(B+C)$ est

$$\sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B+C]_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k} \left([B]_{k,j} + [C]_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,j} + \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[C]_{k,j} = [AB]_{i,j} + [AC]_{i,j}$$

donc $A(B+C) = AB + AC$.
Supposons que A et B sont de taille $n \times p$ et que C est de taille $p \times m$. Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de $(A+B)+C$ est

$$\sum_{k=1}^{p} [A+B]_{i,k}[C]_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} \left([A]_{i,k} + [B]_{i,k}\right)[C]_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[C]_{k,j} + \sum_{k=1}^{p} [B]_{i,k}[C]_{k,j} = [AC]_{i,j} + [BC]_{i,j}$$

donc $(A+B)C = AC + BC$.

3. Supposons que A est de taille $n \times p$ et B est de taille $p \times m$. Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de $k(AB)$ est

$$k[AB]_{i,j} = k \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell}[B]_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{p} k[A]_{i,\ell}[B]_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{p} [kA]_{i,\ell}[B]_{\ell,j} = [(kA)B]_{i,j}$$

donc $k(AB) = (kA)B$. De plus, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, on a également

$$k[AB]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{p} k[A]_{i,\ell}[B]_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell}\left(k[B]_{\ell,j}\right) = \sum_{\ell=1}^{p} [A]_{i,\ell}[kB]_{\ell,j} = [A(kB)]_{i,j}$$

donc $k(AB) = A(kB)$.

$\square$

Propriété 30

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$. Alors, $A \times 0_{p,m} = 0_{n,m}$ et $0_{m,n} \times A = 0_{m,p}$. En particulier, si A est une matrice carrée d'ordre n alors $A \times 0_n = 0_n \times A = 0_n$.

Démonstration. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, le coefficient d'indices i et j de $A \times 0_{p,m}$ est

$$[A \times 0_{p,m}]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k} \times 0 = 0$$

donc $A \times 0_{p,m} = 0_{n,m}$.

De même, pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!]$, le coefficient d'indice i et j de $0_{m,n} \times A$ est

$$[0_{m,n} \times A]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k} \times 0 = 0$$

donc $0_{m,n} \times A = 0_{m,p}$. □

⚠ Un produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle.

Exemple 31. Déterminer deux matrices A et B non nulles dont le produit est une matrice nulle.

Solution. Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $AB = 0_2$ mais, pourtant, $A \neq 0_2$ et $B \neq 0_2$.

4) Transposition

Définition 32

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$. On appelle **matrice transposée de** A, et on note ${}^tA$ (ou $A^\top$), la matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(K)$ obtenue à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes de A c'est-à-dire la matrice telle que, pour tout $(i\,;j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, $[{}^tA]_{j,i} = [A]_{i,j}$.

Exemple 33. Déterminer les transposées des matrices A, B et C de l'exemple 25.

Solution. ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et ${}^tC = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 34

1. Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$, ${}^t({}^tA) = A$.
2. Pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,m}(K)^2$, ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
3. Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$ et tout $k \in K$, ${}^t(kA) = k{}^tA$.
4. Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ et tout $B \in \mathscr{M}_{p,m}$, ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$.

Démonstration.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, le coefficient d'indices j et i de ${}^tA$ est $[A]_{i,j}$ donc le coefficient d'indices i et j de ${}^t({}^tA)$ est $[{}^tA]_{j,i} = [A]_{i,j}$ donc ${}^t({}^tA) = A$.
2. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,m}(K)^2$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, le coefficient d'indices j et i de ${}^t(A + B)$ est $[A + B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j} = [{}^tA]_{j,i} + [{}^tB]_{j,i}$ donc ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, le coefficient d'indices j et i de ${}^t(kA)$ est $[kA]_{i,j} = k[A]_{i,j} = k[{}^tA]_{j,i}$ donc ${}^t(kA) = k{}^tA$.
4. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{p,m}$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!]$, le coefficient d'indices j et i de ${}^t(AB)$ est

$$[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} [{}^tA]_{k,i}[{}^tB]_{j,k} = \sum_{k=1}^{p} [{}^tB]_{j,k}[{}^tA]_{k,i} = [{}^tB{}^tA]_{j,i}$$

donc ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$.

□

III. — Matrices carrées

1) Matrices diagonales, matrices triangulaires

Définition 35

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. On appelle **diagonale** de A l'ensemble des coefficients de A dont les deux indices sont égaux c'est-à-dire les coefficients de la forme $a_{i,i}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Ces coefficients sont appelés les **coefficients diagonaux** de A.
2. On dit que A est une **matrice diagonale** si tous les coefficients de A qui ne sont pas diagonaux sont nuls.

Exemple 36. Les matrices (3), $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et 0_n sont diagonales.

Remarque 37. Les coefficients diagonaux d'une matrice diagonale peuvent tout à fait être nuls.

Définition 38

On appelle **matrice identité** (ou matrice unité) d'ordre n la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1. On la note I_n.

Exemple 39. $I_1 = (1)$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 40

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(K)$, $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors,

$$[A \times I_n]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{i,k}[I_n]_{k,j}.$$

Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $[I_n]_{k,j} = 0$ si $k \neq j$ et $[I_n]_{k,j} = 1$ si $k = j$ donc $[A \times I_n]_{i,j} = [A]_{i,j} \times 1 = [A]_{i,j}$. Ainsi, $A \times I_n = A$.

De même,

$$[I_n \times A]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [I_n]_{i,k}[A]_{k,j} = 1 \times [A]_{i,j} = [A]_{i,j}$$

donc $I_n \times A = A$. □

Définition 41

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$.

1. On dit que A est **triangulaire supérieure** si tous les coefficients de A situés strictement en dessous de la diagonale son nuls c'est-à-dire si, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$i > j \Longrightarrow [A]_{i,j} = 0.$$

2. On dit que A est **triangulaire inférieure** si tous les coefficients de A situés strictement au-dessus de la diagonale son nuls c'est-à-dire si, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$i < j \Longrightarrow [A]_{i,j} = 0.$$

Exemple 42. Les matrices (3), $\begin{pmatrix} 3 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 0_n et I_n sont triangulaires supérieures et les matrices (3), $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \mathrm{i}\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 0_n et I_n sont triangulaires inférieures.

Remarque 43.

1. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$ est triangulaire inférieure si et seulement si ${}^tA$ est triangulaire supérieure.
2. Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$ est diagonale si et seulement si elle est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

2) Puissance d'une matrice carrée

Définition 44

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit le **carré** de A, noté A^2, par $A^2 = A \times A$. De manière plus générale, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la **puissance** $k-$**ième** de A, notée A^k, comme le produit de A par elle-même k fois c'est-à-dire $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Remarque 45. Si $A \in \mathscr{M}_n(K)$, on convient que $A^0 = I_n$. On peut alors définir la puissance k par récurrence : $A^0 = I_n$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = A^k \times A$.

Exemple 46.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que peut-on dire des puissances de A ?

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^2, B^3 et B^4. Conjecturer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'expression de B^k en fonction de B et de k et le démontrer.

3. Même question avec la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution.

1. On vérifie que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0_3$. Dès lors, pour tout entier $k \geqslant 3$, $A^k = A^3 A^{k-3} = 0_3 A^{k-3} = 0_3$. Ainsi, pour tout entier $k \geqslant 3$, $A^k = 0_3$.

2. On vérifie que $B^2 = 3B$, $B^3 = 9B$ et $B^4 = 27B$. Considérons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(k)$: « $B^k = 3^{k-1}B$ ».

Initialisation. $3^{1-1}B = 3^0 B = B$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Alors,

$$B^{k+1} = B^k B = (3^{k-1}B)B = 3^{k-1}B^2 = 3^{k-1}(3B) = (3^{k-1}3)B = 3^k B$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = 3^{n-1}B$.

3. On vérifie que $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Considérons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(k)$: « $C^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \frac{k(k+1)}{2} & k & 1 \end{pmatrix}$ ».

Initialisation. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1(1+1)}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = C$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Alors,

$$C^{k+1} = C^k C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \frac{k(k+1)}{2} & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 & k+1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} & k+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & 1 & 0 \\ \frac{(k+1)(k+2)}{2} & k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$C^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \frac{k(k+1)}{2} & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Cette égalité est également vraie pour $k = 0$.

Propriété 47

Soit $D \in \mathscr{M}_n(K)$ une matrice diagonale. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, D^k est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les puissances k des coefficients diagonaux de D. Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n^k \end{pmatrix}$$

Démonstration. Écrivons $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$. On raisonne par récurrence sur k.

Considérons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la proposition

$$\mathcal{P}(k) : \text{ « } \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n^k \end{pmatrix} \text{ ».}$$

Initialisation. D'une part, $D^0 = I_n$ et, d'autre part, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i^0 = 1$ donc

$$\begin{pmatrix} a_1^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1}^0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n^0 \end{pmatrix} = I_n$$

et ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Alors,

$$D^{k+1} = D^k D = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{k+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1}^{k+1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n^{k+1} \end{pmatrix}$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1}^k & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n^k \end{pmatrix}.$$

□

Remarque 48. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_n^k = I_n$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0_n^k = 0_n$.

3) Matrice inverse d'une matrice carrée

a) Cas général

Théorème et définition 49

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$. Si tel est le cas, alors la matrice B est unique et cette matrice est appelée l'**inverse** de la matrice A. On la note A^{-1}.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux matrices B et C carrées d'ordre n telles que $AB = BA = I_n$ et $AC = CA = I_n$. Alors, en multipliant l'égalité $AB = I_n$ par C à gauche, il vient $C(AB) = CI_n$ i.e. $(CA)B = C$. Or, $CA = I_n$ donc $I_nB = C$ i.e. $B = C$. Ainsi, s'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$ alors cette matrice est unique. □

Remarque 50.

1. Par définition, une matrice et son inverse commutent.
2. Si A est inversible alors A^{-1} est également inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.
4. La matrice 0_n n'est pas inversible car, pour toute matrice B carrée d'ordre n, $0_nB = B0_n = 0_n \neq I_n$.

Propriété 51. — (admise)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Si B est une matrice carrée d'ordre n telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$) alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

Exemple 52. Démontrer que $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution. Étant donné que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

d'après la propriété précédente $B = A^{-1}$.

Propriété 53

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(K)^2$.

1. Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Si A est inversible alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Démonstration.

1. Supposons que A et B sont inversibles. Alors,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

donc AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. Supposons que A est inversible. Alors, $AA^{-1} = I_n$ donc ${}^t(AA^{-1}) = {}^tI_n = I_n$. Or, par la **Propriété 34**, ${}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1}){}^tA$ donc ${}^t(A^{-1}){}^tA = I_n$. Ainsi, ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

□

Propriété 54

Une matrice diagonale D est inversible si et seulement si aucun de ses coefficients diagonaux a_1, a_2, ..., a_n n'est nul et alors D^{-1} est la matrice diagonale donc les coefficients diagonaux sont $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, ..., $\frac{1}{a_n}$. Autrement dit, si aucun des nombres a_1, a_2, ..., a_n n'est nul alors

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Supposons que tous les coefficients diagonaux de D sont non nuls. Alors,

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{a_n}{a_n} \end{pmatrix} = I_n.$$

Ainsi, D est inversible et

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, supposons que D est inversible. Supposons, par l'absurde qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_i = 0$. Notons $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, le 1 se trouvant sur la i-ème ligne. Alors,

$$DX = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{i-1} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{i+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{n,1}.$$

Ainsi, $DX = 0_{n,1}$ donc $D^{-1}(DX) = D^{-1}0_{n,1}$ i.e. $(D^{-1}D)X = 0_{n-1}$ i.e. $I_nX = 0_{n,1}$ soit finalement $X = 0_{n,1}$. Ceci est absurde puisque $X \neq 0_{n,1}$ donc on conclut que tous les éléments diagonaux de D sont nuls. □

b) Cas des matrices carrées d'ordre 2

Propriété 55

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Alors, A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et, dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Notons $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Alors,

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - cd & -bc + da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc)I_2$$

Supposons que $ad - bc \neq 0$. Alors, on déduit du calcul précédent que $\frac{1}{ad-bc}(AB) = I_2$ donc $A\left(\frac{1}{ad-bc}B\right) = I_2$ ce qui montre que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}B$.

Réciproquement, supposons que A est inversible. Raisonnons par l'absurde en supposant que $ad - bc = 0$. Alors, par le calcul préliminaire, $AB = 0I_2 = 0_2$ donc, en multipliant à gauche par A^{-1}, $A^{-1}(AB) = A^{-1}0_2$ donc $(A^{-1}A)B = 0_2$ donc $I_2B = 0_2$ i.e. $B = 0_2$. Ainsi, $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 0_2$ donc $d = -b = -c = a = 0$. Dès lors, $a = b = c = d = 0$ donc $A = 0_2$ ce qui est absurde par 0_2 n'est pas inversible alors que A est inversible. Ainsi, $ad - bc \neq 0$. □

Définition 56

Avec les notations précédentes, le nombre $ad - bc$ est appelé le **déterminant** de A. On le note $\det(A)$ ou encore $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Exemple 57. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, si tel est le cas, déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution.

$\det(A) = 1 \times 4 - 3 \times 2 = -2 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$\det(B) = 3 \times 4 - (-6) \times (-2) = 12 - 12 = 0$ donc B n'est pas inversible.

$\det(C) = 0 \times 1 - 1 \times 1 = -1$ donc C est inversible et $C^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

IV. — Écriture matricielle d'un système et rang d'une matrice

Définition 58

On considère un système linéaire de n équations à m inconnues de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m = b_m \end{cases}.$$

On peut alors associer à (S) les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

appelées respectivement **matrice des coefficients**, **matrice des inconnues** et **matrice des seconds membres**, de telle sorte que le système (S) est équivalent à l'égalité matricielle $AX = B$. Cette égalité est appelée **écriture matricielle de** (S).

Exemple 59. Déterminer l'écriture matricielle du système

$$(S)\ \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ -x + 2y + z = 6 \end{cases}.$$

Solution. L'écriture matricielle de (S) est $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Remarque 60. Si un système est échelonné alors sa matrice des coefficients est triangulaire supérieure (mais la réciproque est fausse).

Théorème 61. — (admis)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. La matrice A est inversible.
2. Pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$, le système (S) dont l'écriture matricielle est $AX = B$ possède une unique solution.

De plus, dans le cas où A est inversible, l'unique solution de (S) est donnée par la matrice $X = A^{-1}B$.

Exemple 62. Montrer que le système (S) de l'exemple 59 possède une unique solution et en déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Solution. Échelonnons par la méthode du pivot de Gauss :

$$(S)\ \begin{cases} x - y + 2z = 5 & L_1 \\ 2x + y - z = 1 & L_2 \\ -x + 2y + z = 6 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 2z = 5 & L_1 \\ \quad 3y - 5z = -9 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad y + 3z = 11 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + 2z = 5 & L_1 \\ \quad y + 3z = 11 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \quad 3y - 5z = -9 & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + 2z = 5 & L_1 \\ \quad y + 3z = 11 & L_2 \\ \quad -14z = -42 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Le système (S) possède une unique solution donc sa matrice des coefficients est inversible i.e. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

On a vu dans le chapitre sur les systèmes linéaires qu'un système de n équations à n inconnues possède une unique solution si et seulement s'il est de rang n. Le rang d'un système ne dépend pas du second membre mais seulement des coefficients des inconnues c'est-à-dire, avec l'écriture matricielle, seulement de la matrice A. Le théorème précédent assure que A est inversible si et seulement si le rang du système dont l'écriture matricielle est $AX = B$ est égal à n pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ et, comme ce rang ne dépendant pas de B, ceci équivaut aussi au fait que le système dont l'écriture matricielle est $AX = 0_n$ est de rang n. Ceci justifie la définition suivante.

Définition 63

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$ et (S) le système linéaire dont l'écriture matricielle est $AX = 0_n$. Le **rang** de A, noté $\mathrm{rg}(A)$, est le rang de (S).

Exemple 64. Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution.

On associe à A le système $(S_A) \begin{cases} x + 2y = 0 & L_1 \\ 2x + 3y = 0 & L_2 \end{cases}$. Alors,

$$(S_A) \iff \begin{cases} x + 2y = 0 & L_1 \\ \quad -y = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}.$$

Le système échelonné possède 2 pivots (1 et -1) donc $\mathrm{rg}(S_A) = 2$ et ainsi $\mathrm{rg}(A) = 2$.

On associe à B le système $(S_B) \begin{cases} x - 2y = 0 & L_1 \\ -2x + 4y = 0 & L_2 \end{cases}$. Alors,

$$(S_B) \iff \begin{cases} x - 2y = 0 & L_1 \\ \quad 0 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{cases}.$$

Le système échelonné possède 1 seul pivot (1) donc $\mathrm{rg}(S_B) = 1$ et ainsi $\mathrm{rg}(B) = 1$.

On associe à C le système $(S_C) \begin{cases} x - y + 2z = 0 & L_1 \\ 2x + y - z = 0 & L_2 \\ -x + 2y + z = 0 & L_3 \end{cases}$. Alors,

$$(S_C) \iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 & L_1 \\ \quad 3y - 5z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \quad y + 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 & L_1 \\ \quad y + 3z = 0 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \quad 3y - 5z = 0 & L_3 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 & L_1 \\ \quad y + 3z = 0 & L_2 \\ \quad -14z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{cases}$$

Le système échelonné possède 3 pivots (1, 1 et -14) donc $\mathrm{rg}(S_C) = 3$ et ainsi $\mathrm{rg}(C) = 3$.

Corollaire 65

Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes.

1. La matrice A est inversible.
2. $\mathrm{rg}(A) = n$.
3. L'unique matrice $X \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$ telle que $AX = 0_n$ est 0_n.
4. Pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(K)$, l'équation $AX = B$ possède une unique solution dans $\mathscr{M}_{n,1}(K)$.

Démonstration. Par le **Théorème 61**, les propositions **1.** et **4.** sont équivalentes. De plus, par la **Propriété 30** du chapitre 7, les propositions **3.** et **4.** sont équivalentes à la proposition **2.**. On en conclut que les quatre propositions sont équivalentes. □

Exemple 66. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible de deux manières différentes.

Solution.

Méthode 1. On associe A le système $(S_A) \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ z=0 \end{cases}$. Alors, (S_A) est équivalent à $\begin{cases} x+y+z=0 \\ z=0 \end{cases}$ qui est échelonné et de rang 2 donc $\mathrm{rg}(S_A) = 2$. Ainsi, $\mathbf{rg}(A) = 2 < 3$ donc A n'est pas inversible.

Méthode 2. On remarque que $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$ donc $AX = 0_{3,1}$ admet une solutions non nulle donc A n'est pas inversible.

Propriété 67

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ possède une unique solution si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Démonstration. La matrice des coefficients du système est $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Or, $\det(A) = ad - bc$ donc A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et ainsi le système possède une unique solution si et seulement si $ad - cd \neq 0$. □

Méthode 68

Ce qui précède, associé à l'algorithme de pivot de Gauss, donne un moyen non seulement de déterminer si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$ est inversible mais également de déterminer son inverse. Pour cela,

- on considère des paramètres y_1, y_2, ..., y_n dans K ;
- on considère le système (S) d'inconnues x_1, x_2, ..., x_n dont l'écriture matricielle est $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$;
- on résout le système (S) par la méthode du pivot de Gauss ;
- Si A est inversible, on obtient alors un nouveau système (S') qui exprime les inconnues x_1, x_2, ..., x_n en fonction des paramètres y_1, y_2, ..., y_n et, si l'écriture matricielle de (S') est $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors $B = A^{-1}$.

Exemple 69. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer A^{-1}.

Solution. Soit a, b et c trois réels. Considérons le système suivant d'inconnue (x, y, z) :

$$(S)\begin{cases} x - y + 2z = a \\ 2x + y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases}.$$

Alors,

$$(S) \iff \begin{cases} x - y + 2z = a & L_1 \\ 3y - 2z = b - 2a & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y - z = c - a & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 2z = a & L_1 \\ 3y - 2z = b - 2a & L_2 \\ 6y - 3z = 3c - 3a & L_3 \leftarrow 3L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - y + 2z = a & L_1 \\ 3y - 2z = b - 2a & L_2 \\ z = a - 2b + 3c & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 2(a - 2b + 3c) = a \\ 3y - 2(a - 2b + 3c) = b - 2a \\ z = a - 2b + 3c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - (-b + 2c) = -a + 4b - 6c \\ y = -b + 2c \\ z = a - 2b + 3c \end{cases} \iff \begin{cases} x = -a + 3b - 4c \\ y = -b + 2c \\ z = a - 2b + 3c \end{cases}$$

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.