♦ Chapitre 10. Nombres complexes

I. — Définitions

Théorème 1. — Admis

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des **nombres complexes**, qui possède les propriétés suivantes :

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$. Autrement dit, tout nombre réel est un nombre complexe.
2. Les opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication et division) connues sur $\mathbb{R}$ se prolongent à l'ensemble $\mathbb{C}$ avec les mêmes règles opératoires.
3. L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
4. Tout nombre complexe z peut s'écrire de manière unique sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$ où a et b sont des réels. Cette écriture s'appelle la **forme algébrique** de z.

Définition 2

Soit z un nombre complexe. On écrit $z = a + \mathrm{i}b$ sous forme algébrique. Alors,

1. Le nombre réel a est appelé la **partie réelle** de z. On la note $\mathrm{Re}(z)$.
2. Le nombre réel b est appelé la **partie imaginaire** de z. On la note $\mathrm{Im}(z)$.

⚠ Si z est un nombre complexe alors, par définition, la partie imaginaire de z est un nombre réel.

Exemple 3. Déterminer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 - 4\mathrm{i} \qquad z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_3 = \frac{1}{2} \qquad z_4 = -0{,}7\mathrm{i}.$$

Solution.

- $\mathrm{Re}(z_1) = 3$ et $\mathrm{Im}(z_1) = -4$;
- $\mathrm{Re}(z_2) = -1$ et $\mathrm{Im}(z_2) = \sqrt{3}$;
- $\mathrm{Re}(z_3) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{Im}(z_3) = 0$;
- $\mathrm{Re}(z_1) = 0$ et $\mathrm{Im}(z_4) = -0{,}7$.

Définition 4

Soit z un nombre complexe. On dit que z est **imaginaire pur** si $\mathrm{Re}(z) = 0$. L'ensemble des imaginaires purs se note $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

Exemple 5. Ainsi, $\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, $-5\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ mais $1 + 2\mathrm{i} \notin \mathrm{i}\mathbb{R}$.

L'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique entraîne immédiatement les propriétés suivantes.

Propriété 6

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. En particulier, un nombre complexe z est nul si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$.

Propriété 7

Soit z un nombre complexe. On écrit $z = a + \mathrm{i}b$ sous forme algébrique. Alors,

1. z est réel si et seulement si $b = 0$.
2. Le nombre 0 est le seul nombre complexe qui est à la fois réel et imaginaire pur.

II. — Calculs dans $\mathbb{C}$

1) Addition et soustraction

Si $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ sont deux complexes écrits sous formes algébriques alors

$$z + z' = (a + \mathrm{i}b) + (a' + \mathrm{i}b') = (a + a') + \mathrm{i}(b + b').$$

On a donc $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

On procède de même pour la soustraction :

$$z - z' = (a + \mathrm{i}b) - (a' + \mathrm{i}b') = (a - a') + \mathrm{i}(b - b').$$

On a donc $\mathrm{Re}(z - z') = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z - z') = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z')$.

2) Multiplication

Pour la multiplication, on procède par distributivité comme dans $\mathbb{R}$ en utilisant le fait que $\mathrm{i}^2 = -1$. Ainsi, si $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$ sont deux complexes écrits sous formes algébriques alors

$$zz' = (a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b') = aa' - bb' + \mathrm{i}(ab' + a'b).$$

Les propriétés de distributivité étant les mêmes dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$, on dispose dans $\mathbb{C}$ des mêmes identités remarquables : pour tous complexes z et z',

$$(z + z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2 \qquad (z - z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2 \qquad (z - z')(z + z') = z^2 - z'^2.$$

En particulier, on peut remarquer que, pour tous réels a et b,

$$(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 - \mathrm{i}^2 b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2.$$

3) Inverse et quotient

Comme pour les réels, tout nombre complexe non nul possède un unique inverse i.e. pour tout nombre complexe $z \neq 0$, il existe un unique nombre complexe z' tel que $z \times z' = 1$. On note cet inverse z^{-1} ou $\frac{1}{z}$.

Pour déterminer cet inverse, on chasse les i du dénominateur en multipliant $a+\mathrm{i}b$ par $a-\mathrm{i}b$ de sorte à faire apparaître une identité remarquable. Ainsi, si $z=a+\mathrm{i}b$ est un complexe non nul écrit sous forme algébrique alors

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+\mathrm{i}b}=\frac{a-\mathrm{i}b}{(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)}=\frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}+\mathrm{i}\frac{-b}{a^2+b^2}.$$

De même, si z et z' sont deux complexes tels que $z'\neq 0$, on peut définir le quotient $\frac{z}{z'}$ par $z\times\frac{1}{z'}$. Pour déterminer la forme algébrique d'un quotient, on procède alors comme pour l'inverse : si $z=a+\mathrm{i}b$ et $z'=a'+\mathrm{i}b'$ sont deux complexes écrits sous formes algébriques tels que $z'\neq 0$ alors

$$\frac{z}{z'}=\frac{a+\mathrm{i}b}{a'+\mathrm{i}b'}=\frac{(a+\mathrm{i}b)(a'-\mathrm{i}b')}{(a'+\mathrm{i}b')(a'-\mathrm{i}b')}=\frac{aa'-\mathrm{i}ab'+\mathrm{i}ba'-\mathrm{i}^2bb'}{a'^2+b'^2}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\mathrm{i}\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}.$$

Le produit, l'inverse et le quotient ne sont pas compatibles avec la partie réelle et la partie imaginaire i.e., en général, $\mathrm{Re}(zz')\neq\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(zz')\neq\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')$ et de même pour l'inverse et le quotient.

4) Puissances entières

Soit z un nombre complexe et n un entier relatif. Si $n>0$, on pose $z^n=\underbrace{z\times z\times\cdots\times z}_{n\text{ fois}}$, si $n=0$, on pose $z^n=1$ et, si $n<0$ et $z\neq 0$, on pose $z^n=\dfrac{1}{z^{-n}}=\dfrac{1}{\underbrace{z\times z\times\cdots\times z}_{-n\text{ fois}}}$.

Exemple 8. Soit $z=1+2\mathrm{i}$ et $z'=2-\mathrm{i}$. Calculer $z+z'$, $z-z'$, zz', $\frac{1}{z}$ et $\frac{z}{z'}$.

Solution.

- $z+z'=1+2\mathrm{i}+2-\mathrm{i}=3+\mathrm{i}$
- $z-z'=1+2\mathrm{i}-(2-\mathrm{i})=-1+3\mathrm{i}$
- $zz'=(1+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=2-\mathrm{i}+4\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=2+3\mathrm{i}+2=4+3\mathrm{i}$
- $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{1^2+2^2}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$
- $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{(1+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\dfrac{2+\mathrm{i}+4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{2^2+1^2}=\dfrac{2+5\mathrm{i}-2}{5}=\mathrm{i}$

Remarque 9. Toutes les propriétés algébriques vues dans $\mathbb{R}$ comme les identités remarquables, la formule du binôme de Newton, les calculs de sommes restent vraies dans $\mathbb{C}$. De même, les principes de résolution des équations restent les mêmes dans $\mathbb{C}$.

5) Équations

Exemple 10. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z+2=(3+2\mathrm{i})z-1+\mathrm{i}$ d'inconnue z.

Solution. Pour tout complexe z,

$$\begin{aligned}(E)&\iff z-(3+2\mathrm{i})z=-1+\mathrm{i}-2\iff(1-3-2\mathrm{i})z=-3+\mathrm{i}\\&\iff(-2-2\mathrm{i})z=-3+\mathrm{i}\iff z=\frac{-3+\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}\iff z=\frac{(-3+\mathrm{i})(-2+2\mathrm{i})}{(-2)^2+(-2)^2}\\&\iff z=\frac{6-6\mathrm{i}-2\mathrm{i}-2}{4+4}\iff z=\frac{1}{2}-\mathrm{i}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ est $\left\{\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\right\}$.

Propriété 11

Un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Démonstration. Considérons, pour tout entier $n \geqslant 2$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « pour tous nombres complexes z_1, z_2, ..., z_n, si $z_1 z_2 \cdots z_n = 0$ alors il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $z_i = 0$ ».

Initialisation. Soit z_1 et z_2 deux complexes tels que $z_1 z_2 = 0$. Supposons que $z_1 \neq 0$. Alors, z_1 admet un inverse et $\dfrac{1}{z_1}(z_1 z_2) = \dfrac{1}{z_1} \times 0$ i.e. $z_2 = 0$. Ainsi, $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$.

Hérédité. Soit un entier $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Considérons $n+1$ nombres complexes z_1, z_2, ..., z_n, z_{n+1} tels que $z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1} = 0$. Alors, d'après le cas $n = 2$, $z_1 z_2 \cdots z_n = 0$ ou $z_{n+1} = 0$. De plus, si $z_1 z_2 \cdots z_n = 0$, comme $\mathcal{P}(n)$ est vraie, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $z_i = 0$. Ainsi, il existe $i \in [\![1, n+1]\!]$ tel que $z_i = 0$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$, ce qui revient à dire que si un produit de nombres complexes est nul alors l'un des facteurs est nul. □

Exemple 12.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F) : $(\mathrm{i}z - 1)(z - \mathrm{i}) = 0$ d'inconnue z.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (G) : $z^2 + 1 = 0$ d'inconnue z.

Solution.

1. Pour tout nombre complexe z,

$$(F) \iff \mathrm{i}z - 1 = 0 \text{ ou } z - \mathrm{i} = 0 \iff \mathrm{i}z = 1 \text{ ou } z = \mathrm{i} \iff z = \frac{1}{\mathrm{i}} \text{ ou } z = \mathrm{i}$$
$$\iff z = \frac{-\mathrm{i}}{1^2} \text{ ou } z = \mathrm{i} \iff z = -\mathrm{i} \text{ ou } z = \mathrm{i}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) dans $\mathbb{C}$ est $\{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$.

2. Pour tout nombre complexe z,

$$(G) \iff z^2 - (-1) = 0 \iff z^2 - \mathrm{i}^2 = 0 \iff (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i}) = 0$$
$$\iff z - \mathrm{i} = 0 \text{ ou } z + \mathrm{i} = 0 \iff z = \mathrm{i} \text{ ou } z = -\mathrm{i}$$

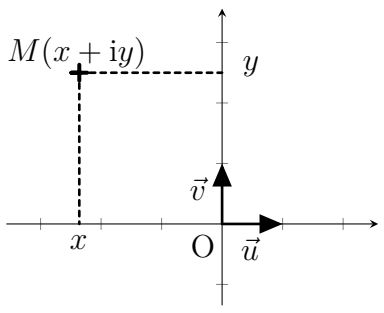
Ainsi, l'ensemble des solutions de (F) dans $\mathbb{C}$ est $\{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$.

III. — Le plan complexe

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Définition 13

Soit M un point du plan de coordonnées cartésiennes $(x\,;y)$. On dit que le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est l'**affixe** du point M et on le note z_M.
Inversement, si $z = x + \mathrm{i}y$ est un complexe écrit sous forme algébrique, on dit que le point M de coordonnées $(x\,;y)$ est l'**image** de z dans le plan et on note alors $M(z)$.

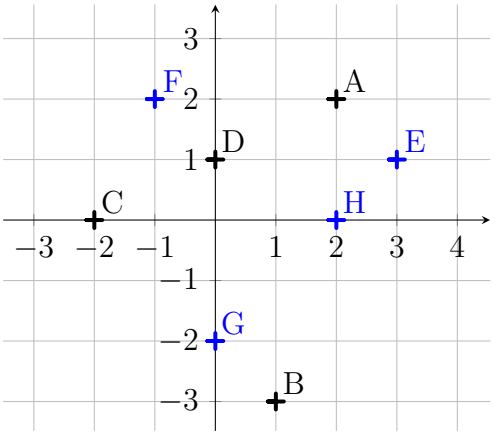


Remarque 14. On établit ainsi une bijection entre l'ensemble des points du plan et l'ensemble des nombres complexes. Une fois cette bijection établie, le plan est appelé plan complexe ou plan d'Argand-Cauchy.

L'axe des abscisses est alors appelé l'axe réel et l'axe des ordonnées est appelé l'axe des imaginaires (purs).

Exemple 15. Sur le graphique ci-contre, lire les affixes des points A, B, C et D et placer les points E$(3+\mathrm{i})$, F$(-1+2\mathrm{i})$, G$(-2\mathrm{i})$ et H(3).

Solution. A$(2+2\mathrm{i})$ B$(1-3\mathrm{i})$, C(-2) et D(i).



Définition 16

Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur du plan de coordonnées $(x\,;y)$. Alors, le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est appelé l'**affixe** de $\overrightarrow{w}$ et on la note $z_{\overrightarrow{w}}$.

IV. — Conjugaison

Définition 17

Soit z un nombre complexe. Si z s'écrit sous forme algébrique $z = a + \mathrm{i}b$ alors le nombre complexe $a - \mathrm{i}b$ est appelé le **nombre complexe conjugué** de z et on le note $\overline{z}$ (ce qui se lit « z barre »).

Exemple 18. Déterminer les conjugués des complexes suivants :

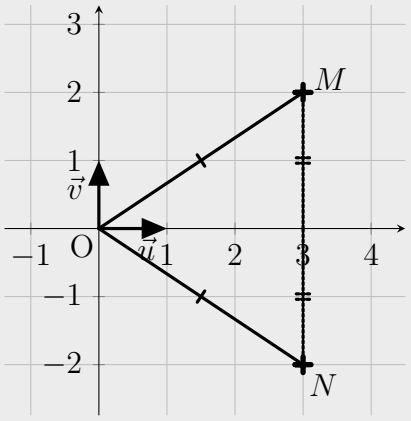
$$z_1 = 1 + 3\mathrm{i} \qquad z_2 = 3\mathrm{i} - 2 \qquad z_3 = -4 \qquad z_4 = \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_5 = 3 + \mathrm{i}(2+\mathrm{i})$$

Solution.

- $\overline{z_1} = \overline{1+3\mathrm{i}} = 1 - 3\mathrm{i}$
- $\overline{z_2} = \overline{-2+3\mathrm{i}} = -2 - 3\mathrm{i}$
- $\overline{z_3} = \overline{-4} = -4$
- $\overline{z_4} = \overline{\mathrm{i}\sqrt{3}} = -\mathrm{i}\sqrt{3}$
- $z_1 = 3 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 3 + 2\mathrm{i} - 1 = 2 + 2\mathrm{i}$ donc $\overline{z_4} = \overline{2+2\mathrm{i}} = 2 - 2\mathrm{i}$.

Propriété 19

Soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z. Alors, $\overline{z}$ est l'affixe du symétrique N de M par rapport à l'axe des réels.
En particulier, l'axe des réels est la médiatrice du segment $[MN]$ et $\mathrm{O}M = \mathrm{O}N$.



Démonstration. Écrivons z sous forme algébrique $z = a + \mathrm{i}b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^Z$. Alors, M est le point de coordonnées (a, b). De plus, $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$ donc le point N d'affixe $\overline{z}$ est le point de coordonnées $(a, -b)$. Dès lors, N est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses (i.e. l'axe des réels). □

Propriété 20

Soit z et z' deux complexes. Alors,

1. $z = z' \iff \overline{z} = \overline{z'}$ **2.** $\overline{\overline{z}} = z$ **3.** $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$
4. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ **5.** $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$ **6.** $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. Écrivons z et z' sous forme algébrique : $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$.

1. Par unicité de la forme algébrique,

$$z = z' \iff a + \mathrm{i}b = a' + \mathrm{i}b' \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \iff \begin{cases} a = a' \\ -b = -b' \end{cases}$$
$$\iff a - \mathrm{i}b = a' - \mathrm{i}b' \iff \overline{z} = \overline{z'}.$$

2. $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a + \mathrm{i}b}} = \overline{a - \mathrm{i}b} = \overline{a + (-b)\mathrm{i}} = a - (-b)\mathrm{i} = a + \mathrm{i}b = z$.

3. $z + \overline{z} = a + \mathrm{i}b + a - \mathrm{i}b = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$
$z - \overline{z} = a + \mathrm{i}b - (a - \mathrm{i}b) = a + \mathrm{i}b - a + \mathrm{i}b = 2\mathrm{i}b = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$.

4. $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(Z) = 0 \iff z - \overline{z} = 0 \iff z = \overline{z}$.

5. $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff 2\,\mathrm{Re}(Z) = 0 \iff z + \overline{z} = 0 \iff z = -\overline{z}$.

6. $z\overline{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$ donc, comme a et b sont deux réels, $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$.

□

Propriété 21. — Compatibilité avec les opérations

Soit z et z' deux complexes. Alors,

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
2. $\overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z'}$.
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$. En particulier, si $k \in \mathbb{R}$, $\overline{kz} = k\overline{z}$.
4. Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ (en supposant $z \neq 0$ si $n < 0$).

Démonstration. Écrivons z et z' sous forme algébrique : $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + b'\mathrm{i}$.

1. $\overline{z+z'} = \overline{a + \mathrm{i}b + a' + \mathrm{i}b'} = \overline{(a+a') + \mathrm{i}(b+b')} = (a+a') - (b+b')\mathrm{i} = (a - \mathrm{i}b) + (a' - \mathrm{i}b') = \overline{z} + \overline{z'}$.
2. $\overline{z-z'} = \overline{a + \mathrm{i}b - (a' + \mathrm{i}b')} = \overline{(a-a') + \mathrm{i}(b-b')} = (a-a') - (b-b')\mathrm{i} = (a - \mathrm{i}b) - (a' - \mathrm{i}b') = \overline{z} - \overline{z'}$.
3. $zz' = (a+\mathrm{i}b)(a'+\mathrm{i}b') = aa' + \mathrm{i}ab' + \mathrm{i}ba' + \mathrm{i}^2bb' = aa' - bb' + \mathrm{i}(ab' + a'b)$ donc
$$\begin{aligned}\overline{zz'} &= \overline{aa' - bb' + \mathrm{i}(ab'+a'b)} = aa' - bb' - \mathrm{i}(ab'+a'b) = aa' + \mathrm{i}^2bb' - \mathrm{i}ab' - \mathrm{i}a'b \\ &= aa' - \mathrm{i}ab' - \mathrm{i}(a'b - \mathrm{i}bb') = a(a' - \mathrm{i}b') - \mathrm{i}b(a' - \mathrm{i}b') = (a - \mathrm{i}b)(a' - \mathrm{i}b') \\ &= \overline{z}\,\overline{z'}\end{aligned}$$
Si k est réel alors $\overline{k} = k$ donc $\overline{kz} = \overline{k}\,\overline{z} = k\overline{z}$.
4. Supposons $z' \neq 0$. Alors, comme $z' \times \dfrac{1}{z'} = 1$, $\overline{z' \times \dfrac{1}{z'}} = \overline{1} = 1$ donc, grâce au résultat du point **3.**, $\overline{z'} \times \overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = 1$ et, par suite, $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$.
   En utilisant à nouveau le résultat du point **3.**, on en déduit que
$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$
5. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ ».
   Initialisation. $\overline{z^0} = \overline{1} = 1$ et $\overline{z}^0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors,
$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} \underset{\text{d'après } \mathbf{3.}}{=} \overline{z^n} \times \overline{z} \underset{\text{grâce à } \mathcal{P}(n)}{=} \overline{z}^n \times \overline{z} = \overline{z}^{n+1}.$$
   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion. Par le principe de récurrence, on conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
   Soit un entier $n < 0$. Supposons $z \neq 0$. Alors, comme $-n > 0$, on déduit de ce qui précède que
$$\overline{z^n} = \overline{\frac{1}{z^{-n}}} = \frac{1}{\overline{z^{-n}}} = \frac{1}{\overline{z}^{-n}} = \overline{z}^n.$$
   Ainsi, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

□

Exemple 22.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer le conjugué de $Z = \dfrac{2z + \mathrm{i}}{3 - 2\mathrm{i}}$ en fonction de $\overline{z}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z.
$$(H) : 2\overline{z} + \mathrm{i} = 3 + 5\mathrm{i} \qquad (K) : z + 2\mathrm{i}\overline{z} = 3 + \mathrm{i}$$

Solution.

1. $\overline{Z} = \dfrac{\overline{2z+\mathrm{i}}}{3-2\mathrm{i}} = \dfrac{\overline{2z+\mathrm{i}}}{\overline{3-2\mathrm{i}}} = \dfrac{\overline{2z}+\overline{\mathrm{i}}}{3+2\mathrm{i}} = \dfrac{(2\overline{z}-\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}{3^2+2^2} = \dfrac{2(3-2\mathrm{i})\overline{z}-\mathrm{i}(3-2\mathrm{i})}{13}$ c'est-à-dire $\overline{Z} = \left(\dfrac{6}{13}-\dfrac{4}{13}\mathrm{i}\right)\overline{z}+\dfrac{2}{13}-\dfrac{3}{13}\mathrm{i}$.

2. Pour tout nombre complexe z,

$$(H) \iff 2\overline{z} = 3+4\mathrm{i} \iff \overline{z} = \frac{3}{2}+2\mathrm{i} \iff z = \frac{3}{2}-2\mathrm{i}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (H) dans $\mathbb{C}$ est $\left\{\dfrac{3}{2}-2\mathrm{i}\right\}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrivons z sous forme algébrique $z = a+\mathrm{i}b$. Alors,

$$\begin{aligned}
(K) &\iff (a+\mathrm{i}b)+2\mathrm{i}(a-\mathrm{i}b) = 3+\mathrm{i} \iff a+\mathrm{i}b+2a\mathrm{i}+2b = 3+\mathrm{i} \\
&\iff a+2b+\mathrm{i}(2a+b) = 3+\mathrm{i} \iff \begin{cases} a+2b = 3 & L_1 \\ 2a+b = 1 & L_2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a+2b = 3 & L_1 \\ -3b = -5 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2\times\frac{5}{3} = 3 \\ b = \frac{5}{3} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{5}{3} \end{cases} \iff z = -\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (K) est $\left\{-\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{3}\mathrm{i}\right\}$.

V. — Équations du second degré à coefficients réels

Propriété 23. — (admise)

Soit $P : x \longmapsto ax^2+bx+c$ une fonction polynôme du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

1. Si $\Delta > 0$, l'équation $P(z) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ à savoir

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Si $\Delta = 0$, l'équation $P(z) = 0$ admet exactement une solution dans $\mathbb{C}$ qui est la même que dans $\mathbb{R}$ à savoir

$$z_0 = \frac{-b}{2a}.$$

3. Si $\Delta < 0$, l'équation $P(z) = 0$ admet exactement deux solutions complexes conjuguées dans $\mathbb{C}$ qui sont

$$z_1 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple 24. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : z^2-2z+5 = 0 \qquad (E_2) : 2z^2-z+1 = 0 \qquad (E_3) : 2z^2-z-1 = 0.$$

Solution.

• $(E_1) : z^2 - 2z + 5 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$ donc l'équation (E_1) possède deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-2) - \mathrm{i}\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2 - 4\mathrm{i}}{2} = 1 - 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = 1 + 2\mathrm{i}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_1) dans $\mathbb{C}$ est $\{1 - 2\mathrm{i}, 1 + 2\mathrm{i}\}$.

• $(E_2) : 2z^2 - z + 1 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$ donc l'équation (E_2) possède deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-1) - \mathrm{i}\sqrt{7}}{2 \times 2} = \frac{1}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{4} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_2) dans $\mathbb{C}$ est $\left\{\frac{1}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{1}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{7}}{4}\right\}$.

• $(E_3) : 2z^2 - z - 1 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0$ donc l'équation (E_3) possède deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = 1.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_3) dans $\mathbb{C}$ est $\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$.

VI. — Module, arguments et forme trigonométrique

1) Module d'un nombre complexe

Définition 25

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. Alors, on définit le **module** de z, noté $|z|$, par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemple 26. Calculer le module des complexes $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = -2 - 5\mathrm{i}$, $z_3 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solution.

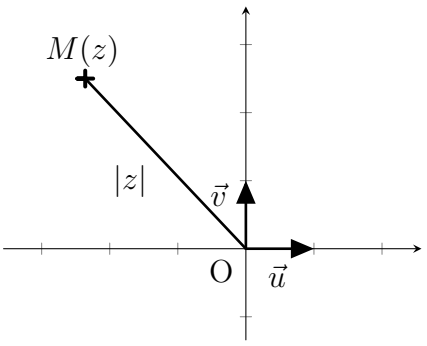
$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$

$|z_3| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1.$

Remarque 27.

1. Géométriquement, le module d'un complexe z s'interprète comme la distance $\mathrm{O}M$ où M est le point d'affixe z.
2. Par définition, le module d'un nombre complexe est un réel positif ou nul et $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
3. Si z est réel alors le module du complexe z coïncide avec la valeur absolue du réel z.



Propriété 28

Soit z un nombre complexe. Alors, $|-z| = |z|$, $|\overline{z}| = |z|$ et $|z|^2 = z\overline{z}$.

Démonstration. Écrivons z sous forme algébrique : $z = a + \mathrm{i}b$. Alors,

1. $|-z| = |-(a+\mathrm{i}b)| = |-a+\mathrm{i}(-b)| = \sqrt{(-a)^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$.
2. $|\overline{z}| = |a-\mathrm{i}b| = |a+\mathrm{i}(-b)| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$.
3. $z\overline{z} = (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2+b^2 = |z|^2$.

□

Corollaire 29

Soit z et z' deux nombres complexes.

1. $|zz'| = |z|\,|z'|$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$ (en supposant $z \neq 0$ si $n < 0$).
3. Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
4. Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Démonstration.

1. $|zz'|^2 = (zz')(\overline{zz'}) = zz'\overline{z}\overline{z'} = (z\overline{z})(z'\overline{z'}) = |z|^2\,|z'|^2 = (|z|\,|z'|)^2$. Comme $|zz'|$ et $|z|\,|z'|$ sont des réels positifs, on conclut que $|zz'| = |z|\,|z'|$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$ (et $z \neq 0$ si $n < 0$). Alors, $|z^n|^2 = z^n\overline{z^n} = z^n\overline{z}^n = (z\overline{z})^n = \left(|z|^2\right)^n = (|z|^n)^2$. Comme $|z^n|$ et $|z|^n$ sont deux réels positifs, on en déduit que $|z^n| = |z|^n$.
3. Supposons $z \neq 0$. Alors, $\left|\dfrac{1}{z}\right|^2 = \dfrac{1}{z}\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{z} \times \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{z\overline{z}} = \dfrac{1}{|z|^2} = \left(\dfrac{1}{|z|}\right)^2$. Comme $\left|\dfrac{1}{z}\right|$ et $\dfrac{1}{|z|}$ sont des réels positifs, on en déduit que $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
4. D'après les résultats des points **1.** et **3.**, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z'}\right| = |z|\left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

□

Propriété 30. — Inégalité triangulaire

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors,

$$|z+z'| \leqslant |z| + |z'|\,.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement s'il existe un réel $k \geqslant 0$ tels que $z' = kz$ ou $z = kz'$ (et on dit alors que z et z' sont positivement liés.)

Démonstration. D'une part,

$$\begin{aligned}|z+z'|^2 &= (z+z')\overline{(z+z')} = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = z\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2\,|z|\,|z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2\,|z|\left|\overline{z'}\right| + |z'|^2 = |z|^2 + 2\left|z\overline{z'}\right| + |z'|^2\,.$$

Or,

$$\left|z\overline{z'}\right| = \sqrt{\mathrm{Re}(z\overline{z'})^2 + \mathrm{Im}(z\overline{z'})^2} \geqslant \sqrt{\mathrm{Re}(z\overline{z'})^2} = \left|\mathrm{Re}(z\overline{z'})\right| \geqslant \mathrm{Re}(z\overline{z'}) \qquad (*)$$

donc $|z+z'|^2 \leqslant (|z|+|z'|)^2$. Comme $|z+z'|$ et $|z|+|z'|$ sont des réels positifs, on en déduit que $|z+z'| \leqslant (|z|+|z'|)$.

De plus, il y a égalité si et seulement s'il y a égalité dans $(*)$ i.e. si et seulement si $\mathrm{Im}(z\overline{z'}) = 0$ et $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \geqslant 0$. Ceci équivaut à dire que $z\overline{z'}$ est un réel positif K. Si $z' = 0$ alors il y a égalité et $z' = 0z$. Si $z' \neq 0$ alors,

$$z\overline{z'} = K \iff z\overline{z'}z' = Kz' \iff z\,|z'|^2 = Kz' \iff z = \frac{K}{|z'|}z'$$

donc il y a égalité si et seulement s'il existe un réel $k \geqslant 0$ tel que $z = kz'$. □

Remarque 31. Pour tout nombre complexe z, $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

En effet, en appliquant l'inégalité triangulaire avec $z' = \overline{z}$, il vient $|z+\overline{z}| \leqslant |z| + |\overline{z}|$ i.e. $|2\,\mathrm{Re}(z)| \leqslant 2\,|z|$ donc $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$. De même, en prenant $z' = -\overline{z}$, $|z-\overline{z}| \leqslant |z| + |-\overline{z}|$ i.e. $|2\,\mathrm{Im}(z)| \leqslant 2\,|z|$ donc $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

2) Nombres complexes de module 1

Notation 32. L'ensemble des nombres complexes de module 1 se note $\mathbb{U}$.

Exemple 33. $1 \in \mathbb{U}$, $\mathrm{i} \in \mathbb{U}$ et on a vu précédemment que $\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{U}$.

Propriété 34. — Stabilité par les opérations

L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par produit, inverse, quotient, puissance entière et conjugaison. Autrement dit, pour tout $(z\,;z') \in \mathbb{U}^2$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $zz' \in \mathbb{U}$, $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$, $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$, $z^n \in \mathbb{U}$ et $\overline{z} \in \mathbb{U}$.

Démonstration. Soit $(z, z') \in \mathbb{U}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors,

- $|zz'| = |z|\,|z'| = 1 \times 1 = 1$ donc $zz' \in \mathbb{U}$;
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{1} = 1$ donc $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$;
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} = \dfrac{1}{1} = 1$ donc $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$;
- $|z^n| = |z|^n = 1^n = 1$ donc $z^n \in \mathbb{U}$;
- $|\overline{z}| = |z| = 1$ donc $\overline{z} \in \mathbb{U}$.

□

Propriété 35

Soit z un nombre complexe. Les propositions suivantes sont équivalentes ;

1. $z \in \mathbb{U}$;
2. $M(z)$ appartient au cercle trigonométrique.
3. il existe un réel θ tel que $z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

Démonstration. Supposons que $z \in \mathbb{U}$ et notons M le point d'affixe z. Alors, comme $z \in \mathbb{U}$, $|z| = 1$ donc $\mathrm{O}M = |z| = 1$ et ainsi M appartient au cercle trigonométrique.

Supposons que le point M d'affixe z appartient au cercle trigonométrique. Notons θ un réel ayant le point M comme image sur le cercle trigonométrique. Alors, par définition, les coordonnées de M sont $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ donc $z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

Supposons qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$. Alors,

$$|z| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1.$$

donc $z \in \mathbb{U}$.

Ainsi, on a montré que

$$\mathbf{1.} \Longrightarrow \mathbf{2.} \Longrightarrow \mathbf{3.} \Longrightarrow \mathbf{1.}$$

ce qui assure que les trois propositions sont équivalentes. □

Exemple 36. Montrer que $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \in \mathbb{U}$ et déterminer un réel θ tel que $z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

Solution. $|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$ donc $z \in \mathbb{U}$.

De plus, $z = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

3) Formes trigonométriques et arguments d'un complexe non nul

Propriété 37

Soit z un complexe <u>non nul</u>. Alors, il existe un réel θ tel que $z = |z|\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$.

Démonstration. Comme $z \neq 0$, $|z| \neq 0$. Considérons le complexe $w = \dfrac{z}{|z|}$. Alors, comme $|z|$ est un réel positif, $||z|| = |z|$ donc

$$|w| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{||z||} = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

donc $w \in \mathbb{U}$. Dès lors, par la **Propriété 35**, il existe un réel θ tel que $z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$. Ainsi, $\dfrac{z}{|z|} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ donc $z = |z|\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$. □

Définition 38

Si $z \in \mathbb{C}^*$, l'écriture précédente est appelée une **forme trigonométrique** du complexe z et le nombre θ est appelé un **argument** de z. On note alors $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$.

Méthode 39

1. Si on connaît une forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ d'un complexe non nul, pour déterminer sa forme algébrique $z = a + \mathrm{i}b$, il suffit d'écrire que $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$.
2. Si on connaît la forme algébrique de $z = a + \mathrm{i}b$ d'un complexe non nul, pour déterminer sa forme trigonométrique, on écrit que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis on factorise dans z le nombre r afin de faire apparaître les cosinus et sinus d'un angle.

Exemple 40. Déterminer une forme trigonométrique des complexes suivants

$$z_1 = 1 \qquad z_2 = \mathrm{i} \qquad z_3 = 1 - \mathrm{i} \qquad z_4 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Solution.

- $z_1 = 1 + 0\mathrm{i} = \cos(0) + \mathrm{i}\sin(0)$
- $z_2 = 0 + 1\mathrm{i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
- $|z_3| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ donc on écrit

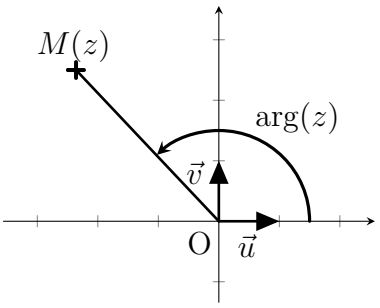
$$z_3 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

- $|z_4| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ donc on écrit

$$z_4 = 2\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Remarque 41. Soit z un complexe non nul.

1. Le nombre z admet une infinité de formes trigonométriques différentes ainsi qu'une infinité d'arguments qui sont cependant tous égaux modulo 2π.
2. Géométriquement, un argument de z s'interprète comme une mesure en radians de l'angle orienté formé par $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM}$.
3. Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.



Propriété 42

Si un complexe non nul z s'écrit $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Supposons que $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ avec $r > 0$. Alors, la forme algébrique de z est $z = r\cos(\theta) + \mathrm{i}(r\sin(\theta))$ donc

$$|z| = \sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} = \sqrt{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} = \sqrt{r^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = \sqrt{r^2} = r$$

car $r > 0$.

Considérons un argument α de z. Alors, $z = |z|\,(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha))$ donc

$$\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) = \frac{z}{r} = \frac{z}{|z|} = \cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha).$$

Dès lors, $\cos(\theta) = \cos(\alpha)$ et $\sin(\theta) = \sin(\alpha)$ donc les réels θ et α sont associés au même point sur le cercle trigonométrique et ainsi $\theta = \alpha\ [2\pi]$. On conclut donc que $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$. □

Exemple 43. Déterminer le module et un argument des complexes suivants

$$z_1 = 3\,(\cos(3) + \mathrm{i}\sin(3)) \qquad z_2 = -5\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad z_4 = 2(-\cos(3) + \mathrm{i}\sin(3)).$$

Solution.

- $z_1 = 3\,(\cos(3) + \mathrm{i}\sin(3))$ est écrit sous forme algébrique donc $|z_1| = 3$ et $\arg(z_3) = 3\ [2\pi]$.
- $z_2 = 5\left(-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = 5\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5} + \pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{5} + \pi\right)\right)$
  $= 5\left(\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right)$
  donc $|z_2| = 5$ et $\arg(z_2) = \frac{7\pi}{5}\ [2\pi]$.
- $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ donc $|z_3| = 1$ et $\arg(z_3) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
- $z_4 = 2\,(-\cos(3) + \mathrm{i}\sin(3)) = 2\,(\cos(\pi - 3) + \mathrm{i}\sin(\pi - 3))$ donc $|z_4| = 2$ et $\arg(z_4) = \pi - 3\ [2\pi]$.

4) Formes exponentielles

Définition 44

On définit l'**exponentielle imaginaire** d'un réel θ, notée $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, par

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta).$$

Exemple 45. Déterminer la forme algébrique de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$.

Solution.

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi} = \cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi) = 1 + 0\mathrm{i} = 1$.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1\mathrm{i} = \mathrm{i}$.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi) = -1 + 0\mathrm{i} = -1$.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + (-1)\mathrm{i} = -\mathrm{i}$.

Il découle de la **Propriété 37** que tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ est un argument de z.

Définition 46

Si $z \in \mathbb{C}^*$, une écriture $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ s'appelle **une forme exponentielle de** z.

Exemple 47. Déterminer une forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} \qquad z_2 = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_3 = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Solution.

- $|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ donc on écrit

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

  soit finalement $z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

- $|z_2| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ donc on écrit

$$z_2 = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

  soit finalement $z_2 = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

- $|z_3| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$ donc on écrit

$$z_3 = 4\left(\frac{2}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

  soit finalement $z_3 = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Remarque 48. On déduit de la **Propriété 42** que si un complexe z s'écrit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ alors $r = |z|$ et θ est un argument de z.

Propriété 49

Pour tous réels θ et θ',

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}.$$

Démonstration. Soit θ et θ' deux réels. Alors, grâce aux formules d'addition,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} &= (\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))\,(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')) \\
&= \cos(\theta)\cos(\theta') + \mathrm{i}\cos(\theta)\sin(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta)\cos(\theta') + \mathrm{i}^2\sin(\theta)\sin(\theta') \\
&= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + \mathrm{i}(\sin(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta')\cos(\theta)) \\
&= \cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$. □

Propriété 50

Soit un complexe z. Alors, $z \in \mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Autrement dit, $\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration. D'après la **Propriété 35**, $z \in \mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ donc $z \in \mathbb{U}$ si et seulement s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. □

Propriété 51

Soit r et r' deux réels strictement positifs et θ et θ' deux réels (quelconques). Alors,

1. $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$;
2. $-re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$;
3. $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$;
4. Pour tout entier naturel n, $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$;
5. $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ et, en particulier, $\frac{1}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$.

Démonstration.

1. $\overline{re^{i\theta}} = \overline{r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} = \overline{r} \times \overline{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} = r\,(\cos(\theta) - i\sin(\theta))$
$= r\,(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = re^{-i\theta}$.
2. $-re^{i\theta} = r \times (-1) \times e^{i\theta} = re^{i\pi}e^{i\theta}$ donc, d'après la **Propriété 49**, $-re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$.
3. D'après la **Propriété 49**, $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'} = rr'e^{I(\theta+\theta')}$.
4. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ ».
Initialisation. $(re^{i\theta})^0 = 1$ et $r^0 e^{i0\theta} = 1 \times e^{i0} = 1 \times 1 = 1$ donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors, $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ donc, d'après le point **3.**,
$$(re^{i\theta})^{n+1} = (re^{i\theta})^n \times re^{i\theta} = r^n e^{in\theta} \times re^{i\theta} = r^n \times r \times e^{i(n\theta+\theta)} = r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}$$
donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par le principe de récurrence, on a démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.
5. D'après le point **3.**, $r'e^{i\theta'} \times \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} = (r' \times \frac{r}{r'})e^{i(\theta'+\theta-\theta')} = re^{i\theta}$ donc, en divisant par $r'e^{i\theta'} \neq 0$, il vient $\frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}$.
En particulier, $\frac{1}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1e^{i0}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'}e^{i(0-\theta')} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$.

□

Exemple 52. Déterminer la forme algébrique de $(1+i)^{2021}$.

Solution. On a vu dans l'**Exemple 47** que $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc

$$\begin{aligned}(1+i)^{2021} &= \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2021} = \sqrt{2}^{2021}e^{i\frac{2021\pi}{4}} = \sqrt{2}^{2021}e^{i\frac{(8\times252+5)\pi}{4}} = \sqrt{2}^{2021}e^{i(252\times2\pi+\frac{5\pi}{4})}\\ &= \sqrt{2}^{2021}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}^{2021}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}^{2021}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{2}^{2022}}{2} - i\frac{\sqrt{2}^{2022}}{2} = -\frac{(\sqrt{2}^2)^{1011}}{2} - i\frac{(\sqrt{2}^2)^{1011}}{2} = -\frac{2^{1011}}{2} - i\frac{2^{1011}}{2}\end{aligned}$$

et on conclut que la forme algébrique de $(1+\vec{i})^{2021}$ est $-2^{1010} - 2^{1010}i$.

Exemple 53. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que $j^3 = 1$ puis que $j^2 + j + 1 = 0$.

Solution. $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i(3\times\frac{2\pi}{3})} = e^{i2\pi} = 1$.
Pour le calcul de $j^2 + j + 1$, on propose deux méthodes.

Méthode 1. Comme $j^3 = 1$, $j^2 = \frac{j^3}{j} = \frac{1}{j} = \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{j}$ donc $j^2 + j + 1 = \bar{j} + j + 1 = 2\,\mathrm{Re}(j) + 1$. Or, $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ donc $\mathrm{Re}(j) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et ainsi $j^2 + j + 1 = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$.

Méthode 2. Comme $j \neq 1$, $j^2 + j + 1 = j^0 + j^1 + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = \frac{1 - 1}{1 - j} = 0$.

Exemple 54. On considère le nombre complexe $Z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i}$.

1. Écrire $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 - i$ sous forme exponentielle et en déduire une forme exponentielle de Z.
2. Déterminer la forme algébrique de Z.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Solution.

1. $|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$ donc on écrit

$$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

$|z_2| = \sqrt{\sqrt{1}^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ donc on écrit

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

On en déduit que

$$Z = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i(-\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{4}))} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

2. $Z = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + i)}{1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3} + i\sqrt{3} - i - i^2}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.
3. Ainsi, d'une part,

$$Z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

et, d'autre part, $Z = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$. On en déduit que

- $\mathrm{Re}(Z) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2}}{4}$ i.e. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$;
- $\mathrm{Im}(Z) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}}{4}$ i.e. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Propriété 55. — Formule de de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier naturel n,

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))^n = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

□

Exemple 56. Retrouver les formules de duplication à l'aide de la formule de de Moivre.

Solution. Soit $a \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule de de Moivre avec $n = 2$, on obtient

$$(\cos(a) + \mathrm{i}\sin(a))^2 = \cos(2a) + \mathrm{i}\sin(2a).$$

Or,

$$(\cos(a)+\mathrm{i}\sin(a))^2 = \cos^2(a)+2\mathrm{i}\cos(a)\sin(a)+(\mathrm{i}\sin(a))^2 = \cos^2(a)-\sin^2(a)+\mathrm{i}(2\sin(a)\cos(a)).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on en déduit que

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \qquad \text{et} \qquad \sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a).$$

Propriété 57. — Formules d'Euler

Pour tout réel θ,

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 2\cos(\theta)$$

donc $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$.

De même,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 2\mathrm{i}\sin(\theta)$$

donc $\sin(\theta) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$. □

Remarque 58. Les formules d'Euler peuvent s'appliquer à des expressions de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ où x et y sont deux réels. En effet, en factorisant par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}$, il vient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x-y}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x-y}{2}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}} \times 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

et

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x-y}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{x-y}{2}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}} \times 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Exemple 59. Soit $\alpha \in]-\pi\,;\pi[$. Déterminer module et argument du nombre complexe

$$z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + 1}.$$

Solution. En utilisant la remarque précédente,

$$z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}0}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}0}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}\right)} = \frac{2\mathrm{i}\sin(\frac{\alpha}{2})}{2\cos(\frac{\alpha}{2})} = \mathrm{i}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ainsi, $|z| = \left|\mathrm{i}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| = |\mathrm{i}|\left|\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| = \left|\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|$.

Pour déterminer un argument, on distingue trois cas.

Si $\alpha = 0$ alors $z = 0$ donc z n'a pas d'argument.

Si $\alpha \in]-\pi\,;0[$ alors $\frac{\alpha}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$ donc $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) < 0$ et ainsi $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Si $\alpha \in]0\,;\pi[$ alors $\frac{\alpha}{2} \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$ et ainsi $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.