♦ Chapitre 11. Études de fonctions

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$ et f est une fonction numérique.

I. — Limites

1) Comportement au voisinage de $+\infty$

Dans tout ce paragraphe, on suppose qu'il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $]c\,;+\infty[\subset \mathcal{D}_f$.

a) Fonction convergeant en $+\infty$

Théorème et définition 1

On dit que f **converge** en $+\infty$ (ou que $f(x)$ **converge** lorsque x tend vers $+\infty$) s'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. Dans ce cas, le réel ℓ est unique et s'appelle la **limite** de f en $+\infty$. On dit alors que f **converge** (ou **tend**) vers ℓ en $+\infty$ et on note alors $\ell = \lim\limits_{+\infty} f$ ou $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

.... FIGURE 1 ....

Exemple 2. La fonction inverse tend vers 0 en $+\infty$.

Définition 3

Si f converge vers un réel ℓ en $+\infty$ alors la droite Δ d'équation $y = \ell$ est appelée **asymptote** (horizontale) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

b) Fonction divergeant en $+\infty$

Définition 4

On dit qu'une fonction **diverge** en $+\infty$ si elle ne converge pas en $+\infty$.

Exemple 5. On admet que les fonctions $x \longmapsto \cos(x)$ et $x \longmapsto \sin(x)$ divergent en $+\infty$.

Définition 6

1. On dit que f **tend** (ou **diverge**) vers $+\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ **tend** (ou **diverge**) vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. On dit que f **tend** (ou **diverge**) vers $-\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ **tend** (ou **diverge**) vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

.... FIGURE 2 ....

Propriété 7. — Limites des fonctions usuelles en $+\infty$

Soit $c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ si } a < 1 \\ +\infty \text{ si } a > 1 \end{cases}$

2) Comportement au voisinage de $-\infty$

On peut reprendre l'étude précédente au voisinage de $-\infty$ pour une fonction f définie sur un ensemble contenant un intervalle de la forme $]-\infty\,;c[$ avec $c \in \mathbb{R}$. On s'intéresse alors au comportement de $f(x)$ quand x devient grand par valeurs négatives.

On a les mêmes notions de convergence vers un réel, de divergence, de divergence vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et d'asymptote (horizontale) au voisinage de $-\infty$.

Propriété 8. — Limites des fonctions usuelles en $-\infty$

Soit $c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} c = c$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty \text{ si } a < 1 \\ 0 \text{ si } a > 1 \end{cases}$

3) Comportement au voisinage d'un réel a

Dans tout ce paragraphe, a est un réel et f est une fonction définie au voisinage de a c'est-à-dire il existe deux réels b et c avec $b < a < c$ tels que $]b\,;a[\,\cup\,]a\,;c[$ soit inclus dans $\mathcal{D}_f$. Une telle fonction n'est donc pas nécessairement définie en a.

a) Fonction convergeant en a

Théorème et définition 9

On dit que f **converge** en a (ou que $f(x)$ **converge** lorsque x tend vers a) s'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ suffisamment proche de a. Dans ce cas, le réel ℓ est unique et s'appelle la **limite** de f en a. On dit alors que f **converge** (ou **tend**) vers ℓ en a et on note $\ell = \lim\limits_{a} f$ ou $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

.... Figure 3 ....

Propriété 10

Si f est une fonction usuelle (fonction puissance n ($n \in \mathbb{Z}$), racine carrée, exp, ln, $\exp_a$ ($a \in \mathbb{R}_+^*$), cos, sin, tan,...) et si $a \in \mathcal{D}_f$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemple 11.

1. Déterminer la limite de cos en $\frac{\pi}{3}$.
2. Déterminer la limite de la fonction exponentielle en 0.
3. Déterminer la limite de ln en e.

b) Fonction divergeant en a

Définition 12

1. On dit qu'une fonction **diverge** en a si elle ne converge pas en a.
2. On dit que f **tend** (ou **diverge**) vers $+\infty$ en a si, pour tout réel A, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ suffisamment proche de a. Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ **tend** (ou **diverge**) vers $+\infty$ lorsque x tend vers a et on note $\lim_a f = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.
3. On dit que f **tend** (ou **diverge**) vers $-\infty$ en a si, pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ suffisamment proche de a. Dans ce cas, on dit aussi que $f(x)$ **tend** (ou **diverge**) vers $-\infty$ lorsque x tend vers a et on note $\lim\limits_{a} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

.... Figure 4 ....

Exemple 13. Déterminer la limite de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

Définition 14

Si f diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ en a alors la droite Δ d'équation $x = a$ est appelée **asymptote** (verticale) à la courbe $\mathscr{C}_f$.

c) Limite à droite et limite à gauche

Exemple 15. On s'intéresse au comportement de la fonction inverse au voisinage de 0. Lorsque x devient proche de 0, $\frac{1}{x}$ devient très grand par valeurs positives ou négatives suivant que x est positif ou négatif. Ainsi, la fonction inverse diverge sans avoir de limite en 0.

Cependant, si on considère cette même fonction en restreignant l'ensemble de définition à $]0\,;+\infty[$ alors lorsque x tend vers 0 (en étant positif donc), la fonction ainsi restreinte tend vers $+\infty$. On dit alors que $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et $+\infty$ est appelée la limite à droite de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0. On note alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. De même, si on considère la fonction inverse restreinte à $]-\infty\,;0[$ alors lorsque x tend vers 0 (en étant négatif donc), la fonction ainsi restreinte tend vers $-\infty$. On dit alors que $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs inférieures et $-\infty$ est appelée la limite à gauche de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers 0. On note alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Définition 16

Si la restriction de f à l'intervalle $]a\,;c[$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) lorsque x tend vers a, on dit que f admet une **limite à droite** (ou par valeurs supérieures) en a et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\ell$.
De même, si la restriction de f à l'intervalle $]b\,;a[$ admet une limite ℓ (finie ou infinie) lorsque x tend vers a, on dit que f admet une **limite à gauche** (ou par valeurs inférieures) en a et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=\ell$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\ell$.

Remarque 17.

1. Si, dans la définition précédente, au moins l'une des deux limites est infinie, on dira encore que la droite d'équation $x=a$ est asymptote (verticale) à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Si f n'est pas définie en a et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=\ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$.

Propriété 18. — Limites des fonctions usuelles en 0

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Si n est pair, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$.
2. Si n est impair, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^n}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^n}=+\infty$.
3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$.

4) Limites et opérations algébriques

Dans tous les tableaux suivants, f et g sont deux fonctions et ℓ et ℓ' sont deux réels. Les règles suivantes sont valables lorsque x tend vers $+\infty$, vers $-\infty$ ou vers un réel a (éventuellement à droite ou à gauche).

1. **Limite d'une somme**

si $f(x)$ tend vers	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si $g(x)$ tend vers	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f(x)+g(x)$ tend vers						

Remarque. L'étude de $f(x)-g(x)$ se ramène à celle d'une somme en écrivant la différence sous la forme $f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$

2. **Limite d'un produit**

si $f(x)$ tend vers	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si $g(x)$ tend vers	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
alors $f(x)g(x)$ tend vers									

Remarque. L'étude de $kg(x)$ où k est un réel est un cas particulier de ce qui précède en prenant pour f la fonction constante égale à k.

3. Limite d'un quotient

- Cas où $g(x)$ ne tend pas vers 0

si $f(x)$ tend vers	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
et si $g(x)$ tend vers	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	∞
alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers							

- Cas où $g(x)$ tend vers 0

si $f(x)$ tend vers	$\ell > 0$	$+\infty$	$\ell > 0$	$+\infty$	$\ell < 0$	$-\infty$	$\ell < 0$	$-\infty$	0
et si $g(x)$ tend vers	0^+	0^+	0^-	0^-	0^+	0^+	0^-	0^-	0
alors $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers									

Exemple 19. Dans chaque cas, déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

1) $f(x) = \mathrm{e}^x + x^2 + 1,\ a = +\infty$ **2)** $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)+1},\ a = 0^+$ **3)** $f(x) = \dfrac{2x-7}{\sqrt{x}-1},\ a = 4$

4) $f(x) = \dfrac{4-\mathrm{e}^x}{(x-2)^2},\ a = 2$ **5)** $f(x) = \ln(x) + \dfrac{1}{x},\ a = +\infty$ **6)** $f(x) = \sin(x) + \dfrac{1}{x^2},\ a = 0$

7) $f(x) = (x+3)\mathrm{e}^x,\ a = +\infty$ **8)** $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-1},\ a = +\infty$ **9)** $f(x) = x^2 - x + 1,\ a = -\infty$

10) $f(x) = x^4 - x^2 + 1,\ a = +\infty$ **11)** $f(x) = x^4 - x^2 + 1,\ a = -\infty$ **12)** $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1},\ a = +\infty$

13) $f(x) = x^4 - x^2 + 1,\ a = 0$ **14)** $f(x) = \tan(x),\ a = \dfrac{\pi}{2}$ **15)** $f(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{x},\ a = 0^+$

Propriété 20. — Retour sur les fonctions homographiques

Soit f une fonction homographique dont la forme réduite est $f : x \longmapsto \alpha + \frac{\beta}{x-\gamma}$. Alors, la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \alpha$ et une asymptote verticale d'équation $x = \gamma$.

II. — Dérivation

Dans tout ce paragraphe, f une fonction numérique, $a \in \mathcal{D}_f$ et on suppose qu'il existe un intervalle I non réduit à un point tel que $a \in I \subset \mathcal{D}_f$.

1) Nombre dérivé

Définition 21

On dit que f est **dérivable en** a si le taux de variation $t(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est alors appelée le **nombre dérivé** de f en a et se note $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Exemple 22. Montrer que la fonction carré est dérivable en 3 et calculer son nombre dérivé.

Remarque 23.

1. Si a est une borne de $\mathcal{D}_f$, on ne considère que la limite à droite ou à gauche en a.

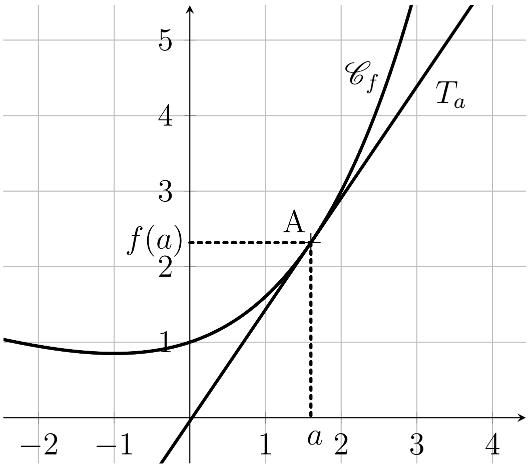
2. Si f est dérivable en a alors, par définition, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ce qui peux aussi s'écrire, en posant $x = a + h$, $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Ceci peut parfois servir pour calculer des limites.

Définition 24

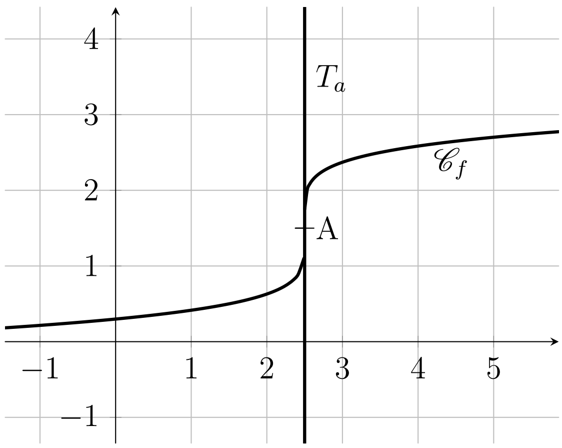
On suppose que a n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$ et on note A le point de coordonnées $(a\,; f(a))$

1. Si f est dérivable en a, on appelle **tangente** à $\mathscr{C}_f$ au point A la droite passant par A et dont le coefficient directeur $f'(a)$.

2. Si f n'est pas dérivable en a mais si son taux de variation en a diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque h tend 0, on dit que $\mathscr{C}_f$ possède une **tangente verticale** en A.



Tangente dans le cas où f est dérivable en a



Tangente verticale en A

Remarque 25. Si a est une borne de $\mathcal{D}_f$, on peut prolonger la définition précédente mais on parle plutôt, dans ce cas, de demi-tangente.

Exemple 26. Montrer que la courbe de la fonction racine carrée admet une demi-tangente verticale en O.

Propriété 27

Soit a n'est pas une borne de $\mathcal{D}_f$ et si f est dérivable en a alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ point d'abscisse a a pour équation réduite

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Exemple 28. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de la fonction carré au point d'abscisse 3.

2) Fonction dérivée

a) Définition

Définition 29

1. Si f est dérivable en tout point $a \in \mathcal{D}_f$, on dit que f est **dérivable** sur $\mathcal{D}_f$.
2. Si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, on définit la **fonction dérivée** (ou simplement la **dérivée**) de f comme la fonction qui à tout $a \in \mathcal{D}_f$ associe le nombre $f'(a)$. On note cette fonction f' ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

b) Dérivées des fonctions usuelles

On désigne par c, a, b et α des constantes réelles et par n un entier naturel non nul.

La dérivée de	est	sur
$x \longmapsto c$	$x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto ax+b$	$x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$	$x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto x^\alpha$	$x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$]0\,;+\infty[$
exp	exp	$\mathbb{R}$
ln	$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$
sin	cos	$\mathbb{R}$
cos	$-\sin$	$\mathbb{R}$
tan	$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Remarque 30. Toutes les fonctions de référence sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs SAUF :

1. la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en 0 car, pour tout $h>0$,
$$t(h) = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h\to 0^+]{} +\infty$$
Cela dit, la courbe de la fonction racine carrée admet une demi-tangente verticale en 0 ;
2. la fonction valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0 car son taux de variation en 0 a une limite à gauche égale à -1 et une limite à droite égale à 1.

3) Dérivée et opérations algébriques

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même ensemble E et si k est un réel alors les fonctions $u+v$, ku, uv, $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs et

$(u+v)' = u' + v'$	$(ku)' = ku'$	$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple 31. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x + x^2 + 1}{2} \qquad g : x \longmapsto x\ln(x) - x \qquad h : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} \qquad k : x \longmapsto \tan(x).$$

4) Dérivée d'une fonction composée

Théorème 32. — (admis)

Soit v une fonction définie sur un intervalle J et u une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$. Si u est dérivable sur I et si v est dérivable sur J alors la composée $v \circ u$ est dérivable sur I et

$$(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$$

Exemple 33. Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$, $g := x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$, $h : x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $k : x \longmapsto \dfrac{1}{(3+\cos(x))^5}$ et $\ell : x \longmapsto \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$.

Remarque 34. Soit I un intervalle centré en 0 et f une fonction définie sur I. Alors, la fonction g définie sur I par $g(x) = f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in I$, $g'(x) = -f'(-x)$.

Par exemple, la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est la fonction $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x}$.

5) Liens entre dérivée et variations

Théorème 35. — (admis)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un <u>intervalle</u> I.

1. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$ et si $f'(x)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I alors f est strictement croissante sur I.
2. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$ et si $f'(x)$ ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Exemple 36. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 37. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis construire son tableau de variation (avec les limites).
3. Déterminer une équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

6) Dérivée seconde

Définition 38

Si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et si f' est elle-même dérivable sur $\mathcal{D}_f$, on dit que f est **deux fois dérivable** sur $\mathcal{D}_f$ et la dérivée de f' est appelée la **dérivée seconde** de f. On la note f'' (lire « f seconde »).

Exemple 39. Déterminer les dérivées secondes des fonctions sin, cos et exp.

7) Dérivation des fonctions de deux variables

Définition 40

Une **fonction réelle de deux variables** est une application définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 41.

- La fonction « aire du rectangle » peut être écrite comme une fonction qui dépend de la longueur L et de la largeur ℓ du rectangle : $A : (L, \ell) \longmapsto L \times \ell$.
- La fonction $f : (x, y) \longmapsto x^2 + 4y$ est une fonction des deux variables x et y.

Pour simplifier, nous nous limiterons au cas où l'ensemble de définition D est un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire le produit cartésien de deux intervalles ouverts I et J. C'est le cas dans les exemples précédents : $(L, \ell) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ soit $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 42

Soit f définie sur un pavé ouvert $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$. On suppose que, pour tout $x \in I$ et tout $y \in J$, les applications partielles

$$f_y : x \longmapsto f(x, y) \qquad \text{et} \qquad f_x : y \longmapsto f(x, y)$$

sont dérivables respectivement sur I et sur J. Alors, on définit les dérivées partielles de f de la manière suivante :

- la **dérivée partielle de f par rapport à** x est la fonction qui à $(x\,;y) \in I \times J$ associe le nombre dérivé de f_y en x ; on la note $\frac{\partial f}{\partial x}$;
- la **dérivée partielle de f par rapport à** y est la fonction qui à $(x\,;y) \in I \times J$ associe le nombre dérivé de f_x en y ; on la note $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Remarque 43.

1. Ainsi, par définition, pour tout $(x\,;y) \in I \times J$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_y'(x) = \frac{\mathrm{d}f_y}{\mathrm{d}x}(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_x'(y) = \frac{\mathrm{d}f_x}{\mathrm{d}y}(y).$$

2. Concrètement, pour dériver une fonction de deux variables par rapport à une des deux variables, on considère l'autre comme une constante.

Exemple 44. Calculer les dérivées partielles des fonctions de l'exemple 41.

III. — Primitives

1) Définition

Définition 45

Soit f une fonction numérique et I un intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Exemple 46. Déterminer une primitive de exp sur $\mathbb{R}$, une primitive de $f : x \longmapsto x^3 + 2x^2 - 5$ sur $\mathbb{R}$ et une primitive de $g : t \longmapsto \frac{1}{t}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Propriété 47

Soit f une fonction définie sur un <u>intervalle</u> I. On suppose que f admet une primitive F sur I. Alors,

1. f admet une infinité de primitives sur I : ce sont toutes les fonctions de la forme $F + c$ où c est une constante réelle ;
2. si x_0 et y_0 sont deux réels tels que $x_0 \in I$, il existe une et une seule primitive G de f sur I telle sur $G(x_0) = y_0$.

Exemple 48. Déterminer la primitive de sin sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

2) Primitives et opérations

Propriété 49

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. On suppose que f admet une primitive F sur I et que g admet une primitive G sur I. Alors,

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I ;
2. pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I.

Exemple 50. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto -5x^2 + 3\mathrm{e}^x$.

⚠ Il N'EXISTE PAS FORMULE permettant de déterminer une primitive de $f \times g$ ou de $\dfrac{f}{g}$ à partir de F et G.

3) Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau suivant, a, k et α sont des réels et $n \in \mathbb{N}^*$.

Les primitives de	sont les fonctions	sur
$x \longmapsto a$	$ax + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \geqslant 2)$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$x \longmapsto \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(\lvert x\rvert) + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$x \longmapsto \mathrm{e}^x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin(x)$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(x)$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$

4) Formes particulières dont on sait déterminer les primitives

Dans le tableau suivant, u désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, a, b, c et α sont des réels tels que $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Les primitives de	sont les fonctions	sur tout intervalle J
$u'u^n$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	inclus dans I
$\dfrac{u'}{u^n}$ $(n \geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	inclus dans I et sur lequel u ne s'annule pas
$u'u^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + c$	inclus dans I et sur lequel u est strictement positive
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert) + c$	inclus dans I et sur lequel u ne s'annule pas
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	inclus dans I et sur lequel u est strictement positive
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + c$	inclus dans I
$u'\cos(u)$	$\sin(u) + c$	inclus dans I
$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + c$	inclus dans I

Exemple 51. Déterminer une primitive de

$f : x \longmapsto (2x+3)(x^2+3x)^5$ sur $\mathbb{R}$ $\quad g : x \longmapsto \mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad h : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$

$k : x \longmapsto \cos(3x+1)$ sur $\mathbb{R}$ $\quad \ell : x \longmapsto \dfrac{x^3}{(x^4-1)^5}$ sur $]1\,;+\infty[$ $\quad m : x \longmapsto \dfrac{1}{x-3}$ sur $]-\infty\,;3[$

IV. — Exercices

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{2023}$ 3) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^{2023}$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2+5x-3$

5) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2-x+1$ 6) $\lim\limits_{x\to -\infty} 3x^4-x+2$ 7) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3-3x^2+1$ 8) $\lim\limits_{x\to +\infty} x+\dfrac{1}{1+x}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} 1-\dfrac{1}{x^2}$ 10) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ 11) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sqrt{x}$ 12) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{(x-2)^2}$

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\mathrm{e}^x$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\ln(x)$ 3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{-3x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x^3)$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$ 7) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln(x)}$ 9) $\lim\limits_{x\to -\infty} x-\mathrm{e}^{-x}$ 10) $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$

Exercice 3. Dans chaque cas, calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers a et donner, lorsque cela est possible, une interprétation graphique de cette limite.

1) $f(x)=x+\mathrm{e}^x\ ;\ a=+\infty$ 2) $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}\ ;\ a=+\infty$ 3) $f(x)=1-\mathrm{e}^{-x}\ ;\ a=+\infty$

4) $f(x)=\ln(x)+x\ ;\ a=0^+$ 5) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\ ;\ a=-\infty$ 6) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\ ;\ a=0^+$

7) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\ ;\ a=+\infty$ 8) $f(x)=x^2-x\ ;\ a=-\infty$ 9) $f(x)=\dfrac{1}{x\mathrm{e}^x}\ ;\ a=+\infty$

10) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\ ;\ a=+\infty$ 11) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\ ;\ a=-\infty$ 12) $f(x)=\ln(x)-\mathrm{e}^x\ ;\ a=0^+$

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;3[\,\cup\,]3\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{3-x}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$, de $-\infty$ et de 3.

2. Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe de f puis retrouver ce résultat déterminant la forme réduite de f.

Exercice 5. On considère une fonction f dont le tableau de variation est le suivant.

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	3	↘	2

1. Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f. (On fera également apparaître les éventuelles asymptotes.)

2. Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

a. Quel est l'ensemble de définition de g ?

b. Déterminer, en justifiant, les limites de g aux bornes de son ensemble de définition (éventuellement à droite et à gauche).

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On ne demande pas de justifier la dérivabilité de f sur I.

1. $f(x) = -3x + 2$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + x^2 - 2x$, $I = R$.
3. $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$, $I =]0\,;+\infty[$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{1-4x}$, $I = \left]-\infty\,;\frac{1}{4}\right[$.
5. $f(x) = \sqrt{2x+4}$, $I =]-2\,;+\infty[$.

Exercice 7. Dans chacun des cas, calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'ensemble précisé. On ne demande pas justifier la dérivabilité. Dans 7), a, b, c et d sont des réels tels que $c \neq 0$.

1) $f(x) = x^{2023}$; $\mathbb{R}$	3) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$; $\mathbb{R}$	3) $f(x) = \dfrac{x^4}{4}$; $\mathbb{R}$
4) $f(x) = \ln(x) + 2\sqrt{x}$; $\mathbb{R}_+^*$	5) $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$; $\mathbb{R}$	6) $f(x) = \dfrac{3x+1}{5x-2}$; $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}$
7) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$	8) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$; $\mathbb{R}_+^*$	9) $f(x) = \dfrac{1}{3x^3}$; $\mathbb{R}^*$
10) $f(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{1+x}$; $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$	11) $f(x) = \mathrm{e}^{-5x}$; $\mathbb{R}$	12) $f(x) = \sin(5x+1)$; $\mathbb{R}$
12) $f(x) = \ln(3x+6)$; $]-2\,;+\infty[$	14) $f(x) = (\sin(x))^2$; $\mathbb{R}$	15) $f(x) = (\cos^2(x)+1)^3$; $\mathbb{R}$

Exercice 8. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^3 + 3x^2 - 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer la dérivée de f puis dresser le tableau de variations de f.
3. La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$. Admet-elle des extremums locaux ?

Exercice 9. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+8}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout réel x,
$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 8}{(x^2+8)^2}.$$
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Quels sont les extremums locaux de f sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
5. Étudier les positions relatives de T et de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 10. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{\mathrm{e}^x}$.

1. Pourquoi peut-on affirmer que f est définie sur $\mathbb{R}$?
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2\mathrm{e}^{2x}+1}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x - 12$.

a. Étudier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $g(x)$ en fonction de x et présenter les résultats sous forme d'un tableau.

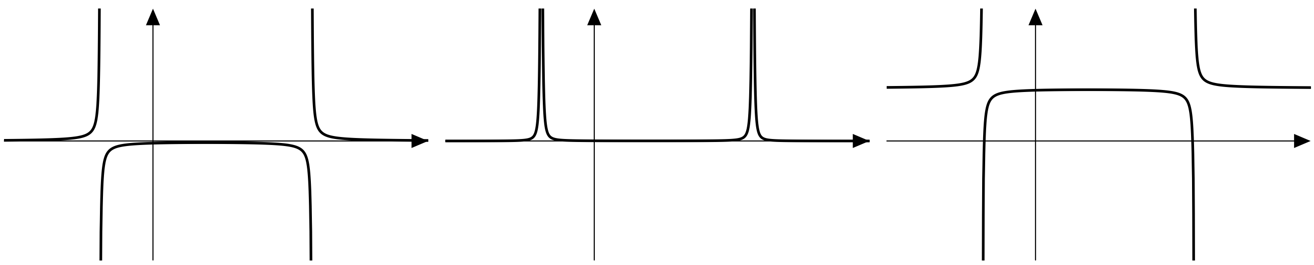
b. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de h.

b. Déterminer les limites de h (éventuellement à droite et à gauche) aux bornes de cet ensemble de définition puis donner une interprétation graphique de ces limites.

c. On a représenté ci-dessous l'allure de trois courbes. L'une d'entre elles peut-elle correspondre à la courbe de h ? On justifiera sa réponse en utilisant uniquement les résultats de la question précédente.



Courbe 1 Courbe 2 Courbe 3

3. On considère la fonction f définie sur $D =]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-4x+20}{x-2}$.

a. Déterminer les limites de f aux bornes de D.

b. Démontrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-2)^2}$ où g est la fonction définie dans la question **1.**.

c. En déduire, pour tout $x \in D$, le signe de $f'(x)$ en fonction de x.

d. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D.

Exercice 14. Soit la fonction $f : x \longmapsto x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f' et f''.

2. a. Étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f'.

3. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

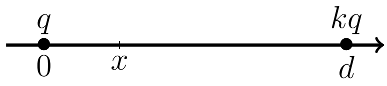
Exercice 15. Le potentiel électrostatique généré par une charge électrique q à une distance r de la charge est donnée par

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

où ε_0 est une constante.

Deux charges positives q et kq (avec $k \in]1\,;+\infty[$) sont à une distance d l'une de l'autre, et on admet que le potentiel qu'elles engendrent ensemble est la somme des potentiels engendrés par chaque charge.

1. Dans le repère indiqué sur la figure, la charge q se trouve en $x = 0$ et la charge kq en $x = d$. Pour tout $x \in]0\,;d[$, exprimer le potentiel engendré par les deux charges au point d'abscisse x, en fonction de x.



2. Si l'on place une charge positive sur l'axe, elle se déplace vers l'abscisse $x_{\min}$ où le potentiel est minimal. Montrer que $x_{\min} = \dfrac{d}{\sqrt{k}+1}$.

3. Quelle est la limite de $x_{\min}$ lorsque k tend vers 1 ?

4. Même question lorsque k tend vers $+\infty$.

Exercice 16. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$.

1) $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^3$ 2) $f : (x, y) \longmapsto 3x^2y^3$ 3) $f : (x, y) \longmapsto x\mathrm{e}^y + y\sin(\pi x)$

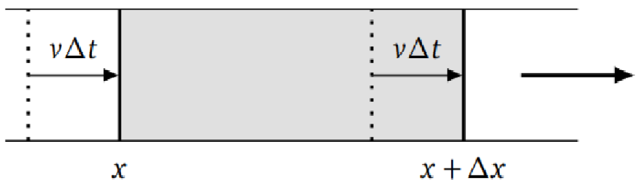
4) $f : (r, \theta) \longmapsto r\cos(\theta)$ 5) $f : (x, y) \longmapsto 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 1$ 6) $f : (x, y) \longmapsto 5xe^{3y}$

Exercice 17. On considère un fluide qui se déplace dans un tube, et on note $u(x, t)$ sa densité au point d'abscisse x à l'instant t. On suppose que les molécules se déplacent vers la droite avec une vitesse constante v. Dans une petite région $[x, x + \Delta x]$, à un instant t donné, on considère que la densité est constante, égale à $u(x, t)$. Le nombre de molécules à l'instant t dans cette région est $N(t) = u(x, t)\Delta x$ et sa variation sur un petit intervalle de temps est donc

$$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t) = u(x, t + \Delta t)\Delta x - u(x, t)\Delta x \tag{1}$$

Cette variation est aussi égale au nombre de particules qui sont entrées dans la région $[x, x + \Delta x]$ moins le nombre de particules qui en sont sorties

$$\Delta N = u(x, t)v\Delta t - u(x + \Delta x, t)v\Delta t. \tag{2}$$



1. En utilisant le fait que les expressions (1) et (2) de ΔN sont égales, en divisant par Δx et Δt puis en prenant les limites pour Δx et Δt tendant vers 0, obtenir l'équation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x}$$

2. On considère les fonctions u_1 et u_2 définies par

$$u_1(x, t) = \sin(x - vt) \qquad \text{et } u_2(x, t) = \mathrm{e}^{-(x-vt)^2}.$$

Vérifier que u_1 et u_2 sont des solutions de l'équation de transport.

Exercice 18. En 1834, le physicien français Emile Clapeyron énonce la loi des gaz parfaits, qui lie entre elles les quatre variables d'état que sont la pression P, le volume V, la température T et la quantité de matière n (nombre de moles) d'un système thermodynamique constitué de gaz parfait : $PV = nRT$ où R est la constante des gaz parfaits, valant 8,314462 J/(mole · K). On se place ici dans le cas où la quantité de gaz n est fixée.

1. Exprimer la pression du gaz en fonction de V, n, R et T.
2. Calculer les dérivées partielles de la fonction obtenue par rapport à V et à T.

Exercice 19. On a étudié la pénétration du froid dans le sol et trouvé cette formule reliant la température T à l'instant t (exprimé en heures) et la profondeur x (en m) :

$$T(x,t) = T_0 \mathrm{e}^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x)$$

où T_0, ω et λ sont des constantes.

Montrer que T satisfait à l'équation de la chaleur : $\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ désignant la dérivée partielle par rapport à x de $\frac{\partial T}{\partial x}$. La constante k est à exprimer en fonction des constantes de l'énoncé.

Exercice 20. Prouver que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f : x \longmapsto \tan^2(x)$ et $\mathrm{F} : x \longmapsto \tan(x) - x$ avec $\mathrm{I} = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.
2. $f : x \longmapsto \cos(x) - x\sin(x)$ et $\mathrm{F} : x \longmapsto x\cos(x)$ avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
3. $f : x \longmapsto \dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$ et $\mathrm{F} : x \longmapsto \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$ avec $\mathrm{I} =]0 ; +\infty[$.
4. $f : x \longmapsto \dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ et $\mathrm{F} : x \longmapsto \dfrac{-1}{x(x-1)}$ avec $\mathrm{I} =]0 ; 1[$.

Exercice 21. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I. (On donnera la réponse sans justification.)

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $I =]0 ; +\infty[$

2) $f(x) = \cos x$; $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $I =]0 ; +\infty[$

4) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$; $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sin(3x+1)$; $I = \mathbb{R}$

6) $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$; $I = \mathbb{R}$

7) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x + 1$; $I = \mathbb{R}$

8) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+3)^4}$; $I = \mathbb{R}$

9) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}$; $I = \mathbb{R}_+^*$

10) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $I =]0 ; +\infty[$

11) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{3}$; $I = \mathbb{R}$

12) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $I =]0 ; +\infty[$

13) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$; $I =]0 ; +\infty[$

14) $f(x) = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 1$; $I =]0 ; +\infty[$

15) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x}} - 1$; $I =]-\infty ; 1[$

16) $f(x) = \dfrac{(x-1)^5}{3}$; $I = \mathbb{R}$

17) $f(x) = (2x-1)^3$; $I = \mathbb{R}$

18) $f(x) = 2(3x-1)^5$; $I = \mathbb{R}$

19) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 3}$; $I = \mathbb{R}$

20) $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3+8)^3}$; $I =]-2 ; +\infty[$

21) $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x)$; $I = \mathbb{R}$

22) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; $I =]-1 ; 1[$